

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~



С. А. ЧАПЛЫГИН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

МАТЕМАТИКА

ОБЩАЯ МЕХАНИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1976

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком С. И. Вавиловым

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. П. Виноградов (председатель),

*Б. Н. Делоне, Н. М. Жаворонков, А. А. Имшенецкий, С. П. Капица,
Б. М. Кедров, А. Н. Колмогоров, Б. В. Кукаркин, С. Р. Микулинский,
Ф. А. Петровский, Л. С. Полак, Я. А. Смородинский, Н. А. Фигуровский,
А. Н. Фрумкин, Р. В. Хохлов, И. И. Шафрановский, А. Л. Яншин*

С. А. Чаплыгин. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. М., «Наука», 1976, стр. 496.

В издание включено 16 классических работ С. А. Чаплыгина по механике жидкости и газа, общей механике и математике: докторская диссертация 1903 г. «О газовых струях»; шесть статей 1910—1926 гг. по теории крыла аэроплана; совместная с Н. Е. Жуковским работа 1904 г. по теории трения шипа и подшипника; четыре исследования 1897—1911 гг. по динамике неголономных систем; четыре статьи 1919—1932 гг. по приближенному интегрированию дифференциальных уравнений.

В приложении даны биографический очерк, написанный М. В. Келдышем; документальная биографическая хроника с библиографией печатных трудов, составленная Н. М. Семеновой; краткие комментарии и примечания С. А. Христиановича, Л. В. Канторовича, Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева; документальные фотографии.

Издание рассчитано на механиков, математиков и историков науки.

Ответственный редактор *С. А. Христианович*

Составитель *Н. М. Семенова*



ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящее издание избранных трудов Сергея Алексеевича Чаплыгина содержит его основные классические работы по газовой динамике, аэродинамике, математике и теоретической механике. Из 75 опубликованных исследований в издание включено 16.

Первой помещена работа «О газовых струях», оказавшая большое влияние на теоретические исследования в области газовой динамики. Затем следует работа «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана)», которая сыграла исключительную роль в создании теории крыла и раскрытии тайны полета. Из работ, составивших основание теории крыла, в издание включено еще пять статей 1910—1926 гг. Математические работы представлены трудом «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений», объединившим четыре статьи. Идеи, заложенные в этом исследовании, уже в наше время получили дальнейшее развитие в трудах математиков.

Из работ по теоретической механике публикуются четыре исследования по динамике неголономных систем, относящиеся к раннему периоду творчества С. А. Чаплыгина (1897—1911 гг.).

Помещена также статья «О трении смазочного слоя между шипом и подшипником», написанная в 1904 г. совместно с Н. Е. Жуковским.

Публикуемые работы дополнены небольшими редакционными примечаниями и комментариями, составленными С. А. Христиановичем при участии Л. В. Канторовича (математические работы), Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева (работы по динамике неголономных систем).

В приложении помещена статья М. В. Келдыша о научной и общественной деятельности С. А. Чаплыгина; документальная биографическая хроника; библиография печатных работ С. А. Чаплыгина; именной указатель.

Статьи печатаются по тексту последнего по времени издания 1954 г. «С. А. Чаплыгин. Избранные труды по механике и математике», подготовленному редколлегией в составе: Л. С. Лейбензон (председатель), С. А. Христианович (зам. председателя), Г. Н. Абрамович, В. В. Голубев, М. В. Келдыш, Н. М. Семенова, Л. Н. Сретенский, заново выверенному по прижизненным изданиям автора. Редакционные примечания помещены в конце книги (перед комментариями). Ссылки на них помечены числами в квад-

ратных скобках. Отдельные слова, добавленные редакцией в текст, также заключены в квадратные скобки.

При составлении биографической хроники — документированной канвы научной биографии С. А. Чаплыгина — были использованы материалы личного архива С. А. Чаплыгина, документы центральных, московских и ленинградских государственных и ведомственных архивов, труды С. А. Чаплыгина, литературные источники — книги и периодические издания. Даты хроники до 1 февраля 1918 г. даются по старому стилю. В подготовке материалов хроники принимали участие С. С. Тихонович, Л. В. Малюкова, Н. М. Коптелова, Н. Ю. Кишкина, Н. С. Меншов.

В издании приводятся фотографии С. А. Чаплыгина, хранящиеся в ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского (в фондах Научно-мемориального музея Н. Е. Жуковского и музея-квартиры С. А. Чаплыгина).

17 декабря 1974 г.

С. А. Христианович

I
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ
И ГАЗА

О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ¹

ПРЕДИСЛОВИЕ

В своем мемуаре «Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen»² Гельмгольц (Helmholtz) показал возможность математического анализа таких течений несжимаемой жидкости, при которых образуются так называемые лучи (Strahle) или струи, бегущие среди спокойной области. Вслед за работой Гельмгольца в иностранной и русской научной литературе появилось довольно много исследований, посвященных той же задаче; в настоящее время мы имеем вполне выработанную методу Н. Е. Жуковского³, которая позволяет направиться на решение любого вопроса об установившемся невихревом течении идеальной жидкости при следующих условиях: во-первых, жидкость везде движется параллельно некоторой плоскости, причем поток может быть прегражден перпендикулярными к этой плоскости плоскими стенками, и, во-вторых, движение происходит в отсутствии сил. (Те же условия ставятся почти во всех работах этого рода.)

Та же задача для идеального газа едва затронута. Нам известна лишь одна работа, в которой трактуется о газовых струях; это статья П. Моленбрёка (P. Molenbroek) «Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials»⁴. Моленбрёк составил дифференциальные уравнения, от которых зависит вопрос о струевых течениях газов, и указал некоторые частные интегралы этих уравнений, едва ли, впрочем, соответствующие даже теоретически мыслимому движению газа.

Мы в предлагаемой работе даем прием, при помощи которого возможно во многих случаях найти решение заранее поставленной задачи о прерывном течении идеального газа. При этом приходится поставить все те условия, которые в аналогичных задачах о несжимаемой жидкости принимаются в цитированном выше сочинении Н. Е. Жуковского; но, сверх того, применимость развитого здесь анализа ограничивается еще и специальным требованием, именно: скорость газовых частиц нигде не должна превышать скорости звука при том физическом состоянии газа, в котором он на-

¹ Диссертация на степень доктора прикладной математики. Впервые напечатана отдельным изданием в 1902 г.

² Monatsber. d. königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1868.

³ Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа и т. д. — Математический сборник, т. XV. Москва, 1890 [см. также Избранные сочинения, т. I, Гостехиздат, 1948].

⁴ Arch. Math. Phys., 1890.

ходится в данной точке; соответственные стеснения наложатся и на границы, в которых может изменяться давление. Если это дополнительное условие не выполнено, то, по-видимому, установившегося движения и быть не может⁵. Мы полагаем, однако же, что при помощи некоторой гипотезы, указанной в нашем сочинении, возможно анализировать вопрос и в том случае, если дополнительное условие не соблюдается, но математическую обработку этой задачи отлагаем до следующей статьи.

Переходим к краткому обзору содержания нашей работы. В главе I мы выводим дифференциальные уравнения задачи о течении газа в двух измерениях и указываем те частные интегралы, которые разрешают задачу о струях; при этом мы пользуемся теми же самыми независимыми переменными, как и Моленбрёк, но находим выгоднее рассматривать иные функции. Соответствующие вопросу функцию тока и потенциал скоростей мы изображаем в виде рядов. Исследование сходимости этих рядов в связи с некоторыми свойствами функций, в них входящих, составляет предмет главы II. В главе III мы решаем задачу об истечении газа из бесконечного сосуда с плоскими стенками. В главе IV рассматриваем удар газовой струи в пластинку и подробнее останавливаемся на том предельном случае, когда эта струя расширяется до бесконечности, обращаясь в газовый поток. Этим самым разрешается и вопрос о сопротивлении газовой среды полету пластинки. Наконец, в главе V указана приближенная метода, позволяющая проще решать вопросы о струевых течениях в том случае, если скорости газа (скорости тел в газе) не очень значительны. В конце работы приведена дополнительная заметка, устанавливающая связь анализа главы V с некоторыми задачами теории минимальных поверхностей.

Позволяем себе еще отметить здесь следующее любопытное обстоятельство: полученные нами в главах III и IV результаты, по крайней мере с качественной стороны, довольно хорошо согласуются с данными опыта, хотя экспериментальные исследования над явлениями, сопровождаемыми образованием струй, производились при условиях, далеко не похожих на принятые в наших теоретических изысканиях.

Основы излагаемой здесь методы с приложением ее к задаче об истечении вкратце были сообщены Московскому математическому обществу в начале 1896 г.; в более подробном виде эта работа докладывалась на XI съезде естествоиспытателей и врачей в 1901 г.

Заканчивая на этом вступительные замечания, считаем своим приятным долгом в заключение выразить искреннюю благодарность Е. А. Болотову за его любезную помощь при корректуре.

⁵ Работа наша относится к 1902 г. В настоящее время (1933 г.) намечены новые решения вопроса и найдены установившиеся формы течений со скоростями, превышающими звуковую [*примечание автора к изданию 1933 г.*]. [Методы, развитые автором, с успехом применяются в настоящее время к течениям с околосвуковыми и сверхзвуковыми скоростями (*Прим. ред.*)].

Глава I

ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Представим себе бесконечную массу совершенного газа, заключенную между двумя параллельными плоскостями и отчасти ограниченную, сверху того, некоторыми цилиндрическими поверхностями, перпендикулярными к упомянутым плоскостям. Одну из этих плоскостей примем за плоскость координат OXY . Пусть масса газа находится в установившемся движении, и пусть направление скорости везде параллельно плоскости OXY . Будем пренебрегать влиянием внешних сил и предположим, что скорости имеют потенциал. Так как мы желаем избежать образования вихрей, то необходимо считать давление функцией плотности. Будем принимать

$$p = k\rho^\gamma, \quad (1)$$

останавливаясь, таким образом, на адиабатном процессе. Количество γ , равное для атмосферного воздуха 1,4025¹, есть отношение удельных теплот. Мы предпочитаем рассматривать движение с сохранением тепла всякою частицею газа ввиду малой теплопроводности и малой лучеиспускательной способности газа; благодаря этим обстоятельствам адиабатный процесс при значительных скоростях нам кажется наиболее близким к действительности. Во всяком случае на результат нашего анализа придется смотреть как на первое приближение уже по тому одному, что мы совершенно не принимаем в расчет сцепления между частицами газа и возникающих отсюда сил вязкости, трения о стенки и тому подобных факторов в задаче о газовой массе, может быть, более влиятельных, чем в случае движения капельной жидкости.

При высказанных предположениях потенциал скоростей ϕ есть функция x и y , и мы имеем для компонентов скорости u , v выражения

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2)$$

Обозначив через ρ плотность газа, пишем условие неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Закон Бернулли в нашей задаче при помощи уравнения (1) приведет к соотношению

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{2\alpha} \right)^\beta, \quad (4)$$

¹ *Emden*. Ausströmungserscheinungen permanenter Gase. — Ann. Phys. Chem., 69, вып. 2, 445

причем

$$V^2 = u^2 + v^2, \quad \alpha = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}, \quad (5)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma-1}, \quad \rho_0 = \text{const};$$

здесь ρ_0 , очевидно, представляет плотность в той точке текущего газа, где $V = 0$. Положим для краткости

$$\frac{V^2}{2\alpha} = \tau,$$

так что

$$\rho = \rho_0(1 - \tau)^\beta. \quad (6)$$

Уравнение (3) указывает на существование функции ψ , определяемой равенствами

$$\frac{\rho}{\rho_0} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Из уравнений (1) и (7) через посредство соотношения (6) мы получаем зависимость между функциями φ и ψ , характеризуемую формулами

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Функция ψ представляет собой функцию тока; уравнение $\psi = \text{const}$ есть уравнение линий тока. Придавая постоянной последовательно значения C_1 и C_2 , легко убедиться, что $(C_1 - C_2) \rho_0$ выражает массу газа, протекающую в одну секунду через сечение струи между линиями тока:

$$\psi = C_1, \psi = C_2.$$

Преобразуем уравнения (8), приняв за независимые переменные количества φ , ψ и считая x , y функциями φ и ψ . Легко находим соотношения

$$D \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad D \frac{\partial y}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$D \frac{\partial x}{\partial \psi} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad D \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

где

$$D = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = (1 - \tau)^\beta V^2;$$

из этих уравнений получаем обратную величину квадрата скорости

$$\frac{1}{V^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (9)$$

Уравнения (8) переходят в

$$(1 - \tau)^3 \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad (1 - \tau)^3 \frac{\partial x}{\partial \psi} = - \frac{\partial y}{\partial \varphi}. \quad (10)$$

Рассмотрим производные по φ и ψ от переменных

$$\tau = \frac{V^2}{2\alpha}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\partial \varphi / \partial y}{\partial \varphi / \partial x} = \operatorname{arctg} \frac{\partial y / \partial \varphi}{\partial x / \partial \varphi} = - \operatorname{arctg} \frac{\partial x / \partial \psi}{\partial y / \partial \psi}; \quad (11)$$

θ есть, очевидно, угол наклона скорости к оси OX . Дифференцируя V^2 по ψ , находим

$$\frac{\partial (V^2)}{\partial \psi} = -2V^4 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right)$$

или на основании уравнений (10)

$$\frac{\partial (V^2)}{\partial \psi} = -2V^4 \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right) (1 - \tau)^3;$$

дифференцирование θ по φ дает

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{arctg} \frac{\partial x / \partial \psi}{\partial y / \partial \psi} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi}}{(\partial x / \partial \psi)^2 + (\partial y / \partial \psi)^2}$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -V^2 (1 - \tau)^{2\beta} \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right).$$

Эти соотношения приводят к уравнению

$$\frac{\partial \ln V^2}{\partial \psi} = \frac{2}{(1 - \tau)^\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Далее найдем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{arctg} \frac{\partial y / \partial \varphi}{\partial x / \partial \varphi} = V^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} \right);$$

при помощи уравнений (10) получаем отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = V^2 (1 - \tau)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} \right);$$

но

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{V^2 (1 - \tau)^{2\beta}} = \\ &= \frac{1}{4\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\tau (1 - \tau)^{2\beta}} = - \frac{1}{4\alpha \tau^2} \frac{1 - (2\beta + 1) \tau}{(1 - \tau)^{2\beta + 1}} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

теперь, совершив окончательное приведение в формуле для $\partial\theta/\partial\psi$ и вводя τ вместо V^2 в соотношение (12), мы приходим, наконец, к соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial\psi} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial\theta}{\partial\psi}, \\ \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} &= -2\tau \frac{(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau} \frac{\partial\theta}{\partial\psi}.\end{aligned}\quad (13)$$

Переходя затем к независимым переменным τ , θ и приняв φ и ψ за их функции, мы легко получаем формулы, отыскание которых было нашей целью; они суть

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta};\end{aligned}\quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) решают вопрос о течении газа, если известна область переменных (τ, θ) , соответствующая этому течению, если даны значения ψ на граничных линиях тока, если везде внутри области функция ψ вместе со своими первыми производными конечна, однозначна и непрерывна, а количество τ не превышает $1/(2\beta+1)$ и обращается в нуль лишь в некоторых точках контура. Площадь (τ, θ) будем считать односвязной и замкнутой.

Чтобы обнаружить полную определенность функции ψ при указанных условиях, применим доказательство от противного: предположим, что существуют две функции ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие всем нашим требованиям, и покажем, что $\psi_1 - \psi_2 = 0$. Функция $\psi_3 = \psi_1 - \psi_2$ везде в заданной области значений τ , θ конечна и непрерывна, удовлетворяет уравнению (15) и на границах области обращается в нуль. Умножаем левую часть уравнения (15) на ψ $d\tau d\theta$ и интегрируем в пределах области (τ, θ) ; обозначая через J результат интегриации, легко находим по замене ψ через ψ_3

$$\begin{aligned}J &= - \iint \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau} \right)^2 + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} \right)^2 \right\} d\tau d\theta + \\ &+ \iint \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \psi_3 \frac{\partial\psi_3}{\partial\tau} d\theta + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \psi_3 \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} d\tau \right\} = 0;\end{aligned}$$

здесь двойной интеграл распространен на всю площадь (τ, θ) , однократный — на ее контур. Так как на контуре $\psi_3 = 0$, то равенство $J = 0$ может иметь место лишь при условии обращения в нуль двойного интеграла; но при высказанных выше условиях подинтегральная функция в этом интеграле может быть или положительна, или равна нулю; ясно, что надо

принять последнее; а это поведет к равенствам

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} = 0 \quad \text{и} \quad \psi_3 = \text{const} = 0.$$

Требуемое, таким образом, доказано.

В числе необходимых условий определенности решения мы указали на то, что везде внутри области течения газа должно иметь место неравенство

$$\tau < \frac{1}{2\beta + 1};$$

выясним смысл этого требования. Обращаемся для этого к формулам (4), (5); при

$$\tau = \frac{V^2}{2\alpha} \leq \frac{1}{2\beta + 1} = 0,17$$

мы имеем

$$V^2 \leq \frac{2\alpha}{2\beta + 1}, \quad V^2 \leq \frac{2k\gamma\rho^{\gamma-1}}{1 + \gamma};$$

там, где

$$V^2 = \frac{2k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{1 + \gamma},$$

[выполняются равенства]

$$\tau = \frac{1}{2\beta + 1}, \quad \rho^{\gamma-1} = \rho_0^{\gamma-1}(1 - \tau), \quad \rho^{\gamma-1} = \frac{2\rho_0^{\gamma-1}}{1 + \gamma},$$

а отсюда $V^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1}$, или, воспользовавшись соотношением (1), $V^2 = p\gamma/\rho$. Таким образом, стеснение, наложенное на τ , равносильно требованию, чтобы скорость текущего газа нигде не превышала скорости распространения звука при тех физических условиях, которые имеют место в рассматриваемой точке. Мы полагаем, что таких скоростей, по крайней мере при установившихся течениях, и существовать не может².

Предельная величина

$$\tau = \frac{1}{2\beta + 1}$$

устанавливает также границы, в которых может изменяться давление в области, занятой движущейся газовой массой. В самом деле, если переменное τ везде менее своей предельной величины, то

$$\rho \geq \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2\beta + 1}\right)^\beta, \quad p \geq p_0 \left(1 - \frac{1}{2\beta + 1}\right)^{\beta\gamma},$$

² См. *Lamb. Hydrodynamics*, 1895, стр. 28, 29, а также цитируемых Ламбом авторов. [Имеется русский перевод. *Ламб Г. Гидродинамика*. Гостехиздат, 1947, § 24а, 25. См. прим. автора, стр. 12].

но

$$\beta\gamma = \frac{\gamma}{\gamma-1} = 1 + \beta,$$

а потому

$$\frac{p}{p_0} \geq \left(\frac{2\beta}{2\beta+1} \right)^{\beta+1} = \left(\frac{5}{6} \right)^{7/2} = 0,53, \quad \frac{p_0}{p} \leq 1,89,$$

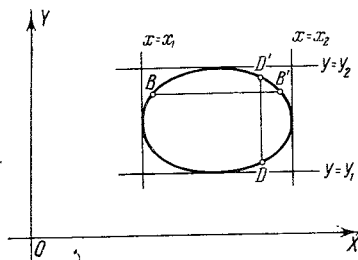
если мы примем приближенно $\gamma = 1,40$.

Рис. 1

Обратимся к выводу других весьма важных теорем о рассматриваемом движении. Докажем, во-первых, что потенциал скоростей ϕ , рассматриваемый как функция координат, нигде в области течения не может иметь ни максимума, ни минимума. Для доказательства этого положения можно было бы ограничиться следующим рассуждением: если бы существовала точка, в которой ϕ имело бы максимум, то вокруг нее должна была бы существовать сомкнутая кривая, на которой ϕ имело бы постоянное значение, меньшее максимального; в таком случае газ втекал бы

через эту кривую снаружи ограниченной ею площади внутрь; масса его, ограниченная кривой, увеличивалась бы с течением времени, и движение не могло бы быть установившимся. Подобное же рассуждение устраняет и предположение о минимуме ϕ . Но так как теорема о функции ϕ имеет место и для функции ψ ввиду того, что она справедлива также и для координат x, y , рассматриваемых как функции независимых переменных ϕ и ψ , то мы дадим и другое ее доказательство, годное для всех этих функций. Из формул (8) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\tau)^\beta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-\tau)^\beta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = 0.$$

Пусть в некоторой точке A области течения ϕ имеет максимум (или минимум). Отметим сомкнутую, окружающую эту точку кривую (C) , вдоль которой ϕ сохраняет постоянное значение k , меньшее максимального (или большее минимального). Умножаем приведенное выше уравнение для ϕ на $F(\phi) dx dy$ и интегрируем по площади, ограниченной кривой (C) . Совершив интегрирование по частям, находим

$$F(k) \int_{y_1}^{y_2} \int_B^{B'} (1-\tau)^\beta \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + F(k) \int_{x_1}^{x_2} \int_D^{D'} (1-\tau)^\beta \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \\ - \iint F'(\phi) (1-\tau)^\beta \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0. \quad (16)$$

В этом соотношении знак подстановки $\int_B^{B'}$ показывает, что подинтегральная функция составляет разность значений $(1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ в точках B' и B (рис. 1); аналогичное значение имеет и вторая подстановка. Так как в случае максимума функция φ при переходе с контура (C) внутрь его увеличивается, то в точках B и B' мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx > 0$$

при переходе внутрь области интегрирования; а так как в первой из этих точек dx положительно, а во второй отрицательно при движении вдоль BB' , то

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B > 0; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{B'} < 0$$

и

$$\int_B^{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0; \quad \int_D^{D'} \frac{\partial \varphi}{\partial y} < 0.$$

Выбираем функцию $F(\varphi)$ так, чтобы $F(\varphi)$ и $F'(\varphi)$ везде внутри (C) были больше нуля. Обращаясь теперь к выведенному соотношению (16), убеждаемся, что все его слагаемые меньше нуля, а следовательно, оно невозможно; стало быть, невозможен и предположенный максимум функции φ . Предположив минимум, мы имели бы противоположный знак у подстановок, выбрали бы функцию F так, чтобы имело место неравенство $F(\varphi) F'(\varphi) < 0$, и опять пришли бы к невозможности равенства (16).

Совершенно то же рассуждение докажет справедливость выведенной теоремы и в других упомянутых выше случаях, причем для функций $x(\varphi, \psi)$ и $y(\varphi, \psi)$ придется пользоваться формулами [10].

При помощи уравнений (13) нетрудно доказать аналогичную теорему и для функции τ ; τ , а следовательно, и скорость течения не могут иметь максимума в области переменных φ, ψ ; минимум может существовать, но минимальное значение τ есть нуль. Чтобы обнаружить это, составляем на основании формул (13) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1 - (23 + 1)\tau}{\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{(1 - \tau)^\beta}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right] = 0.$$

Предположим, что существует в плоскости φ, ψ точка, где τ имеет максимум или минимум. Отметим окружающую эту точку кривую (C) с постоянным значением τ , умножим уравнение для τ на некоторую функцию $f(\tau)$ и интегрируем левую часть по площади, ограниченной кривой (C) .

Совершив интегрирование по частям, приходим к соотношению

$$\oint \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \psi} d\psi + \oint \frac{(1 - \tau)^\beta}{\tau} f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} d\varphi - \\ - \iint \left\{ \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{(1 - \tau)^\beta}{\tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right)^2 \right\} f'(\tau) d\varphi d\psi = 0.$$

Совершенно так же, как и в случаях, рассмотренных выше, доказываем невозможность этого соотношения; но легко видеть, что доказательство будет иметь силу лишь при условии $\tau \leq 1/(2\beta + 1)$ *внутри области течения*; а это условие уже принято нами, и выяснен его физический смысл. Случай $\tau = 0$ исключается сам собой из области применимости приведенных рассуждений и вот почему: в точке, где $\tau = 0$, если эта точка лежит внутри текущей массы, сходятся струи; легко непосредственно усмотреть, что в таком случае координаты x, y не могут оказаться однозначными функциями φ, ψ ; область (φ, ψ) будет представляться в виде по крайней мере двулистной римановой поверхности, чего не предполагалось при составлении двукратных интегралов, фигурировавших в наших рассуждениях. Но легко без всяких формул убедиться, что значение $\tau = 0$ есть минимум τ ; для этого достаточно вспомнить, что $\tau = (u^2 + v^2)/2\alpha$; а так как эта функция везде неотрицательна, то значение нуль действительно представляет ее минимум. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие течения газа, при которых критическая точка $\tau = 0$ лежит на граничном контуре области (τ, θ) и поверхность области (φ, ψ) однолистная.

Составив по формулам (13) дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau}{(1 - \tau)^\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\tau(1 - \tau)^{\beta+1}}{1 - (2\beta + 1)\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right] = 0$$

и применив описанный уже прием, мы убеждаемся, что *функция $\theta(\varphi, \psi)$ не может иметь ни максимума, ни минимума*. Подобным же образом установим отсутствие поворотных значений и у функций φ, ψ от τ и θ , если эти последние величины примем за независимые переменные, для чего придется воспользоваться формулами (14).

Из доказанных теорем явствует, что в области (φ, ψ) не может существовать замкнутых кривых, вдоль которых функции x, y, τ, θ сохраняли бы постоянные значения; все такие кривые должны оканчиваться на границах области. Точно так же в области (τ, θ) расположатся кривые $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$.

В приложениях мы будем иметь в виду лишь такие задачи, которым соответствует область (τ, θ) , ограниченная концентрическими кругами и проходящими через их центр отрезками прямых. Количества τ, θ при этом будут представлять полярные координаты точек их области и общий центр граничных кругов будет полюсом координат.

При таких условиях из теоремы о невозможности максимума и минимума функций $\tau(\varphi, \psi), \theta(\varphi, \psi)$ мы можем заключить, что внутренним точкам

области (φ, ψ) соответствуют внутренние же точки области (τ, θ) . Заметим еще, что, пользуясь положением об отсутствии максимума и минимума у функции $\psi(\tau, \theta)$, мы снова можем получить доказанную уже ранее теорему об определенности этой функции, если она непрерывна внутри области (τ, θ) и задана на ее границах. Ряд граничных значений может быть вообще и прерывным.

Пусть теперь нам дана некоторая задача о течении газа; пусть мы знаем соответственный контур области переменных τ, θ , удовлетворяющий условию $\tau < 1/(2\beta + 1)$; пусть, наконец, ψ на контуре известно; если из каких-либо соображений можно заключить, что поставленная задача имеет решение, и если мы найдем непрерывную функцию ψ , выполняющую поставленные требования, то эта функция действительно будет представлять функцию тока, так как другой быть не может³.

Но такие побочные соображения не всегда могут а priori иметь место; а раз этого нет, то, отыскав функцию ψ и по ней φ , позволительно еще сомневаться, точно ли эти функции дают возможное течение газа. Чтобы эти сомнения устранить, необходимо показать всякий раз, что формулы для φ и ψ определяют τ и θ в зависимости от x и y однозначно. Для разъяснения этого пункта рассуждаем следующим образом: пусть определена однозначная функция $\psi(\tau, \theta)$; тогда из формулы

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

и аналогичных ей мы на основании соотношений (10) и формул

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}$$

получаем

$$\sqrt{2\alpha\tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\sin \theta}{(1-\tau)^\beta}$$

и ему подобные. Таким образом, производные от функций $x(\tau, \theta)$ и $y(\tau, \theta)$ определяются в зависимости от τ и θ однозначно. Если Якобиев определитель $\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix}$ не обращается в нуль внутри области (τ, θ) , то эти последние величины, как известно, определяются однозначно в зависимости от x, y . Но

$$\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, y \\ \varphi, \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{pmatrix},$$

³ По поводу теоремы об определенности решения дифференциальных уравнений того же типа, как и уравнения для функции ψ , см. также *Picard. Traité d'analyse*, т. II, стр. 23—32.

а на основании соотношений (10) и (14)

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} x, y \\ \varphi, \psi \end{matrix} \right) &= \frac{1}{2\alpha\tau(1-\tau)^3}, \\ -\left(\begin{matrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{matrix} \right) &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^3} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right)^2 + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что если везде $\tau \leq 1/(2\beta + 1)$, то равенство

$$\left(\begin{matrix} x, y \\ \tau, \theta \end{matrix} \right) = 0$$

возможно лишь при одновременном обращении в нуль обеих частных производных функций ψ . Это может иметь место в узловой точке одной из линий $\psi = \text{const}$, буде такая узловая точка на этой кривой существует. Вообще отвергать существование таких узловых точек мы не можем; но можем утверждать, что линии $\psi(\tau, \theta) = \text{const}$ ни в каком случае не будут образовывать петель, так как тогда внутри петли существовали бы замкнутые линии $\psi = \text{const}$. Стало быть, образовав узел, наша кривая должна своими ветвями упираться в границы области, примерно так, как указано на рис. 2. Но если, хотя бы из условий задачи, нам известно, что все кривые $\psi = \text{const}$ выходят из одной и той же точки контура (τ, θ) и вновь сходятся в одной и той же его точке, то уже указанное на рис. 2 расположение

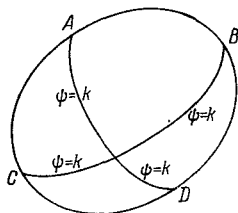


Рис. 2

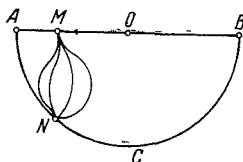


Рис. 3

невозможно, а следовательно, невозможно и исчезновение определителя $\left(\begin{matrix} x, y \\ \tau, \theta \end{matrix} \right)$; то же самое справедливо и в том случае, если, выходя из одной и той же границы области, кривые $\psi(\tau, \theta) = \text{const}$ затем делятся на пучки, причем каждый пучок собирается опять в одну точку.

Совсем другая картина будет представляться, если мы отыскиваем установившееся течение газа при таких обстоятельствах, что τ выходит за предельное значение $1/(2\beta + 1)$. Тогда определитель $\left(\begin{matrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{matrix} \right)$ в той части области (τ, θ) , где τ более предельной величины, представляет разность двух положительных количеств и будет обращаться в нуль вдоль некоторой

кривой. Рассмотрим, например, тот случай, когда границам области (φ, ψ) в области (τ, θ) соответствует полуокружность ACB и стягивающий ее диаметр AB , причем центр полуокружности находится в точке $\tau = 0$ (рис. 3); пусть ψ вдоль этого контура имеет те или другие постоянные значения. Вдоль линии OA мы имеем, очевидно, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$; на полуокружности ACB $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$. Поэтому при переходе по любой кривой из некоторой точки M диаметра в точку N полуокружности отношение $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 : \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2$ проходит всевозможные значения от 0 до ∞ . Отсюда следует, что если мы выберем для τ какое-либо значение

$$\tau_0 > \frac{1}{2\beta + 1},$$

то на всякой из кривых, соединяющих M и N , будет находиться такая точка, в которой выражение

$$2\tau_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1 - (2\beta + 1)\tau_0}{2\tau_0(1 - \tau_0)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2$$

обращается в нуль. Ряд этих точек будет представлять в области (τ, θ) некоторую кривую; точка встречи этой линии с линией $\tau = \tau_0$ и будет тем пунктом, в котором имеет место равенство

$$(1 - \tau)^\beta \left(\frac{\psi, \varphi}{\tau, \theta}\right) = 2\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 = 0,$$

а стало быть, по вышеприведенным формулам и равенство

$$\left(\frac{x, y}{\tau, \theta}\right) = 0.$$

Очевидно, из того, как мы получили одну из таких точек, надо сделать вывод, что они займут сплошь некоторую кривую. Таким образом, функции $\tau(x, y)$ и $\theta(x, y)$ не будут однозначны, как это необходимо в действительном движении газа. *Итак, если из условий задачи можно заключить, что давление текущего газа и скорости его частиц должны выйти из пределов, определяемых неравенством*

$$\tau < \frac{1}{2\beta + 1},$$

то установившееся движение, по крайней мере, не всегда возможно.

Обратимся к разрешению того вопроса, который мы специально имели в виду при постановке нашего анализа. Будем рассматривать течения газа, прегражденные плоскими стенками, с краев которых газ срывается, обтекающая далее области постоянного давления; при этом мы остановимся подробнее на разборе задач об истечении газа из весьма большого сосуда

и о давлении беспредельного газового потока на пластинку. Рассмотрим частное решение уравнения (15) вида

$$\psi_n = z_n \sin(2n\theta + \alpha_n), \quad (17)$$

где z_n есть функция одного τ . Для определения этой функции мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{dz_n}{d\tau} \right\} - \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1-\beta)^{\beta+1}} n^2 z_n = 0 \quad (18)$$

или в раскрытой форме

$$\tau^2(1-\tau) \frac{d^2 z_n}{d\tau^2} + \tau[1 + (\beta - 1)\tau] \frac{dz_n}{d\tau} - n^2[1 - (2\beta + 1)\tau] z_n = 0. \quad (19)$$

Положив

$$z_n = \tau^n y_n, \quad (20)$$

где $n > 0$, находим для определения y_n уравнение

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 y_n}{d\tau^2} + [2n + 1 + (\beta - 2n - 1)\tau] \frac{dy_n}{d\tau} + \beta n(2n + 1) y_n = 0.$$

Это уравнение — гипергеометрическое. Интегралы его имеют вид

$$y_n^{(1)} = K(\tau), \quad y_n^{(2)} = \tau^{-2n} K(\tau),$$

где $K(\tau)$ обозначает ряд $c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots$. Если мы желаем иметь в формуле (17) выражение ψ_n , не обращающееся в бесконечность в критической точке $\tau = 0$, то должно взять тот из интегралов уравнения (19), который остается конечным при $\tau = 0$. Поэтому мы полагаем, пользуясь обозначением Гаусса

$$y_n = F(a_n, b_n, 2n + 1, \tau); \quad (21)$$

количества a_n и b_n определяются из уравнений

$$a_n + b_n = 2n - \beta, \quad a_n b_n = -\beta n(2n + 1).$$

Посмотрим, какие из задач вышеуказанного типа могут быть разрешены при помощи функции ψ , выражаемой формулой

$$\psi = A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \psi_n,$$

где A, B, B_n — некоторые постоянные, а ψ_n определяется формулами (17), (20) и (21). Обратим прежде всего внимание на граничные условия наших задач. Так как газовая масса должна быть ограничена линиями тока, то вдоль граничного контура области (τ, θ) функция ψ должна приобретать те или другие постоянные значения. При этом если рассматриваемая часть контура соответствует плоской стенке, то на ней θ (угол скорости с осью

ОХ) должен сохранять постоянную величину; а стало быть, эта часть границы будет представлять отрезок прямой, проходящей через полюс $\tau = 0$. Если же дело идет о поверхности струи, то вдоль нее мы имеем давление $p = \text{const}$, а следовательно, по теореме Бернулли, и скорость v должна здесь сохранять постоянное значение v_0 ; но $v^2/2\alpha = \tau$, и потому τ также вдоль струи имеет постоянную величину; ее мы будем обозначать через τ_0 . Ясно, что часть границы области (τ, θ) , соответствующая струе, будет изображаться дугой окружности, центром которой служит полюс.

Сравним теперь поставленную задачу о движении газообразных масс с соответственной задачей о течении несжимаемой жидкости при одних и тех же граничных условиях (при одинаковом расположении преграждающих стенок, одинаковых скоростях в бесконечно удаленных точках и при одной и той же скорости на границе струй, сбегających с преград). Последняя задача решается при помощи известной метода Н. Е. Жуковского. Пользуясь этой методом, мы можем найти зависимость между комплексными переменными

$$\ln \frac{v_0}{v} + i\theta = \ln \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} + i\theta \quad \text{и} \quad w = \varphi_1 + i\psi_1,$$

где φ_1 и ψ_1 — потенциал скоростей и функция тока, соответствующие задаче. Допустим, что мы получили

$$w = f\left(\ln \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} + i\theta\right)$$

и что эта функция может быть разложена в ряд вида

$$w = k + B\left(\ln \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} + i\theta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n e^{2ni\theta};$$

тогда

$$\psi_1 = A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \sin(2n\theta + \alpha_n). \quad (22)$$

Утверждаем, что та же задача о течении газа разрешится формулой

$$\lambda\psi = A + B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n), \quad (23)$$

где y_n есть гипергеометрический ряд, определяемый формулой (21), $y_{n,0}$ — его частное значение по замене τ через τ_0 , а λ — некоторое постоянное. Справедливость сказанного отчасти может быть выяснена теперь же. В самом деле, легко видеть, что при $\tau = \tau_0$ правые части формул (22) и (23) совпадают; стало быть, если при $\tau = \tau_0$ $\psi_1 = \text{const}$, то и $\psi = \text{const}$. Если, далее, при каком-нибудь значении $\theta = \theta_0$ функция, определяемая формулой (22), не зависит от τ , то это может иметь место лишь при выпол-

нении условия $\sin(2n\theta_0 + \alpha_n) = 0$ при всяком n , фигурирующем под знаком суммы; но тогда и правая часть формулы (23) при таком θ будет иметь постоянную величину. Таким образом, граничные условия, налагаемые на функцию ψ , выполнены.

Заметим затем, что ряд ψ формально удовлетворяет уравнению (15), так как представляет сумму его частных интегралов. Если теперь мы покажем, что при всяком $\tau < \tau_0$ ряд (23) сходится, а при $\tau = \tau_0$ стремится к тому же пределу, как и ряд (22), то выражаемая им функция действительно будет искомой функцией тока. Если, кроме того, будет показано, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно вместе с рядами, получающимися от его почленного дифференцирования по τ и θ , то мы будем вправе считать эти последние ряды выражением частных производных основного ряда; а тогда, воспользовавшись равенствами (9), (11) и (14), по известному ψ найдем φ , x , y . Что касается φ , то оно найдется на основании формул (14), которые приведут к соотношению

$$d\varphi = -B \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\tau_0^n y_{n,0}} \left[2 \sin(2n\theta + \alpha_n) z'_n \frac{\tau}{(1 - \tau)^{\beta}} d\theta - \right. \\ \left. - 2n \cos(2n\theta + \alpha_n) z_n \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} d\tau \right];$$

отсюда, воспользовавшись уравнением (18) и следующими, легко получаем

$$\varphi = C + \frac{B}{(1 - \tau)^{\beta}} - \frac{B}{2} \int \frac{d\tau}{\tau(1 - \tau)^{\beta}} - \\ - \frac{1}{(1 - \tau)^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left(1 + \frac{\tau}{n} \frac{y'_n}{y_n} \right) \cos(2n\theta + \alpha_n). \quad (24)$$

Функции $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y'_n}{y_n}$, которые мы в дальнейшем изложении будем обозначать через x_n , играют важную роль в нашей задаче, так как через них выражаются характерные в различных вопросах постоянные. Некоторые свойства этих функций и приемы их вычисления, а также существенные для нас свойства функций z_n и y_n будут выяснены в следующей главе. Лишь ознакомившись со всеми этими свойствами, мы получим возможность обнаружить справедливость наших утверждений относительно основного ряда ψ , оставшихся недоказанными.

Глава II

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ z_n , y_n И x_n .
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РЯДОВ ψ И φ

Функция z_n есть тот из интегралов уравнения

$$\tau \frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{dz_n}{d\tau} = n^2 \frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{\beta+1}} z_n, \quad (25)$$

который не обращается в бесконечность при $\tau = 0$. Интеграл этот имеет вид

$$z_n = \tau^n y_n,$$

где $n > 0$ и y_n представляет собою гипергеометрическую функцию (21)

$$y_n = F(a_n, b_n, 2n+1, \tau).$$

Покажем прежде всего, что z_n не имеет действительных корней между значениями 0 и $1/(2\beta+1)$ переменного τ . Предположим обратное, и пусть $\tau = a$ есть наименьший положительный корень функции z_n . Так как z_n обращается в нуль также и при $\tau = 0$, то между значениями 0 и a должно существовать такое количество b , которое служит корнем уравнения

$$\frac{dz_n}{d\tau} = 0.$$

Таким образом, функция, стоящая под знаком дифференцирования в левой части уравнения (25), будет иметь корни

$$\tau = 0, \quad \tau = b,$$

а следовательно, производная ее должна обладать корнем $\tau = c$, причем $0 < c < b < a$. Ввиду того, что в правой части того же уравнения коэффициент z_n не может обратиться в нуль при

$$\tau < 1/(2\beta+1),$$

мы должны предположить, что $z_n(c) = 0$ и, стало быть, функция z_n должна иметь корень $\tau = c < a$. Повторяя то же рассуждение, мы придем к заключению, что на протяжении значений переменного от 0 до a должно заключаться бесчисленное множество корней функции z_n ; но в таком случае она не могла бы выражаться степенным рядом.

Из только что доказанного положения следует, что z_n есть функция возрастающая. В самом деле, так как $z'_n = dz_n/d\tau$ не имеет корней, меньших $1/(2\beta+1)$, то z_n должно изменяться все время в одном и том же смысле; так как оно положительно при весьма малом τ , то таков же знак его будет и для всякого значения переменного, заключенного в указанных пределах; таким образом, z_n возрастает при значениях τ , близких к нулю, а потому оно будет возрастать и далее, пока z'_n не переменит знака. Заметим,

что

$$z'_n = z_n \left(\frac{n}{\tau} + \frac{y'_n}{y_n} \right) = \frac{z_n n}{\tau} x_n;$$

отсюда заключаем, что при $0 < \tau < 1/(2\beta + 1)$, z_n больше 0, функции x_n корней не имеют и все время положительны, ибо в этих пределах $z'_n > 0$.

Обратимся теперь к функции y_n , голоморфному интегралу уравнения

$$y''_n \tau (1 - \tau) + y'_n [(2n + 1)(1 - \tau) + \beta\tau] + \beta n (2n + 1) y_n = 0, \quad (26)$$

или, что все равно, уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\tau^{2n+1}}{(1 - \tau)^3} y'_n + \beta n (2n + 1) \frac{\tau^{2n}}{(1 - \tau)^{3+1}} y_n = 0. \quad (27)$$

Из доказанной выше теоремы заключаем, что y_n не имеет корней между значениями τ , заключенными в рассматриваемых пределах. То же самое можно доказать и относительно всех последовательных производных этой функции. Прежде всего из уравнения (27) заключаем, что сказанное справедливо по отношению к функции y'_n ; в самом деле, раз существовал бы корень у этой функции, производная

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\tau^{2n+1}}{(1 - \tau)^3} y'_n$$

имела бы также корень; а это невозможно, потому что второе слагаемое в левой части уравнения (27) не может обращаться в нуль в пределах изменения τ . Продифференцировав m раз уравнение (26), получим

$$y_n^{(m+2)} \tau (1 - \tau) + y_n^{(m+1)} [(2n + m + 1)(1 - \tau) - (m - \beta)\tau] + + [(\beta n (2n + 1) - m (2n - \beta) - m^2) y_n^{(m)}] = 0$$

или, иначе,

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+m+1} (1 - \tau)^{m-\beta} y_n^{(m+1)} + [\beta n (2n + 1) - - m (2n - \beta) - m^2] \tau^{2n+m} (1 - \tau)^{m-\beta-1} y_n^{(m)} = 0.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и ранее, заключаем, что $y_n^{(m+1)}$ не может иметь корней в пределах изменения τ , если $y_n^{(m)}$ не имеет корней в этих пределах. Полагая $m = 1, 2, 3, \dots$, убедимся в справедливости нашего утверждения. Положив $\tau = 0$, имеем

$$y_n(0) = 1, \quad y'_n(0) = -\beta n,$$

$$y''_n(0) = \frac{\beta n}{2n+2} [\beta n (2n + 1) - 2n + \beta - 1],$$

$$y'''_n(0) = -\frac{\beta n}{2n+2} \frac{\beta n (2n + 1) - 2n + \beta - 1}{2n+3} [\beta n (2n + 1) - 4n + 2\beta - 4];$$

так как β приблизительно равно 2,5, а n — число положительное, то знаки приведенных количеств чередуются; то же будет и при всяком τ , удовлетворяющем неравенствам $0 < \tau < 1/(2\beta + 1)$. Таким образом, $y_n > 0$, $y'_n < 0$, $y''_n > 0$, $y'''_n < 0$, и количества y_n, y'_n, y''_n численно убывают.

Рассмотрим теперь функцию

$$s_n = \frac{y_n}{(1 - \tau)^m}.$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет эта функция, легко составляется по формуле (26) и имеет вид

$$(1 - \tau) \frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1 - \tau)^{2m-\beta} s'_n + \tau^{2n} (1 - \tau)^{2m-\beta} \times \\ \times \left[(\beta n - m)(2n + 1) + m(m - \beta - 1) \frac{\tau}{1 - \tau} \right] s_n = 0. \quad (28)$$

Положив $m = \beta n$, мы видим, что при $n > 1 + (1/\beta)$ количество, заключенное в квадратные скобки, сохраняет знак плюс каково бы ни было τ ¹. Если n — целое, то указанное обстоятельство имеет место для всякого $n \geq 2$; при $n = 1$ это количество будет иметь знак минус. Предположим пока, что $n > 1 + (1/\beta)$. Полагая $m = \mu\beta n$, при надлежащем выборе μ мы будем иметь в квадратных скобках количество, отрицательное при всяком τ , если оно отрицательно или равно нулю при наибольшем доступном для τ значении $1/(2\beta + 1)$. Для сего достаточно подобрать μ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$(1 - \mu)(2n + 1) + \frac{\mu}{2\beta} (\mu\beta n - \beta - 1) = 0,$$

или, по приведении,

$$\mu^2 n - 2\mu \left(2n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\beta} \right) + 2(2n + 1) = 0. \quad (29)$$

Наибольшее значение μ получает при весьма большом n (при $n = \infty$); в таком случае $\mu = 2$. Вообще $\mu < 2$; так, при $n = 2$, $\beta = 2,5$, $\mu = 1,083$; при $n = 3$, $\mu = 1,181$.

При указанном подборе количества m функция s'_n не может иметь отличного от нуля корня в пределах изменения τ ; в этом мы убеждаемся тем же рассуждением, которым неоднократно пользовались выше.

Заметим, что $s_n(0) = 1$, а из уравнения (28) получаем $s'_n(0) = m - \beta n$; при $m = \mu\beta n$ $s'_n(0) > 0$, и, следовательно, функция

$$\frac{y_n}{(1 - \tau)^{\mu\beta n}}$$

¹ При этом τ , разумеется, заключено в пределах 0 и $1/(2\beta + 1)$; это замечание надо иметь в виду и во всех последующих рассуждениях.

возрастает вместе с переменным и будет превышать единицу; если же $m = \beta n$, то $s_n(0) = 0$, но

$$s_n''(0) = -\beta n \frac{\beta n - \beta - 1}{2n + 2},$$

а это количество при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$ есть величина отрицательная; поэтому и $s_n(\tau)$, как функция убывающая, должна при $\tau > 0$ быть менее нуля; отсюда заключаем, что $y_n/(1 - \tau)^{\beta n}$ при $n > 1 + 1/\beta$ есть функция убывающая и представляет правильную дробь.

В случае $n < 1 + 1/\beta$ количество, заключенное в квадратные скобки в уравнении (28), будет < 0 при $m = \beta n$; $s_n'(0) = 0$, $s_n''(0) > 0$, а потому $s_n(\tau) > 0$ и $y_n/(1 - \tau)^{\beta n}$ будет представлять функцию возрастающую.

Меньший корень уравнения (29), назовем его просто μ , будет при этом меньше 1; легко убеждаемся, что если $m = \mu \beta n$ и

$$0 < \tau < \frac{1}{2\beta + 1},$$

то опять будет иметь место постоянство знака для не раз упоминавшегося коэффициента при s_n в уравнении (28); знак этот будет плюс. Поэтому получим $s_n(\tau) < 0$, ибо $s_n(0) < 0$, а следовательно, заключаем, что функция $y_n/(1 - \tau)^{\mu \beta n}$ убывает с возрастанием τ . Таким образом, для $n = 1$ имеем, например, $\mu = 0,93$ (β принято равным 2,5), и, следовательно, при возрастающем $y_1(1 - \tau)^{-\beta}$ функция $y_1(1 - \tau)^{-0,93}$ будет функцией убывающей.

Отмеченные свойства y_n дают предельные функции, между которыми это количество остается заключенным, именно:

$$\text{при } n > 1 + \frac{1}{\beta} \quad (1 - \tau)^{\beta n} > y_n > (1 - \tau)^{\mu \beta n},$$

$$\text{при } n < 1 + \frac{1}{\beta} \quad (1 - \tau)^{\beta n} < y_n < (1 - \tau)^{\mu \beta n},$$

где μ определяется уравнением (29) и равняется меньшему из его корней.

Отметим еще, что функция $\frac{y_n}{(1 - \tau)^{2\beta n}}$ возрастает а fortiori; в случае $n < 1 + (1/\beta)$ это очевидно; а при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$ на основании вышеуказанного ее можно рассматривать как произведение двух возрастающих функций $y_n/(1 - \tau)^{\mu \beta n}$ и $1/(1 - \tau)^{(2-\mu)\beta n}$; поэтому, если наибольшее значение, которое в данной задаче получает τ , мы обозначим через τ_0 и соответственное значение y_n через $y_{n,0}$, то будет справедливо неравенство

$$\frac{y_n(1 - \tau_0)^{2\beta n}}{y_{n,0}(1 - \tau)^{2\beta n}} < 1$$

или

$$\frac{y_n}{y_{n,0}} < \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_0} \right)^{2\beta n}. \quad (30)$$

Любопытно отметить, что функция y_n непременно будет иметь действительные корни в пределах изменения τ от его критического значения $1/(2\beta+1)$ до 1, если только указатель n достаточно велик; так, для функций с целыми указателями это справедливо при $n > 1$; число корней безгранично возрастает вместе с указателем. Эти результаты мы черпаем из статьи Портера². Уже отсюда легко заключить, что решения задач об истечении газа из сосуда и о сопротивлении воздуха движущейся пластинке, данные ниже в главах III и IV, неприменимы вне указанных в нашей работе границ вследствие расходимости рядов, выражающих функцию тока и потенциал скоростей.

Обратимся, наконец, к функции

$$x_n = 1 + \frac{\tau}{n} \frac{y'_n}{y_n},$$

от которой, как мы указали выше, зависит вычисление весьма важных постоянных в различных задачах интересующего нас типа. Составим прежде всего дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция x_n . Оно получится из гипергеометрического уравнения (26), если мы положим в нем

$$y_n = \exp \left(\int_0^\tau \frac{x_{n-1}}{\tau} n d\tau \right).$$

Таким образом, находим

$$x'_n \tau (1-\tau) + n x_n^2 (1-\tau) + x_n \beta \tau - n [1 - (2\beta+1)\tau] = 0. \quad (31)$$

Это уравнение вместе с условием $x_n(0) = 1$ вполне определяет функцию x_n . Выше уже было указано, что функция x_n при изменении переменного в рассматриваемых границах все время остается больше нуля. Покажем, что она убывает с возрастанием τ . Для сего дифференцируем уравнение (31); имеем

$$x''_n \tau (1-\tau) + x'_n [2n(1-\tau)x_n + (\beta-1)\tau + 1 - \tau] = n x_n^2 - x_n \beta - n(2\beta+1).$$

Заменив в квадратных скобках x_n его значением $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y'_n}{y_n}$ и умножив

² Porter J. On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions.— Amer. J. Math., 1899.

уравнение на $\tau^{2n} (1 - \tau)^{-\beta} y_n^2$, приводим его к виду

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1 - \tau)^{-\beta+1} y_n^2 x_n' = \frac{[n x_n^2 - x_n \beta - n(2\beta + 1)] \tau^{2n}}{(1 - \tau)^\beta} y_n^2.$$

Но $x_n < 1$, ибо $x_n - 1 = \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n}$ есть величина отрицательная на основании сказанного о знаках функции y_n и ее производной. Поэтому правая часть полученного уравнения есть знакпостоянное отрицательное количество; если бы x_n' равное $-\beta$ при $\tau = 0$, обладало корнем в пределах изменения τ , то функция

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1 - \tau)^{-\beta+1} y_n^2 x_n'$$

также обращалась бы в нуль при некотором значении τ , меньшем этого корня, что невозможно. Но x_n' , всюду конечное, как нетрудно убедиться, не может изменять знака иначе, как переходя через корень. Итак, x_n' остается меньшим нуля, и, следовательно, x_n убывает.

Обращаемся к отысканию функций, ограничивающих значения x_n . Для этого докажем следующую теорему: если, подставив в уравнение, определяющее x_n , голоморфную функцию k_n , мы получим в левой части знакпостоянную положительную величину, то $k_n > x_n$; знак неравенства будет обратный, если результат подстановки окажется менее нуля. При $\tau = 0$ функция k_n может равняться единице. Вычтем из предполагаемого неравенства

$$k_n' \tau (1 - \tau) + n k_n^2 (1 - \tau) + k_n \beta \tau - n [1 - (2\beta + 1) \tau] \geq 0 \quad (32)$$

уравнение (31); имеем

$$(k_n' - x_n') \tau (1 - \tau) + (k_n - x_n) [\beta \tau + n(1 - \tau)(k_n + x_n)] \geq 0.$$

Полагаем

$$k_n = 1 + \frac{\tau}{n} \frac{l_n'}{l_n}, \quad l_n = \exp \left(\int_0^\tau \frac{k_n - 1}{\tau} n d\tau \right) > 0;$$

тогда по замене в квадратных скобках последнего неравенства k_n и x_n их значениями через l_n и y_n и умножении его на положительный множитель $y_n l_n \tau^{2n-1} (1 - \tau)^{-\beta}$ получим

$$\frac{d}{d\tau} (k_n - x_n) \frac{\tau^{2n}}{(1 - \tau)^\beta} y_n l_n \geq 0;$$

интегрируя это неравенство в пределах от 0 до τ , получим

$$(k_n - x_n) \frac{\tau^{2n}}{(1 - \tau)^\beta} y_n l_n \geq 0,$$

откуда и вытекает искомое неравенство $k_n \geq x_n$.

Покажем теперь, как функцию x_n можно вычислить с любой точностью, изображая ее в виде непрерывной дроби. Введем в дифференциальное уравнение (31) новое независимое переменное s по формуле $s = \tau/(1 - \tau)$; при изменении τ от 0 до $1/(2\beta + 1)$ переменное s изменяется от 0 до $1/2\beta$. Дифференциальное уравнение для x_n будет таково:

$$x'_n s(1 + s) + x_n^2 s + nx_n^2 - n(1 - 2\beta s) = 0. \quad (33)$$

Из этого уравнения находим

$$x_n(0) = 1, \quad x_n(0) = -\beta.$$

Если какая-либо функция k_n удовлетворяет неравенству (32), то по подстановке в уравнение (33) будем иметь также

$$k'_n s(1 + s) + k_n^2 s + nk_n^2 - n(1 - 2\beta s) \geq 0, \quad (34)$$

откуда по-прежнему следует соотношение $k_n \geq x_n$ при $k_n(0) = 1$.

Изобразим уравнение (33) вместе с неравенством (34) в виде

$$x'_n s(1 + s) + x_n^2 s + nx_n^2 - n(1 - 2\beta s) \geq 0. \quad (35)$$

Эту формулу следует понимать так: если по подстановке какой-либо конечной в пределах изменения s функции, равной 1 при $s = 0$, мы получим нуль в левой части соотношения (35), то эта функция есть точное выражение x_n ; если в результате подстановки получится положительное количество, то подставленная функция все время более x_n ; в противном случае имеем обратное неравенство.

Положим

$$x_n = 1 - \frac{\beta s}{1 - c^{(n)}_s}, \quad (36)$$

где $c^{(n)}$ — новая, подлежащая определению функция. После приведений и изменения знака будем иметь из формулы (35)

$$c^{(n)}_s(1 + s) + c^{(n)}(2n + 2 - \beta s) - (2n + 1)c^{(n)2}_s - n\beta + \beta + 1 \leq 0;$$

знак неравенства пришлось при этом изменить на обратный; смысл его таков: если после подстановки в левую часть какой-либо функции вместо $c^{(n)}$ мы получим в результате величину отрицательную, то, заменив в формуле (36) функцию $c^{(n)}$ этим ее значением, мы найдем *верхнюю граничную функцию* x_n , т. е. функцию, превышающую x_n .

Положим, далее,

$$c^{(n)} = \frac{c^{(n)}_0}{1 - \partial^{(n)}_s},$$

где

$$c^{(n)}_0 = c^{(n)}(0) = \frac{\beta}{2} - \frac{2\beta + 1}{2n + 2};$$

функция ∂ должна удовлетворять соотношению

$$\partial^{(n)'} s (1 + s) + \partial^{(n)} [2n + 3 + (\beta + 1) s] - \\ - \partial^{(n)2} s (2n + 2) - (2n + 1) c_0^{(n)} - \beta \leq 0. \quad (37)$$

Отсюда имеем

$$\partial_0^{(n)} = \partial^{(n)}(0) = \frac{\beta}{2} + \frac{2\beta + 1}{2n + 2} - 2 \frac{2\beta + 1}{2n + 3}.$$

Полагая затем последовательно

$$c_1^{(n)} = \frac{c_{1,0}^{(n)}}{1 - \partial_1^{(n)} s}, \quad c_2^{(n)} = \frac{c_{2,0}^{(n)}}{1 - \partial_2^{(n)} s}, \\ \partial^{(n)} = \frac{\partial_0^{(n)}}{1 - c_1^{(n)} s}, \quad \partial_1^{(n)} = \frac{\partial_{1,0}^{(n)}}{1 - c_2^{(n)} s}, \quad \partial_2^{(n)} = \frac{\partial_{2,0}^{(n)}}{1 - c_3^{(n)} s}, \dots,$$

мы будем иметь для определения $c_1, \partial_1, c_2, \partial_2$ соотношения

$$c_1^{(n)'} s (1 + s) + c_1^{(n)} (2n + 4 - \beta s) - (2n + 3) c_1^{(n)2} s - \partial_0^{(n)} (2n + 2) + \beta + 1 \leq 0, \\ \partial_1^{(n)'} s (1 + s) + \partial_1^{(n)} [2n + 5 + (\beta + 1) s] - (2n + 4) \partial_1^{(n)2} s - c_{1,0}^{(n)} (2n + 3) - \beta \leq 0, \\ c_2^{(n)'} s (1 + s) + c_2^{(n)} (2n + 6 - \beta s) - (2n + 5) c_2^{(n)2} s - \partial_{1,0}^{(n)} (2n + 4) + \beta + 1 \leq 0, \\ \partial_2^{(n)'} s (1 + s) + \partial_2^{(n)} [2n + 7 + (\beta + 1) s] - (2n + 6) \partial_2^{(n)2} s - c_{2,0}^{(n)} (2n + 5) - \beta \leq 0.$$

Кроме того, имеем

$$c_{1,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + 2 \frac{2\beta + 1}{2n + 3} - 4 \frac{2\beta + 1}{2n + 4}, \\ \partial_{1,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + 4 \frac{2\beta + 1}{2n + 4} - 6 \frac{2\beta + 1}{2n + 5}, \\ c_{2,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + 6 \frac{2\beta + 1}{2n + 5} - 9 \frac{2\beta + 1}{2n + 6}, \\ \partial_{2,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + 9 \frac{2\beta + 1}{2n + 6} - 12 \frac{2\beta + 1}{2n + 7}, \\ \dots \dots \dots$$

По этим формулам нетрудно составить уравнения для определения $c_m^{(u)}$, $\partial_m^{(n)}$ и формулы для $c_{m,0}^{(n)}$, $\partial_{m,0}^{(n)}$. Эти последние имеют вид

$$c_{m,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + m(m+1) \frac{2\beta + 1}{2n + 2m + 1} - (m+1)^2 \frac{2\beta + 1}{2n + 2m + 2}, \\ \partial_{m,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} + (m+1)^2 \frac{2\beta + 1}{2n + 2m + 2} - (m+1)(m+2) \frac{2\beta + 1}{2n + 2m + 3}$$

или по приведении

$$\begin{aligned} c_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{(m+1)(2n+m+1)}{(2n+2m+1)(2n+2m+2)}, \\ \partial_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{(m+1)(2n+m+1)}{(2n+2m+2)(2n+2m+3)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнения же, определяющие c_m и ∂_m , таковы:

$$\begin{aligned} c_m^{(n)} s(1+s) + c_m^{(n)} (2n+2m+2-\beta s) - \\ - (2n+2m+1) c_m^{(n)s} - \partial_{m-1,0}^{(n)} (2n+2m) + \beta + 1 \leq 0, \\ \partial_m^{(n)} s(1+s) + \partial_m^{(n)} [2n+2m+3+(\beta+1)s] - \\ - (2n+2m+2) \partial_m^{(n)s} - c_{m,0}^{(n)} (2n+2m+1) - \beta \leq 0. \end{aligned}$$

Все эти формулы легко проверяются методом перехода от m к $m+1$.

Знак «меньше» в последнем из этих соотношений остается справедливым до тех пор, пока значок m не превзойдет некоторого предельного значения, именно пока $c_{m,0}^{(n)}$ положительно; если $c_{m,0}^{(n)} < 0$, то в соотношении для $\partial_m^{(n)}$ знак «меньше» должен быть заменен через знак «больше». Это потому, что среди упрощений, которые были произведены при преобразовании означенного соотношения, имело место сокращение на $c_{m,0}^{(n)}$.

Собирая результаты, окончательно выразим x_n формулой

$$x_n = 1 - \frac{\beta s}{1} - \frac{c_0^{(n)} s}{1} - \frac{\partial_0^{(n)} s}{1} - \frac{c_{1,0}^{(n)} s}{1} - \frac{\partial_{1,0}^{(n)} s}{1} - \dots, \quad (39)$$

где $c_{m,0}^{(n)}$ и $\partial_{m,0}^{(n)}$ выражаются формулами (38).

Обратим теперь внимание на величины $c_{m,0}^{(n)}$, $\partial_{m,0}^{(n)}$. Нетрудно видеть, что они всегда заключены между $\beta/2$ и $-\lambda$; первая из этих величин получится при n весьма большом ($n = \infty$); вторая вообще мало отличается от $-1/2$ и получится, если мы будем искать минимум выражения

$$c_{k-1,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} - \frac{(2\beta+1)k(2n+k)}{2(2n+2k-1)(n+k)}$$

в зависимости от изменения k . Этот минимум имеет место либо при

$$k = E(n\sqrt{4n^2-1}) + n(2n-1),$$

либо при

$$k = E(n\sqrt{4n^2-1}) + n(2n-1) + 1$$

[где E есть символ наибольшего целого числа, содержащегося в выражении в скобках]; эти значения при n целом равны $4n^2 - n - 1$ и $4n^2 - n$.

Коэффициенты при $(2\beta + 1)/2$ в формуле для $c_{k-1,0}^{(n)}$ получают соответственно значения

$$2 - \frac{1}{\frac{2n^2 - 1}{(4n^2 - n - 1)(4n^2 - 1 + n)}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{16n^2 - 1} \right)};$$

из этих величин вторая больше первой. Таким образом, наименьшее значение $c_{k-1,0}^{(n)}$ есть

$$\frac{\beta}{2} - \frac{2\beta + 1}{4 \left(1 - \frac{1}{16n^2 - 1} \right)}.$$

Легко, далее, убедиться, что непрерывная дробь (39) всегда представляется сходящейся. Противоположное явление могло бы быть лишь в том случае, если бы выражение

$$\frac{c_0^{(n)} s}{1} - \frac{\partial_0^{(n)} s}{1} - \frac{c_{1,0}^{(n)} s}{1} - \dots$$

стремилось к единице. Но даже в самом неблагоприятном случае, при $n = \infty$, это количество обращается в

$$\frac{1/2 \beta s}{1} - \frac{1/2 \beta s}{1} - \frac{1/2 \beta s}{1} - \dots,$$

и наибольшая его величина, получающаяся при наибольшем возможном значении $s = 1/2\beta$, есть

$$\frac{1/4}{1} - \frac{1/4}{1} - \frac{1/4}{1} - \dots = 1/2.$$

Что касается знаков коэффициентов c и ∂ (для простоты письма опускаем значки), то те из них, для которых $m = 0, 1, 2, \dots$, до некоторого предельного значения будут положительны, все остальные отрицательны, если только n имеет конечную величину. Граничное значение $1 + m$ получится из неравенства

$$\frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{k(2n + k)}{(2n + 2k - 1)(2n + 2k)} < 0$$

или по приведении

$$k^2 + (2n + \beta)k - \beta n(2n - 1) > 0;$$

это неравенство выполнится, как только $m + 1 = k$ превысит больший из корней уравнения

$$\sigma^2 + (2n + \beta)\sigma - \beta n(2n - 1) = 0;$$

граничное значение m будет поэтому выражаться формулой

$$m = E \left\{ -n - \frac{\beta}{2} + \sqrt{n^2 (2\beta + 1) + \frac{\beta^2}{4}} \right\}.$$

Ограничиваясь целым n , мы будем иметь следующие граничные m и $c_{m,0}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} n=1, \quad m=0, \quad c_{0,0}^{(1)} &= -\frac{1}{4}, \\ n=2, \quad m=1, \quad c_{1,0}^{(2)} &= -\frac{1}{28}, \\ n=3, \quad m=3, \quad c_{3,0}^{(3)} &= -\frac{17}{4 \cdot 7 \cdot 13}, \\ n=4, \quad m=4, \quad c_{4,0}^{(3)} &= -\frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 7}, \end{aligned} \quad \beta = 2,5;$$

m , как и должно быть, возрастает вместе с n . Что касается $\partial_{m,0}^{(n)}$, то оно также делается отрицательным, но при больших значениях m ; для того чтобы $\partial_{m,0}^{(n)}$ было менее нуля, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{k(2n + k)}{(2n + 2k + 1)(2n + 2k)} < 0,$$

или

$$k^2 + (2n - \beta)k - \beta n(2n + 1) > 0;$$

обозначим граничное m через m_1 ; выразится оно формулой

$$m_1 = E \left\{ -n + \frac{\beta}{2} + \sqrt{n^2 (2\beta + 1) + \frac{\beta^2}{4}} \right\}.$$

Но если $p > q$ и

$$p = E(p) + \theta, \quad q = E(q) + \phi,$$

где θ и ϕ — правильные дроби, то

$$p - q = E(p) - E(q) + \theta - \phi;$$

таким образом,

$$E(p - q) = E(p) - E(q)$$

или

$$E(p - q) = E(p) - E(q) - 1.$$

Поэтому, сравнивая найденные значения m_1 и граничного m , убеждаемся, что m_1 будет равно граничному m для коэффициента $c_{m,0}^{(n)}$ плюс $E(\beta)$ или плюс $E(\beta) + 1$. Так, например, имеем

$$\begin{aligned} n=1, \quad m_1=2, \quad \partial_{2,0}^{(1)} &= 0, \\ n=2, \quad m_1=4, \quad \partial_{4,0}^{(2)} &= -\frac{1}{28}, \\ n=3, \quad m_1=5, \quad \partial_{5,0}^{(3)} &= -\frac{1}{76}, \\ n=4, \quad m_1=7, \quad \partial_{7,0}^{(4)} &= -\frac{3}{100}, \end{aligned} \quad \beta = 2,5. \quad (40)$$

Все коэффициенты $c_{m,0}^{(n)}$, начиная с того, который соответствует граничному значению указателя m , точно так же, как и все $\partial_{m,0}^{(n)}$, для $m \geq m_1$ суть количества отрицательные, и *остаточная часть* непрерывной дроби

$$1 - \frac{\partial_{m_1,0}^{(n)}}{1} - \frac{c_{m_1+1,0}^{(n)}}{1 - \dots}$$

представляется в обычной форме

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{b}{1} + \frac{c}{1} + \dots;$$

ее числовое значение заключено между $1 + a$ и $1 + \frac{a}{1+b}$.

Из функций x_n особенно простой оказывается x_1 , которая при принятом значении β представится как частное двух многочленов третьей степени. Для $n = 1$ имеем (40)

$$\begin{aligned} c_0^{(1)} &= -\frac{1}{4}, & \partial_0^{(1)} &= \frac{7}{20}, \\ c_{1,0}^{(1)} &= -\frac{7}{20}, & \partial_{1,0}^{(1)} &= \frac{3}{28}, \\ c_{2,0}^{(1)} &= -\frac{5}{14}, & \partial_{2,0}^{(1)} &= 0; \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 - \frac{\frac{5s}{2}}{1} + \frac{\frac{s}{4}}{1} - \frac{\frac{7s}{10}}{1} + \frac{\frac{7s}{20}}{1} - \frac{\frac{3s}{28}}{1 + \frac{5s}{14}}$$

или по приведении

$$x_1 = \frac{32 - 64s - 14s^2 - 2s^3}{(4 + s)(s^2 + 2s + 8)}. \quad (41)$$

Имея эту формулу, легко найдем y_1 ; для этого введем прежние переменное $\tau = s/(1 + s)$; получим

$$x_1 = 1 + \tau \frac{y_1'}{y_1} = \frac{32 - 160\tau + 210\tau^2 - 84\tau^3}{32 - 80\tau + 70\tau^2 - 21\tau^3},$$

откуда, приняв в расчет, что $y_1(0) = 1$, получим

$$32y_1 = (4 - 3\tau)(8 - 14\tau + 7\tau^2).$$

Указанное упрощение имеет место лишь вследствие принятых нами округленных значений для γ и β , а именно $\gamma = 1,40$ и $\beta = 2,5$; более точная величина γ для атмосферного воздуха есть $\gamma = 1,4025$, и, следовательно,

β несколько менее 2,5; в таком случае все x_n выражаются бесконечными непрерывными дробями.

В приложениях пользоваться точными формулами для x_n оказывается невозможным, так как это создает весьма большие трудности, преодолеть которые нам не удалось. Но зато, употребляя даже простейшие подходящие дроби, мы получаем x_n с довольно значительной точностью. Вполне удовлетворительные результаты получаются уже в том случае, если мы удовольствуемся третьей подходящей дробью и будем выражать x_n так:

$$x_n = 1 - \frac{\beta s}{1 - \frac{c_0^{(n)} s}{1 - \partial_0^{(n)} s}}, \quad (42)$$

или по приведении и вставке значений коэффициентов

$$x_n = 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (2n + 3) (3n - \beta - 1)}{(2n + 2) [2\alpha + 3 - (2\beta n - \beta - 2) s]}. \quad (43)$$

Ошибка при таком исчислении x_n тем более значительна, чем больше величина s . Ограничиваясь предположением n целых, оценим величину этой ошибки. При $n = 1$ мы имеем точное значение x_n и можем произвести непосредственное сравнение результатов вычисления этой функции по формулам (41) и (43). Сделаем подсчет для s максимального, равного $1/2\beta$, т. е. для $s = 0,2$, принимая по-прежнему $\beta = 2,5$. При этом точное значение x_1 будет $x_1 = \frac{776}{1477} = 0,5253893$. По формуле (43) имеем $x_1 = 0,525510$; разность приблизительно равна 0,00012.

При других значениях указателя n для оценки погрешности приходится поступать иначе. Заметим прежде всего, что для всех $n > 2$ формула (42) дает функцию, большую x_n ; обратное имеет место при $n = 2$. Чтобы в этом убедиться, обратим внимание на уравнение (37), определяющее $\partial^{(n)}$; это уравнение можно написать так:

$$\partial^{(n)} s (1 + s) + \partial^{(n)} [2n + 3 + (\beta + 1) s] - \partial^{(n)^2} s (2n + 2) - (2n + 3) \partial_0^{(n)} = 0.$$

Вставим в левую часть $\partial_0^{(n)}$ вместо $\partial^{(n)}$; имеем

$$\partial_0^{(n)} s [\beta + 1 - (2n + 2) \partial_0^{(n)}]$$

или по замене в скобках $\partial_0^{(n)}$ его значением по формулам (38)

$$\partial_0^{(n)} s \left[1 - \beta n + \frac{(2\beta + 1) (2n + 1)}{2n + 3} \right] = \partial_0^{(n)^2} s \left[2 - \beta (n - 2) - \frac{2(2\beta + 1)}{2n + 3} \right].$$

При $n > 2$ эта величина будет отрицательна; а отсюда, как было сказано выше, надобно заключить, что по вставке в формулу x_n вместо $\partial^{(n)}$ испытываемого его значения мы получим функцию, большую x_n ; при $n = 2$ мы,

напротив, имеем в квадратных скобках количество

$$2 - 2 \frac{2\beta + 1}{7} > 0,$$

что и доказывает правильность обратного неравенства при значении указателя $n = 2$ (x_2 больше того, что получится по замене $\partial^{(2)}$ через $\partial_0^{(2)}$ в формуле для x_2). Что касается до x_2 , то низшая граничная функция будет следующая подходящая дробь. Таким образом,

$$1 - \beta s - \frac{\beta s^2 c_0^{(2)}}{1 - (c_0^{(2)} + \partial_0^{(2)}) s} < x_2 < 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 c_0^{(2)}}{1 - (c_0^{(2)} + \partial_0^{(2)}) s - \frac{\partial_0^{(2)} c_{1,0}^{(2)}}{1 - c_{1,0}^{(2)} s} s^2};$$

вычисляя значения ограничивающих функций для случая наибольшего расхождения их значений, когда $s = \frac{1}{2\beta} = 0,2$, имеем

$$0,47034 < x_2 \cdot 0,2 < 0,47037.$$

В случае $n > 2$ получаем в уравнении

$$\partial^{(n)} = \frac{\partial_0^{(n)}}{1 - ks},$$

где k — постоянное, подлежащее определению, и подбираем k так, чтобы результат подстановки был более нуля при $0 < s < \frac{1}{2\beta}$. Это требование приведет нас к неравенству

$$k(2n + 4 - \beta s) - k^2 s(2n + 3) - (2n + 4) c_{1,0}^{(n)} \geq 0.$$

Меньший корень левой части этого неравенства выражается формулой

$$\frac{n + 2 - \frac{\beta s}{2} - \sqrt{(n + 2)(1 - 2\beta s) + 4s(n + 1)(2\beta + 1) + \frac{\beta^2 s^2}{4}}}{(2n + 3)s};$$

наибольшее его значение соответствует $s = 1/2\beta = 0,2$ и равно

$$5 \frac{n + 1,75 - \sqrt{\frac{24(n + 1)}{5} + \frac{1}{16}}}{2n + 3}. \quad (44)$$

Если мы примем k равным этой величине, то вышеприведенное неравенство будет выполнено.

Теперь мы имеем возможность указать пределы, в которых заключается x_n ; высший выражается формулой (42), низший получается заменой в этой формуле величины $\partial_0^{(n)}$ через $\frac{\partial_0^{(n)}}{1 - ks}$.

Совершив все приведения, будем иметь окончательно

$$1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (\beta n - \beta - 1)}{(2n + 2) \left(1 - \frac{2\beta n - \beta - 2}{2n + 3} s\right)} > x_n > \\ > 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (\beta n - \beta - 1)}{(2n + 2) \left(1 - \frac{2\beta n - \beta - 2}{2n + 3} s - \lambda s^2\right)},$$

где $\lambda = \frac{k\partial_0}{1 - ks}$, $\partial_0 = \frac{\beta}{2} - \frac{(2\beta + 1)(2n + 1)}{(2n + 2)(2n + 3)}$, а k определяется формулой (44). Укажем при $s = 0,2$ числовые величины граничных функций для x_n при $n = 3, 4, 5$ и 6 :

$$\begin{aligned} 0,4348 &> x_3 \cdot 0,2 > 0,4343, \\ 0,4095 &> x_4 \cdot 0,2 > 0,4073, \\ 0,3905 &> x_5 \cdot 0,2 > 0,3872, \\ 0,3755 &> x_6 \cdot 0,2 > 0,3704. \end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что ошибка возрастает, или, точнее говоря, может возрастать вместе с указателем, но тем не менее для малых указателей она невелика. При n сколько-нибудь значительном пределы ошибки расширяются. Так,

$$\begin{aligned} \text{при } n = 12 \quad 0,326 &> x_{12} \cdot 0,2 > 0,308, \\ \text{при } n = 24 \quad 0,293 &> x_{24} \cdot 0,2 > 0,251. \end{aligned}$$

Это невыгодное обстоятельство при вычислениях, которые нам придется совершать, парализуется, однако же, до известной степени тем, что функции x_n с большими указателями входят в удаленные члены ряда; коэффициенты же таких членов сравнительно малы.

Укажем еще граничные функции для x_n с большими указателями. Эти функции будут полезны при вычислении пределов, в которых заключаются остаточные члены рядов, разрешающих задачи о газовых струях. Для этой цели опять обращаемся к дифференциальному уравнению, определяющему x_n :

$$x'_n s (1 + s) + x_n \beta s + n x_n^2 - n (1 - 2\beta s) = 0.$$

Подставим в левую часть выражение $\sqrt{1 - 2\beta s + 2us^2}$ и подберем функцию u так, чтобы результат подстановки был более нуля, тогда по доказанной выше теореме будем иметь

$$\sqrt{1 - 2\beta s + 2us^2} > x_n.$$

Эта подстановка дает в левой части уравнения для x_n выражение

$$k = \frac{u's(1+s) + 2u[1 + (1+\beta)s] - \beta(1+2\beta) + 2nu\sqrt{1-2\beta s + 2us^2}}{\sqrt{1-2\beta s + 2us^2}} s^2;$$

оно, как легко видеть, будет более нуля, если мы положим

$$u = \beta \sqrt[3]{\frac{\beta(1+2\beta)^2}{2n^2}} = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{45}{n^2}};$$

в самом деле, при таком значении u корень $\sqrt{1-2\beta s+2us^2}$ есть убывающая функция s ; произведение же этого корня на $2nu$ при наибольшем возможном значении переменного $s = 1/2\beta$ равно $(1+2\beta)\beta$, и, следовательно, количество k остается при этом положительным. С другой стороны, оно окажется отрицательным, каково бы ни было s , если

$$u = \frac{\beta(1+2\beta)}{2n+2},$$

так как числитель формулы для k в таком случае равен нулю при $s = 0$ и, как функция убывающая, будет менее нуля при $s > 0$. Таким образом, имеем

$$\sqrt{1-2\beta s+2\beta s^2} \sqrt[3]{\frac{\beta(1+2\beta)^2}{2n^2}} > x_n > \sqrt{1-2\beta s+\frac{\beta s^2(1+2\beta)}{n+1}}. \quad (45)$$

Несколько повышая верхнюю границу функции x_n , мы можем также изобразить первую часть найденного нами двойного неравенства в форме

$$\sqrt{1-2\beta s} + \sqrt[3]{\frac{2\beta^2(1+2\beta)}{n}} s > x_n,$$

и, следовательно, x_n выразить формулой

$$x_n = \sqrt{1-2\beta s} + \lambda s \sqrt[3]{\frac{2\beta^2(1+2\beta)}{n}}, \quad (46)$$

где λ — правильная дробь.

Легко доказать, что x_n при одном и том же значении переменного уменьшается с возрастанием указателя n . Это явствует из уравнения для x_{n+m} :

$$x'_{n+m}s(1+s) + x_{n+m}\beta s + (n+m)x_{n+m}^2 - (n+m)(1-2\beta s) = 0;$$

подставив в левую часть x_n вместо x_{n+m} , получим на основании уравнения для x_n , $m[x_n^2 - (1-2\beta s)]$, т. е. величину, большую нуля, вследствие неравенств (45), а потому заключаем, что

$$x_n > x_{n+m}, \quad (47)$$

каково бы ни было положительное число m .

Покончив на этом с исследованием важных для последующего свойств функции x_n , отметим еще два неравенства, которым удовлетворяют функции y_n . Первое из этих неравенств выводим следующим образом: составим

дифференциальное уравнение, определяющее $\eta_n = \frac{y'_n}{y_n}$; оно будет

$$(\eta'_n + \eta_n^2) \tau (1 - \tau) + [(2n + 1)(1 - \tau) + \beta \tau] \eta_n + \beta n (2n + 1) = 0.$$

Положив далее

$$\eta_n = \xi_n - \frac{2\beta n}{1 - \tau},$$

имеем

$$(\xi'_n + \xi_n^2) \tau (1 - \tau) + [(2n + 1)(1 - \tau) - \beta(4n - 1) \tau] \xi_n - \beta n (2n + 1) + \frac{2\beta n \tau}{1 - \tau} (2\beta n - \beta - 1) = 0. \quad (48)$$

К этому уравнению, как нетрудно убедиться, приложима теорема, доказанная нами для уравнения (35), характеризующего функцию x_n : если при замене ξ_n какой-нибудь голоморфной функцией мы найдем в левой части выражение, большее нуля, то подставленное выражение будет более ξ_n . Подставив $2\beta n$, получаем как раз такой результат, а стало быть, $\xi_n < 2\beta n$. Подставим далее в уравнение, определяющее ξ_{n+m} , на место ξ_{n+m} функцию ξ_n . Результат подстановки на основании уравнения (48), которому удовлетворяет ξ_n , приведет к

$$m \frac{1 - (2\beta + 1) \tau}{1 - \tau} [2\xi_n (1 - \tau) - \beta(4n + 1) - 2\beta m] - \frac{(2\beta + 1) 2\beta m \tau}{1 - \tau}.$$

Это выражение отрицательно при всяком τ , ибо оно дает результат, меньший нуля, даже при замене ξ_n большим его количеством $2\beta n$. Поэтому

$$\xi_n < \xi_{n+m}$$

или, иначе,

$$\frac{y'_n}{y_n} + \frac{2\beta n}{1 - \tau} < \frac{y'_{n+m}}{y_{n+m}} + \frac{2\beta(n + m)}{1 - \tau}.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от τ до τ_0 и переходя от логарифмов к числам, найдем

$$\frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau} \right)^{2\beta n} > \frac{y_{n+m}}{y_{n+m,0}} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau} \right)^{2\beta(n+m)},$$

где $y_{n,0}$ по принятому способу обозначает $y_n(\tau_0)$. Таким образом, функция $\frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau} \right)^{2\beta n}$ убывает с возрастанием индекса.

Второе неравенство, которое мы имели в виду вывести, вытекает из соотношения (47). Из этого соотношения выводим неравенство

$$\frac{y'_n}{y_n} > \frac{y'_{n+m}}{y_{n+m}};$$

интегрируя его в пределах s и s_0 , имеем по переходе от логарифмов к числам

$$\frac{y_n}{y_{n,0}} < \frac{y_{n+m}}{y_{n+m,0}}.$$

Таким образом, частное $y_n/y_{n,0}$ возрастает с возрастанием индекса.

Переходим к *доказательству сходимости рядов*, в которых разрешаются задачи о газовых струях. Излагая общий прием решения этого рода задач, мы пришли (см. гл. I) к следующим формулам для выражения функции тока и потенциала скоростей:

$$\psi = B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\varphi = \frac{B}{(1-\tau)^\beta} - \frac{B}{2} \int \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^\beta} - \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos(2n\theta + \alpha_n).$$

Это формулы (23) и (24) главы I. Указатели n , в них входящие, возрастают как члены арифметической прогрессии. Докажем, что приведенные ряды сходятся абсолютно и равномерно при всяком $\tau < \tau_0$, если это имеет место относительно рядов

$$\psi_1 = B\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\varphi_1 = B - \frac{B}{2} \int \frac{d\tau}{\tau} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \cos(2n\theta + \alpha_n),$$

выражающих функцию тока и потенциал скоростей для той же задачи в случае несжимаемой жидкости. Ряды ψ_1 и φ_1 будут, очевидно, абсолютно сходящимися, как только

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n_1}}{B_n} < 1,$$

где n и n_1 — два последовательных значения указателя. Предположим, что это условие выполнено. Тогда на основании соотношения (30) мы можем утверждать, что члены ряда ψ соответственно менее членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \left\{ \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}} \right\}^n; \quad (49)$$

а это — ряд, абсолютно сходящийся при $\tau < \tau_0$, если $\tau_0 < 1/(2\beta + 1)$, ибо в таком случае

$$\frac{d}{d\tau} \tau(1-\tau)^{2\beta} = [1 - (2\beta + 1)\tau](1-\tau)^{2\beta-1} > 0,$$

и, следовательно, $\frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}}$ представляет собой правильную дробь. Остаточный член ряда ψ , т. е.

$$R_n = \sum_{n=n}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

численно менее остаточного члена R'_n ряда (49), т. е.

$$R'_n = \sum_{n=n}^{\infty} |B_n| \left\{ \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}} \right\}^n;$$

но R'_n стремится к нулю с возрастанием n , каково бы ни было τ , меньшее τ_0 . Отсюда мы заключаем, что ряд ψ *сходится равномерно*.

Так как ряд, входящий в состав функции ϕ , отличается от рассмотренного заменой синусов через косинусы и умножением последовательных членов на ряд убывающих положительных количеств, то доказанные теоремы имеют место и для ряда ϕ . Легко, далее, видеть, что теми же свойствами обладают производные по θ от функций ϕ и ψ , а следовательно, и производные их по τ , так как последние с первыми связаны линейными соотношениями (14) главы I. Следствием этих теорем является непрерывность функций ϕ и ψ и их производных внутри³ рассматриваемой области переменных τ , θ .

Докажем, наконец, что *при стремлении τ к предельному значению τ_0 ряды ϕ и ψ стремятся к пределу, который представляет собой значения этих рядов, получаемые ими при замене τ через τ_0* . Рассмотрим для этого суммы σ и σ' членов, следующих за n -м в рядах ϕ и ψ . Пусть $n_1, n_2, \dots, n_p$ — последовательные значения указателя; тогда, обозначив дроби

$$\frac{\tau}{\tau_0} \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_0} \right)^{2\beta}, \quad \frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau} \right)^{2\beta n}$$

соответственно через ξ и η_n , мы можем изобразить означенные суммы в виде

$$\sigma = - \frac{1}{(1-\tau)^{\beta}} \sum_{n=n_1}^{n_p} B_n \xi^n \eta_n x_n \cos(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\sigma' = \sum_{n=n_1}^{n_p} B_n \xi^n \eta_n \sin(2n\theta + \alpha_n).$$

Обозначим засим через u_n и u'_n выражения

$$B_n \xi^n \cos(2n\theta + \alpha_n), \quad B_n \xi^n \sin(2n\theta + \alpha_n).$$

³ Jordan. Cours d'analyse, т. I, стр. 310 и след.

Ряды $\sum u_n$ и $\sum u'_n$ равномерно сходятся при всяком ξ , меньшем единицы, так как они совпадают с рядами, входящими в состав функций φ_1 и ψ_1 ; предположим, что они сходятся и при $\xi = 1$; тогда по известной теореме анализа значения их при $\xi = 1$ суть пределы, к которым они стремятся при стремлении ξ к пределу 1 (и, следовательно, τ к τ_0). Но в таком случае указателю n можно придать всегда столь большое значение, чтобы суммы

$$u_{n_1}, u_{n_1} + u_{n_2}, u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3}, \dots, u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_p}$$

были заключены между сколько угодно малыми численно величинами ε и δ , каково бы ни было меньшее или равное единице количество ξ . А так как на основании исследованных в этой главе свойств функций x_n, y_n входящие в выражения σ и σ' количества η_n, x_n более нуля и убывают с возрастанием указателя, то по теореме Абеля σ заключено между пределами

$$-\frac{\delta \eta_{n_1}}{(1-\tau)^\beta} \quad \text{и} \quad -\frac{\varepsilon \eta_{n_1}}{(1-\tau)^\beta}.$$

По тем же причинам σ' оказывается заключенным между другими сколько угодно малыми численно пределами. А раз это так, то желаемое доказано.

В результате всех обнаруженных нами свойств рядов φ и ψ мы приходим к заключению, которое было целью наших изысканий: *найденными формулами действительно разрешаются поставленные задачи о течении газов.*

Глава III

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ БЕСКОНЕЧНО ШИРОКОГО СОСУДА

Приложим описанную методу к задаче об истечении газа из бесконечного сосуда с плоскими стенками, причем остановимся на том простейшем случае, когда одна стенка служит продолжением другой. Пусть мы имеем несжимаемую жидкость, вытекающую из такого сосуда; течение это изображено на рис. 4; AB и $A'B'$ — следы стенок сосуда, OX — след его плоскости симметрии, $BCC'B'$ — вытекающая струя. Если мы обозначим через Q количество вытекающей в секунду жидкости, через φ_1 и ψ_1 — соответственно потенциал скоростей и функцию тока и будем считать $\psi_1 = 0$ на оси OX , то в области течения φ_1 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а ψ_1 от $-Q/2$ до $+Q/2$. Свяжем комплексное переменное

$$w = \varphi_1 + i\psi_1$$

с другим комплексным переменным u соотношением¹

$$w = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{u}{ci}.$$

Области переменного w при этом соответствует верхняя полуплоскость области u . Обозначим далее через ϑ логарифм отношения скоростей v_0/v на струе и в рассматриваемой точке жидкости, через θ — угол скорости с осью OX ; тогда задача разрешается, если мы положим

$$\vartheta + i\theta = i \arcsin \frac{c}{u}.$$

В самом деле, на границе ABC $\psi_1 = -Q/2$, φ_1 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; при этом u проходит положительную часть действительной оси от 0 до ∞ ; $\theta = \pi/2$, $\infty > \vartheta > 0$, пока $0 < u < c$; $\vartheta = 0$, $v = v_0$, $\pi/2 > \theta > 0$ при $c < u < \infty$. На границе $A'B'C'$ $\psi_1 = Q/2$, φ_1 изменяется в тех же пределах; $\theta = -\pi/2$, $\infty > \vartheta > 0$ при $0 > u > -c$; $\vartheta = 0$, $v = v_0$, $-\pi/2 < \theta < 0$, если $-c > u > -\infty$. Точка $u = 0$ соответствует, таким образом, бесконечно удаленной части сосуда, где $\vartheta = \infty$, и скорость обращается в нуль; $u = \infty$ дает бесконечно далекую часть струи. Наконец, при $\theta = 0$ переменное u — чисто мнимое и $\psi_1 = 0$, и мы получаем среднюю линию тока, совпадающую с осью OX .

Из приведенных формул находим

$$w = -\frac{Q}{\pi} \ln \left(i \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} \right)$$

или, обозначив $\vartheta + i\theta$ через σ ,

$$w = -\frac{Q}{\pi} \ln i \sin \frac{\sigma}{i} = -\frac{Q}{\pi} \ln \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{2} = -\frac{Q}{\pi} (\sigma - \ln 2) - \frac{Q}{\pi} \ln (1 - e^{-2\sigma}); \quad (50)$$

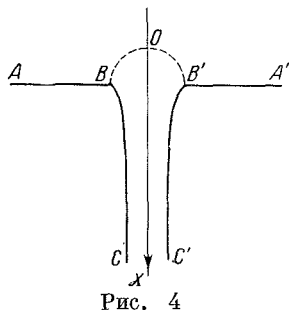
отметим, что $\varphi_1 = 0$ в точках схода струи со стенок; σ в этих точках имеет значения $\pm i\frac{\pi}{2}$.

Разлагая в ряд логарифм, входящий в формулу (50), получим

$$\pi \frac{\varphi_1 + i\psi_1}{Q} = \ln 2 - (\vartheta + i\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} (\cos 2n\theta - i \sin 2n\theta),$$

¹ См. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа. — Математический сборник, т. XV, 1890 [Избранные сочинения, т. I, Гостехиздат, 1948].

² В случае сосуда со сходящимися под углом стенками придется заменить в этой формуле σ через σ/q , а в последующих соотношениях ϑ через ϑ/q , θ через θ/q . Угол между стенками в таком случае будет равен $q\pi$.



откуда

$$\frac{\pi}{Q} \psi_1 = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\theta}}{n} \sin 2n\theta.$$

Введем в эту формулу наше переменное τ , определяемое равенством

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{v^2}{v_0^2} = e^{-2\theta};$$

получаем искомое выражение

$$\frac{\pi}{Q} \psi_1 = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin 2n\theta.$$

Так как этот ряд есть ряд абсолютно сходящийся, то по данной выше методе, применив формулу (23), приходим к выражению функции тока ψ , определяющей истечение газа из такого же сосуда; получим

$$\frac{\pi}{Q} \psi = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta.$$

Все линии $\psi = \text{const}$ в области (τ, θ) исходят из точки $\tau = 0$ и вновь собираются в точку $\tau = \tau_0$, $\theta = 0$. Потенциал скоростей по формуле (24) определится соотношением

$$\frac{\pi}{Q} \varphi = C + \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\tau (1-\tau)^\beta} - \frac{1}{(1-\tau)^\beta} + \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos 2n\theta.$$

Имея формулу для φ , нетрудно построить уравнение струи. По формулам (10) главы I имеем

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{2\tau\alpha}} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (1-\tau)^\beta \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\tau\alpha}} = \frac{\partial y}{\partial \varphi};$$

отсюда

$$\sqrt{2\tau\alpha} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Воспользовавшись формулами для φ и ψ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha} \frac{\partial y}{\partial \theta} = & - \frac{2}{(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \times \\ & \times (\cos 2n\theta \cos \theta + x_n \sin 2n\theta \sin \theta) - \frac{\cos \theta}{(1-\tau)^\beta}. \end{aligned}$$

Совершив интегрирование по θ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha} y = \Phi(\tau) - \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] + \\ + \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] - \frac{\sin\theta}{(1-\tau)^\beta}. \end{aligned}$$

Так как при $\theta = 0$ мы должны иметь $y = 0$, то $\Phi(\tau) = 0$. Таким образом, окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha} y (1-\tau)^\beta = -\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]. \quad (51) \end{aligned}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]$$

можно изобразить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \zeta_n \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right], \quad (52)$$

где

$$\xi = \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}} < 1, \quad \zeta_n = \frac{y_n(1-\tau_0)^{2\beta n}}{y_{n,0}(1-\tau)^{2\beta n}}.$$

По доказанной в конце предшествующей главы теореме ζ_n представляют ряд количеств, убывающих по мере возрастания индекса. Так как выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]$$

при стремлении ξ^n к 1, иначе говоря, при стремлении τ к совпадению с τ_0 , стремится к

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right],$$

то к тому же пределу приближается и входящая в состав формулы для

координат y более сложная сумма (52). Изобразив J в виде

$$J = -\sin \theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} &= \operatorname{Re} \lim_{t \rightarrow 0} 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(t+i\theta)}}{2n-1} = \\ &= \operatorname{Re} \lim_{t \rightarrow 0} i \ln \frac{1+e^{-t-i\theta}}{1-e^{-t-i\theta}} = \operatorname{Re} \left(i \ln \frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta} \right); \end{aligned}$$

знаком Re мы показываем, что надо взять действительную часть от рассматриваемого выражения. Легко видеть, что при непрерывном изменении θ от 0 до θ

$$\ln \frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta} = \ln \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} e^{-i \frac{\pi}{2}},$$

а потому

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \pm \frac{\pi}{2},$$

смотря по знаку³ θ ; таким образом,

$$J = \pm \frac{\pi}{2} - \sin \theta.$$

Ввиду важности полученного соотношения укажем более строгий способ его вывода. Исходим из равенства

$$\sum_{n=1}^m \cos (2n-1) \theta = \frac{\sin 2m \theta}{2 \sin \theta}.$$

Интегрируя его в пределах 0 и θ , находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} &= \int_0^{\theta} \frac{\sin 2m \theta}{2\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} &= \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Но этот предел, как известно, равен $\pi/2$, если θ положительно, и равен $-\pi/2$, если оно отрицательно⁴.

³ См. примечание [1] на стр. 431. (Прим. ред.)

⁴ Jordan. Cours d'analyse, т. II, стр. 233.

Отсюда

$$\begin{aligned} J &= -\sin \theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \\ &= -\sin \theta + 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \pm \frac{\pi}{2} - \sin \theta. \end{aligned}$$

Что касается второго ряда в формуле (51), то он стремится при $\tau \rightarrow \tau_0$ к выражению

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} - \frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} \right],$$

представляющему сходящийся ряд, каково бы ни было θ . Доказать это можно, рассматривая остаточный член этого ряда

$$R_n = \sum_{n=n}^{\infty} x_n \left[\frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} - \frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} \right].$$

Если мы подставим в эту формулу вместо x_n его выражение, определяемое равенством (46), то найдем

$$R_n = \sqrt{1-2\beta s} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt[3]{n}} \left[\frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} - \frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} \right],$$

где k — конечное число, λ_n — правильная дробь. Отсюда легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Полагая теперь $\tau = \tau_0$ в формуле для координаты y , приходим к уравнению границы струи

$$\sqrt{2\alpha\tau_0} (1 - \tau_0)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{Q} y = \mp \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n,0} \left[\frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} - \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} \right].$$

Верхний знак количества $\frac{\pi}{2}$ соответствует θ , большему нуля.

Обозначим ширину бесконечно удаленной части струи через $2b$; тогда

$$2b \sqrt{2\alpha\tau_0} (1 - \tau_0)^{\frac{3}{2}} = Q,$$

ибо $\sqrt{2\alpha\tau_0}$ есть скорость в удаленной части струи, плотность же

$$\rho = \rho_0 (1 - \tau)^{\frac{3}{2}},$$

и мы имеем

$$\frac{\pi y}{2b} = -\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right] x_n. \quad (53)$$

Обращаясь к определению сжатия, заметим, что при рассматриваемых условиях, т. е. когда

$$\tau_0 \leq \frac{1}{2\beta + 1},$$

это имеет место в бесконечно удаленной части струи, как и в случае истечения жидкости несжимаемой. В самом деле, если бы наибольшее сжатие было на конечном расстоянии от отверстия, то за ним последовало бы расширение; линии тока были бы обращены вогнутостью внутрь струи, давление падало бы от поверхности внутрь и в некоторой точке линии симметрии имело бы минимум; в этой точке скорость получала бы максимальное значение, что невозможно. Таким образом, сжатие будет равно отношению ширины $2b$ бесконечно удаленной части струи к ширине $2a$ отверстия сосуда. Это отношение определится из формулы (53), если мы положим в ней $\theta = \pi/2$, причем $y = -a$, а упервого слагаемого правой части возьмем верхний знак; таким образом находим

$$\frac{\pi a}{2b} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4n}{4n^2 - 1} x_{n,0};$$

отсюда сжатие

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}}. \quad (54)$$

Ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}, \quad (55)$$

несомненно, сходящийся, так как знаки членов его чередуются, а по абсолютной величине эти члены убывают с возрастанием индекса. Иначе можно в этом убедиться, вставляя вместо $x_{n,0}$ его выражение по формуле (46) предшествующей главы. Таким образом найдем остаточный член ряда S в виде

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{n=n}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} \sqrt{1 - 2\beta s_0} + ks_0 \sum_{n=n}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_n}{n^{4/3}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - 2\beta s_0} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + ks_0 \sum_{n=n}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_n}{n^{4/3}}; \end{aligned}$$

ясно, что он стремится к нулю с увеличением n , ибо k — некоторое постоянное, λ_n — правильные дроби.

При $\tau_0 = 0$

$$x_{n,0} = 1,$$

и мы приходим к Кирхгоффовой формуле

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61.$$

Это будет приближенное значение сжатия при малых скоростях истечения. Для вычисления суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}$$

при конечных скоростях и конечной разности давлений в резервуаре и пространстве, в которое происходит истечение газа, пользуемся приближенной формулой для x_n . Границы, в которых заключено количество b/a , найдутся, если мы, взяв *четное* или *нечетное* число начальных членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0},$$

в первом случае заменим положительные члены их нижними граничными значениями, отрицательные — верхними, а во втором поступим наоборот. Сделаем это вычисление для предельного случая

$$\tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1},$$

причем ограничимся пятью членами ряда для определения его верхнего предела и шестью — для нижнего. Воспользовавшись значениями $x_1, \dots, x_6$, вычисленными в предыдущей главе, и обозначив через A и B соответственно верхний и нижний пределы суммы (55), найдем

$$B = \frac{0,5254}{3} - \frac{2 \cdot 0,4703}{15} + \frac{3 \cdot 0,4343}{35} - \frac{4 \cdot 0,4095}{63} + \frac{5 \cdot 0,3872}{99} - \frac{6 \cdot 0,3755}{143},$$

откуда с точностью до 0,001

$$B = 0,128. \quad (56)$$

Величину A найдем, отбросив последнее слагаемое и прибавив возможные погрешности; эти последние будут выражаться в сумме лишь 0,0003 и не играют роли при той точности, которой мы будем довольствоваться. Поэтому

$$A = 0,128 + 0,015. \quad (57)$$

Подставляя найденные граничные значения суммы (55) в формулу (54), имеем

$$\frac{\pi}{\pi + 1,14} < \frac{b}{a} < \frac{\pi}{\pi + 1,02}$$

или, производя подсчет,

$$0,73 < \frac{b}{a} < 0,75;$$

следовательно,

$$\frac{b}{a} \approx 0,74.$$

Таким образом, струя расширяется по мере повышения давлений в резервуаре до предельного; ее крайние размеры в ширину суть $0,61 \cdot 2a$ и $0,74 \cdot 2a$, если через $2a$ обозначим, как и прежде, ширину отверстия.

Приближенная функциональная формула для сжатия найдется, если мы воспользуемся приближенным выражением функции x_n по формуле (43). Эту формулу мы можем изобразить в виде

$$x_n = 1 - \beta s - \frac{\beta s^2}{2} K,$$

где

$$K = L + \frac{M}{n+1} + \frac{N}{2n(1-\beta s) + 3 + (\beta + 2)s};$$

коэффициенты L , M , N не заключают параметра n и имеют значения

$$L = \frac{\beta}{1-\beta s}, \quad M = -\frac{2\beta + 1}{1 + (\beta + 2)s},$$

$$N = 2(2\beta + 1) \left[\frac{1-\beta s}{1 + (\beta + 2)s} - \frac{1}{1-\beta s} \right].$$

Приняв по-прежнему $\beta = 2,5$, получаем окончательно

$$x_n = 1 - \frac{5s}{2} - \frac{25s^2}{4(2-5s)} + \frac{15s^2}{2+19s} \frac{1}{n+1} + \frac{15s^2}{n+\mu} \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right],$$

причем

$$\mu = \frac{6+9s}{4-10s}.$$

Легко видеть, что ряд S , входящий в уравнение (54), можно вычислить, полагая

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} x_{n,0} = \left[1 - \frac{5s}{2} - \frac{25s^2}{4(2-5s)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} +$$

$$+ \frac{15s^2}{2+19s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(4n^2-1)} +$$

$$+ 15s^2 \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)}, \quad (58)$$

где для простоты письма s_0 заменено через s . Что касается первой суммы, входящей в выражение для S , то она представляется в виде

$$\frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{1}{4}.$$

Обратимся к вычислению [члена]

$$\sigma(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)};$$

частным случаем этого ряда, соответствующим значению $\mu=1$, будет вторая из имеющихся в формуле S сумм. [В общем случае] $\sigma(\mu)$ можно представить следующим образом:

$$\sigma(\mu) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} dt.$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла, можно суммировать. В самом деле,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} = \frac{t^{\mu-1}}{4} \left[t + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{3} - \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{5} + \frac{t^3}{7} - \frac{t^4}{7} - \frac{t^4}{9} + \dots \right].$$

Так как ряд, заключенный в скобки, есть абсолютно сходящийся при $t < 1$, то порядок его членов можно изменить, и мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} &= \frac{t^{\mu-\frac{1}{2}}}{4} \left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5} - \frac{t^{7/2}}{7} + \dots \right) - \\ &- \frac{t^{\mu-\frac{3}{2}}}{4} \left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5} - \dots \right) + \frac{t^{\mu-1}}{4} = \frac{t^{\mu-1}}{4} \left[1 - \frac{1-t}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{t} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$4\sigma(\mu) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)} = \frac{1}{\mu} - \int_0^1 t^{\mu-\frac{3}{2}} (1-t) \operatorname{arctg} \sqrt{t} dt$$

или, совершив интеграцию по частям,

$$4\sigma(\mu) = \frac{2}{2\mu+1} - \frac{\pi}{4\mu^2-1} + \frac{4\mu}{4\mu^2-1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t}; \quad (59)$$

отсюда

$$4\sigma(1) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \ln 2 = 0,5437.$$

Суммируя результаты, получаем

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 8S},$$

$$8S = 2 - 5s_0 - \frac{25s_0^2}{2(2 - 5s_0)} + \frac{15s_0^2}{2 + 19s_0} [1,0874 - 8\sigma(\mu)] + \frac{30s_0^2}{(2 - 5s_0)^2} 8\sigma(\mu), \quad (60)$$

причем $\mu = \frac{6 + 9s_0}{4 - 10s_0}$, $\sigma(\mu)$ определяется по формуле (59), а s_0 — по отношению давлений в сосуде и в свободном пространстве. В самом деле,

$$s_0 = \frac{\tau_0}{4 - \tau_0},$$

а по формулам главы I упомянутое отношение равно

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{(1 - \tau_0)^{\beta+1}} = (1 + s_0)^{\beta+1} = (1 + s_0)^{7/2}.$$

Наиболее любопытной является величина сжатия струи при давлении, близком к предельному, т. е. такому, при котором скорость вытекающей струи равняется скорости распространения звука в спокойном газе того же физического состояния. Это предельное давление соответствует, как было в свое время указано, значению

$$\tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1}, \quad s_0 = \frac{1}{2\beta}$$

и имеет величину

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)^{1+\beta} = 1,89 p_1,$$

т. е.

$$p_0 = 1,89 \text{ ат},$$

если давление в свободном пространстве равно атмосферному. Положим в формуле

$$\mu = \frac{6 + 9s_0}{4 - 10s_0}, \quad s_0 = \frac{1}{2\beta} = 0,2;$$

имеем

$$\mu = 3,9.$$

Вычислить точно определенный интеграл

$$j(\mu) = \int_0^1 \frac{i^{\mu-1} dt}{1+i}$$

при таком значении μ представляется довольно хлопотливым делом; но ввиду того, что все наше вычисление, начиная с замены x_n близкой к нему по числовым значениям функцией, носит приближенный характер, мы

можем упростить задачу: высчитаем $j(4)$ и $j(3,75)$ и потом ввиду близости значений этих интегралов найдем $j(3,9)$ путем простейшего интерполирования (предположив пропорциональность приращений функции и аргумента). Легко получим

$$j(4) = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t} dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln 2 = 0,1402,$$

$$j(3,75) = \int_0^1 \frac{t^{3/4}}{1+t} dt = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 0,1500.$$

Отсюда

$$j(3,9) = 0,144,$$

а по (59)⁵

$$4\sigma(3,9) = \frac{2}{8,8} - \frac{\pi}{8,8 \cdot 6,8} + \frac{15,6}{8,8 \cdot 6,8} \cdot 0,144 = 0,212.$$

Подставив это значение $\sigma(\mu)$ и соответствующее s_0 в формулу (60), находим

$$8S = 0,5 + \frac{3}{29} \cdot 1,087 + \frac{159}{145} \cdot 0,424 = 1,08, \quad (61)$$

значение, среднее между полученными выше предельными величинами ряда $8S$ (56), (57). Сжатие при этом выразится числом

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 1,08} = 0,74.$$

Коэффициент этот с уменьшением давлений в резервуаре падает вследствие возрастания величины S ; это падение совершается довольно равномерно, как видно из прилагаемой таблицы.

s_0	0,2	0,182	0,154	0,137	0,117
$\frac{p_0}{p_1}$	1,89	1,79	1,65	1,56	1,48
$\frac{b}{a}$	0,74	0,73	0,71	0,70	0,68
μ	3,90	3,50	3,00	2,75	2,50

(62)

Обратимся, наконец, к выражению количества вытекающего газа. Это количество E выразится так:

$$E = 2a \cdot \frac{b}{a} \sqrt{2\alpha\tau_0\rho_0} (1 - \tau_0)^{\frac{1}{2}},$$

⁵ С целью проверки можно поступить так: вычислить точные значения $4\sigma(4) = 0,2079$, $4\sigma(3,75) = 0,2193$; отсюда путем той же интерполяции находим $4\sigma(3,9) = 0,2124$, значение, совпадающее с найденным выше.

где ρ_0 — плотность газа в сосуде (в его удаленной от отверстия области), $2a$ — по-прежнему ширина отверстия; количество α определяется формулой

$$\alpha = \frac{k\gamma}{\gamma-1} \rho_0^{\gamma-1},$$

причем

$$\gamma = 1,40 = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Будем сначала рассматривать случай *истечения* газа из газометров с различным давлением *в такое пространство, где давление постоянно* (например, истечение в атмосферу). Тогда

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_0},$$

$$1 - \tau_0 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad s_0 + 1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{1+\beta}},$$

и мы имеем окончательную формулу

$$E = 2a \sqrt{p_1} \sqrt{\rho_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{b}{a}} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}\right]},$$

или, приняв опять $\gamma = 1,40$ и $\beta = 2,5$,

$$E = 2a \sqrt{p_1 \rho_0} \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7}\right]}.$$

Так как сжатие b/a есть функция s_0 и, стало быть, зависит от отношения p_0/p_1 , то при неизменности этого отношения расход газа прямо пропорционален корню из плотности или обратно пропорционален корню из температуры.

Представим себе теперь, что неизменным остается состояние газа в газометре, и будем рассматривать истечение в среду при различных давлениях в этой среде. Обозначим через c_0 скорость звука в газе при тех физических условиях, в которых он находится в отдаленной от отверстия части резервуара. Тогда

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{k\gamma \rho_0^{\gamma-1}} = \sqrt{(\gamma-1)\alpha},$$

и формулу расхода можно представить в виде

$$E = 2ac_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \rho_0 \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (63)$$

или, положив $\gamma = 1,4$,

$$E = 2ac_0 \rho_0 \sqrt{5} \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{10/7} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7}\right]}.$$

В этой формуле для E изменяются лишь два последних множителя, зависящие исключительно от отношения давлений в открытой среде и газометре.

Что касается сжатия струи, или *коэффициента истечения*, как мы будем еще называть количество b/a , то он в точности определяется формулой (54), а приближенное его значение дается формулами (60). Довольствуясь приближением до 0,01, мы указали числовые значения этого коэффициента при предельном давлении и некоторых других, меньших его. Оказывается, что практический результат той же точности получится, если вместо весьма громоздкой формулы (60) мы примем выражение

$$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2 - k s_0}, \quad (64)$$

где k — некоторый постоянный коэффициент. Эта формула весьма хорошо выразит величину сжатия при малой разнице давлений в резервуаре и открытом пространстве, т. е. при s , близком к нулю; при $s_0 = 0$ величины b/a по формулам (54) и (64) совпадают с Кирхгофовой формулой сжатия. Определим k так, чтобы при $s_0 = 1/2\beta = 0,2$ результаты (64) и (60) совпадали; для сего необходимо, чтобы

$$2 - k \cdot 0,2 = 8S \cdot 0,2,$$

а это значение $8S$ найдено выше (см. равенство (61)) и равно 1,08. Таким образом, $k = 4,6$. Величины $8S$ для значений s_0 , приведенных в таблице (62), в той же последовательности соответственно равны 1,08; 1,16; 1,28; 1,35; 1,44. Им соответствуют следующие числовые значения двучлена $2 - 4,6s_0$, входящего в формулу (64) вместо $8S$: 1,08; 1,17; 1,29; 1,37; 1,46. Такая разница не отразится на результате при принятой нами точности до второго десятичного знака. Совпадение будет еще лучше, если мы выразим коэффициент истечения формулой

$$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5s_0 + 2s_0^2}. \quad (65)$$

Тогда ряд значений функции $2 - 5s_0 + 2s_0^2$ для тех же s_0 с точностью до 0,01 будет представляться числами 1,08; 1,16; 1,28; 1,35; 1,44, которые соответственно равны полученным выше приближенным значениям количества $8S$, входящего в истинную формулу сжатия. Таким образом, формулы (65) или (64) при $k = 4,6$ вполне хорошо выражают функцию λ и очень удобно могут применяться для практических целей. Что касается формулы расхода (63), то и она при принятых округленных значениях $\gamma = 1,4$ и $\beta = \frac{1}{\gamma - 1} = 2,5$ принимает довольно простой вид, если мы введем в нее переменное s_0 ; это переменное, как уже было указано, следующим образом связано с отношением p_0/p_1 давлений в резервуаре и открытом

пространстве:

$$s_0 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{2}{7}} - 1;$$

преобразовав указанным образом равенство (63), получаем формулу расхода

$$E = 2ac_0\rho_0\lambda \frac{\sqrt{5s_0}}{(1+s_0)^3}.$$

Заметим, что из двух упрощенных формул для λ последняя (65) является более рациональной. В самом деле, вернемся на минуту к формуле (54)

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} x_{n,0}}$$

и подставим в нее вместо $x_{n,0}$ трехчлен

$$x_n(0) + s_0 x'_n(0) + \frac{s_0^2}{2} x''_n(0),$$

приблизненно выражающий функцию x_n . Из уравнения для x_n

$$x'_n s (1+s) + x_n \beta s + n x_n^2 - n (1-2\beta s) = 0$$

имеем при $x_n(0) = 1$, $x'_n(0) = -\beta$

$$x''_n(0) = -\beta \frac{n\beta - \beta - 1}{n+1} = -\beta^2 + \beta \frac{2\beta+1}{n+1}.$$

Подставляем эти значения в вышеприведенный трехчлен и вычисляем входящий в знаменатель формулы λ ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} \left(1 - \beta s_0 - \frac{\beta^2}{2} s_0^2 \right) + \beta \frac{2\beta+1}{2} s_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)(n+1)};$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)(n+1)} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^n}{4n^2-1} dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{t-1}{\sqrt{t}} \arctg \sqrt{t} \right) dt$$

или по выполнению интегрирования

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)(n+1)} = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{\pi-2}{3} = 0,5437;$$

отсюда

$$8S = 2 \left(1 - \beta s_0 - \frac{\beta^2}{2} s_0^2 \right) + \beta (2\beta + 1) 0,5437 s_0^2.$$

Положив по-прежнему $\beta = 2,5$, получим

$$8S = 2 - 5s_0 + 1,9s_0^2,$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5s_0 + 1,9s_0^2}.$$

Ограничиваясь приближением до 0,01, мы должны эту формулу считать тождественной с формулой (65).

Считаем нелишним, наконец, обратить внимание читателя на весьма простую связь между переменным s_0 , в котором мы выражаем все характерные для задачи постоянные, и температурой струи. Мы имели для плотности и давления внутри текущего газа формулы

$$\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta,$$

$$p = k\rho^\gamma = k\rho_0^\gamma (1 - \tau)^{\beta\gamma} = p_0 (1 - \tau)^{\beta\gamma};$$

отсюда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 - \tau)^{\beta(\gamma-1)} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 - \tau);$$

а так как по закону Бойля — Мариотта и Гей-Люссака

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

где T — абсолютная температура в рассматриваемой точке, то полученное равенство можно переписать так:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \tau = \frac{1}{1+s},$$

так как $s = \frac{\tau}{1-\tau}$ (см. гл. II). Применяв это соотношение к удаленной от отверстия части струи и обозначая температуру газа в этом месте через T_1 , будем иметь

$$\tau_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_0}, \quad s_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Дополним наше исследование об истечении газов, сопоставляя добытые результаты, с одной стороны, с приближенными теоретическими формулами, принимавшимися для вычисления расхода, и, с другой, с данны-

ми опыта. Мы совершенно не будем касаться чисто эмпирических формул, хотя некоторые из них хорошо выражают явление в известных пределах, какова, например, формула Паренти⁶. При рациональной постановке приближенных теоретических построений принимался, как и в нашем исследовании, адиабатный закон; при этом допускалось, что вытекающая струя имеет в известном расстоянии от отверстия наибольшее сужение и что в точках этого сужения скорости газовых частиц постоянна. Таким образом, в результате получается формула расхода

$$E = Sc_0\rho_0\lambda\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}, \quad (66)$$

где S — площадь отверстия, а λ , коэффициент истечения, равен отношению площади суженного сечения к площади отверстия.

Эта формула не отличается по виду от нашей формулы (63); разница лишь в том, что коэффициент истечения не был определен ни для какого, хотя бы частного, вида выходного отверстия. Обыкновенно принималось, что он имеет постоянную величину, зависящую лишь от формы сосуда и отверстия. Такое допущение, как мы усматриваем из разрешенной здесь задачи, далеко от истины: в нашем случае коэффициент этот при изменении p_1/p_0 от 1 до предельной величины 0,53 возрастает от 0,61 до 0,74; прибавка, таким образом, составляет более 21% нижнего предельного значения. Если отверстие будет круглое, а не щелевидное, как в нашем случае, то надо ожидать еще более резкой разницы в значениях λ , ибо тогда струйки будут сбегаться к отверстию во всех азимутах, а не в двух, как это имеет место в нашей задаче. Поэтому, когда формулу расхода с постоянным λ пытались применять к определению действительного расхода, то опыт не оказывался в согласии с теорией. Ввиду этого Паренти⁷, опираясь на опыты Гирна⁸, полагал, что применять к задаче об истечении формулы, основанные на адиабатном законе изменения давления, неправильно. Однако же из выводимых им самим результатов опытов Гирна явствует как раз то самое возрастание коэффициента истечения λ , которое предвидит наша теория. Возможность такого изменения подозревал и сам Паренти; но, высказав это подозрение, он совершенно на нем не останавливается, так как не имеет средств для количественной оценки возрастания λ .

Перейдем к рассмотрению другого представляющегося здесь обстоятельства. Получив формулу расхода (66), Сен-Венан обратил внимание на следующий парадокс: если бы эта формула была применима при любом отношении давлений в резервуаре и открытой среде, то расход, возрастая от нуля, проходил бы через максимум при некотором значении отношения давлений и засим должен бы был вновь уменьшаться, обращаясь в нуль

⁶ Parenty. Ecoulement et débit des gaz et de la vapeur. — Ann. Chem. Phys., серия VII, т. VIII, 1896 и т. XII, 1897.

⁷ См. цитированную работу.

⁸ Опубликовано в Comptes Rend. Acad. Sci., t. CIII, 1886.

при $p_1/p_0 = 0$; величина P для p_1/p_0 , соответствующая максимуму расхода, определится из условия

$$\frac{\partial \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}}{\partial p_1} = 0,$$

откуда

$$P = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{1}{2\beta + 1} \right)^{\beta+1} = 0,53.$$

Это как раз предельное отношение давлений, соответствующее тому моменту, когда в суженной части струи газ движется со скоростью распространения звука в этом месте, как заметил Гюгонио⁹. Само собой разумеется, отмеченное обстоятельство не может иметь места в действительности. И вот, когда Сен-Венан произвел опыты с истечением газов, то он нашел, что при понижении давления в открытой среде и изменении p_1/p_0 от 1 до 0,53 расход газа возрастает; а при дальнейшем понижении p_1 процесс становится регулярным — дальнейшего повышения расхода не происходит. К этому удивительному результату долго относились с недоверием; однако же опыты Гирна, произведенные не так давно, подтвердили результат Сен-Венана с той разницей, что Гирн наблюдал повышение расхода за пределом, указанным его предшественником; по его опытам выходит, что расход достигает максимальной величины при p_1/p_0 , равном приблизительно 0,26. Однако же изменение расхода при понижении p_1/p_0 от 0,53 до 0,26 незначительно, почему это обстоятельство и могло быть упущено Сен-Венаном при менее тщательных наблюдениях.

Если бы мы попробовали применять нашу формулу (66) при λ , определяемом соотношением (65), за законными пределами ее применимости, то пришли бы к тому же парадоксальному результату с тем различием, что максимуму расхода соответствовало бы значение p_1/p_0 , несколько меньшее 0,27, — величина, весьма близкая к гирновскому пределу. Это любопытное совпадение, как нам кажется, показывает, что предлагаемая нами формула довольно хорошо выражает в существенных чертах исследуемое явление.

Естественно теперь спросить себя, какого характера будет движение в том случае, если давление в открытой среде, в которую происходит истечение газа, ниже предельного, т. е. если $p_1/p_0 < 0,53$. Если бы мы предположили, что течение останется установившимся с непрерывным изменением скоростей и давлений в границах движущейся газовой массы, то область переменных r, θ представлялась бы в виде полукруга радиуса, большего $1/(2\beta + 1)$; такая область как раз рассматривалась в главе I, и при этом было показано, что установившееся движение интересующего нас типа не принадлежит к числу возможных. Гюгонио в цитированных выше

⁹ Hugoniot. Comptes Rend. Acad. Sci., t. VIII, 1886.

статьях высказывает следующее положение: если $p_1 < 0,53p_0$, то вытекающая струя рассекается поверхностью, на которой скорость частиц равна скорости звука, на две части, причем давление при переходе через эту поверхность меняется скачком; выше этой разграничивающей поверхности по струе давление равно $0,53 p_0$, а ниже оно равно ¹⁰ p_1 . Но течение газа Гюгоньо считает установившимся в обеих частях вытекающей струи; что касается самой поверхности раздела давлений, то он считает ее всюду нормальной к линиям тока.

Это последнее утверждение нам представляется очень маловероятным, так как характер движения в верхней части потока должен был бы радикально измениться тотчас по переходе давления в открытой среде за предел $0,53p_0$. В самом деле, легко убедиться прежде всего, что ширина всякой элементарной струйки будет наименьшей в той точке, где господствует предельное давление; это потому, что поперечное сечение определяется как частное от деления несомого струйкой количества газа на $\rho_0 \sqrt{2\alpha\tau_0 \cdot (1 - \tau_0)^\beta}$; а этот делитель проходит через максимум при $\tau = 1/(2\beta + 1)$. Раз это так, то, приняв струйки нормальными к линии $\tau = 1/(2\beta + 1)$, мы будем иметь наименьший расход газа из сосуда в том случае, если указанная линия представляет собой отрезок, замыкающий отверстие. Но тогда коэффициент истечения, очевидно, равен единице; а следовательно, при переходе через предельное давление в приемнике этот коэффициент и расход газа сразу должны были бы возрасти более чем на 30%, что совершенно не соответствует действительности.

Мы, со своей стороны, полагаем, что явление могло бы быть истолковано следующим образом: вместе с цитированным автором мы думаем, что струя будет рассекается некоторой граничной поверхностью, при переходе через которую давление весьма резко изменяется. Остановливаясь на разработанной выше теоретической задаче, мы можем себе представить след означенной поверхности на плоскости, параллельно которой происходит течение, в виде кривой, опирающейся на края отверстия; далее, кривая, напоминая собой очертания языка пламени, выдвигается в открытую среду. Выше этой границы (внутри сосуда и прилежащей части струи) течение будет установившимся и давление падает от p_0 в далеких частях сосуда до $0,53 p_0$ на описанной граничной кривой; в дальнейшей же части струя волнуется; волны эти будут иметь облегающую граничную кривую ¹¹. В весьма тонком слое части этой струи, соседнем с [граничной]

¹⁰ Явление это напоминает Паренти обстоятельства разрыва твердых тел.

¹¹ Эти волны наблюдались и изучались в недавнее время немецким ученым Эмденом (Emden). Результаты его опытов описаны в статье «Ausströmungerscheinungen permanenter Gase». (Ann. Phys. Chem., 69, вып. 1, 2, 1899). Волны появляются тотчас, лишь только давление в приемнике падает ниже $0,53p_0$; длина их тем значительнее, чем ниже давление в приемнике. Эмден дает и теорию явления, но, на наш взгляд, совершенно несостоятельную: достаточно сказать, что, несмотря на существование волн, он считает постоянным давление во всей струе, чего, очевидно, быть не может; а это кладется в основу его анализа.

кривой, среднее давление будет менее $0,53 p_0$, скорость c_2 распространения звука будет меньше скорости c_1 звука для пограничного слоя, лежащего за линией раздела: $c_2 < c_1$. Пониженное давление стремится распространиться за линию раздела, следуя по струе в виде плоской волны; но каждой бесконечно тонкой струйкой волна эта относится назад, и так как скорость газовых частиц есть также c_1 , то в верхних частях газового потока никаких волн и не наблюдается. Чтобы линия раздела могла слушать облекающей приходящих к ней волн, как нам кажется, достаточно предположить, что нормальная к означенной линии скорость волны одна и та же, будет ли эта волна распространяться сверху вниз или снизу вверх. Если мы обозначим через λ угол, который образует с граничной кривой пробегающая через данную ее точку струйка, то, определив обе нормальные скорости по правилу Римана, сравнив их и применив, кроме того, весьма простые гидродинамические соображения, получим

$$\sin \lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)};$$

если бы давление и плотность изменялись, хотя и весьма резко, но непрерывно, то $\rho_1 : \rho_2 = 1$; таким образом, мы видим, что *струйки пересекают линию раздела под постоянным углом*.

Если принять эту гипотезу, то установившееся течение выше линии раздела может быть строго математически определено независимо от того, что происходит в дальнейшей части струи; именно нетрудно показать, что на означенной кривой, характеризующей равенством

$$\tau = \tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1},$$

имеет место соотношение

$$\varphi \operatorname{tg} \lambda (1 - \tau_0)^\beta \pm \psi = Q;$$

один знак соответствует левой половине линии раздела, другой — правой, а ψ и φ обозначают по-прежнему функцию тока и потенциал скоростей. Приняв это соотношение в число граничных условий, можно засим доказать, что его вместе с прочими условиями совершенно достаточно для определения φ и ψ в области (τ, θ) . А раз φ и ψ найдутся, то легко будет определить величину секундного расхода газа. Нам думается, что если бы этот расход оказался строго постоянным или мало меняющимся с изменением λ от нуля до его предельной величины, то приводимое нами объяснение было бы близко к истине. Скажем кстати, что границы, в которых может изменяться λ , нешироки; угол этот будет невелик; поэтому приведенное выше соотношение между ψ и φ , по всей вероятности, даст результат, не слишком уклоняющийся от того, который мы получили бы, просто приняв $\psi = \pm Q$ вдоль граничной кривой. Малой изменчивости расхода можно ожидать также и на том основании, что величина его будет зависеть

от интеграла $\int \sin \lambda ds$, распространенного на граничную кривую; этот интеграл равен, очевидно, полной длине этой линии, умноженной на $\sin \lambda$; а эта длина будет уменьшаться с увеличением λ . Заметим, наконец, что, приняв рассматриваемое истолкование явлений истечения, мы будем иметь вполне непрерывный переход от разрешенной выше задачи к тем случаям, когда данный нами анализ неприменим. Математическую разработку предлагаемой гипотезы мы надеемся дать в ближайшем будущем.

Глава IV

О ДАВЛЕНИИ ГАЗОВОГО ПОТОКА НА ПЛАСТИНКУ

Исследование этой задачи мы начнем с рассмотрения удара струи газа о пластинку, перпендикулярную к начальному направлению струи, причем предположим, что струя симметрично делится пластинкой на две части. Обращаемся опять к соответствующей задаче для случая несжимаемой жидкости. Решение этого вопроса изложено в цитированном уже сочинении Н. Е. Жуковского «Видоизменение метода Кирхгоффа». Вводя те же переменные, как и в предшествующей главе, мы полагаем

$$\begin{aligned} w &= \varphi_1 + i\psi_1, & z &= x + iy, \\ \ln v_0 \frac{dz}{dw} &= \vartheta + i\theta, \\ \varphi_1 + i\psi_1 &= -\frac{Q}{\sin^2(\theta - i\vartheta)} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 m}{\sin^2(\theta - i\vartheta)} \right) \end{aligned} \quad (67)$$

m есть угол, под которым каждая из двух частей струи после ее раздела в удаленных точках наклонена к оси OX , за эту ось мы принимаем линию симметрии рассматриваемой струи; начальное направление струи в таком случае будет параллельно оси OX .

Покажем, что формула (67) выражает как раз такое течение жидкости, которое нам нужно. Обратим прежде всего внимание на области комплексных переменных w и $\vartheta + i\theta$, которые соответствуют изображенному на рис. 5 течению. Область w ограничена двумя параллельными действительной оси прямыми, симметрично относительно нее расположенными и отстоящими от нее на расстояние $Q/2$; этим прямым на рис. 5 соответствуют наружные границы струи EA' и DC' . Границам течения $СВО$ и $AB'O$ соответствуют нижняя и верхняя стороны положительной части действительной оси области w ; точке O соответствует $w = 0$.

Область $\vartheta + i\theta$ ограничена, во-первых, лежащими вправо от мнимой оси частями прямых, параллельных оси ϑ и имеющих координаты

$\theta = \pi/2$ и $\theta = -\pi/2$; во-вторых, отрезком мнимой оси, заключенным между упомянутыми параллелями. На рисунке прямой $\theta = \pi/2$ соответствует правая, а прямой $\theta = -\pi/2$ — левая часть плоскости; часть мнимой оси, заключенная между точками $\theta = \pi/2$ и $\theta = m$, соответствует границе $B'A$ течения, ибо здесь скорость равна v_0 , $\psi = 0$; часть, симметричная только что указанной, соответствует кривой BC ; наконец, граница $C'D$ изображается в области $\psi + i\theta$ отрезком, заключенным между точками $\theta = -m$ и $\theta = 0$ мнимой оси, а кривая EA' — отрезком, ограниченным точками $\theta = 0$ и $\theta = m$.

Пройдем теперь по границам области $\psi + i\theta$ и выясним, что точка w при этом будет перемещаться по описанным выше границам области w . Выходим из точки $\theta = \pi/2$, $\psi = \infty$; из формулы (67) видим, что при этих значениях ψ и θ $w = Qki$, где k — произвольное целое число; выберем его равным нулю; если теперь точка $\psi + i\theta$ будет продвигаться вдоль прямой $\theta = \pi/2$, то w пойдет по действительной оси своей области, и притом

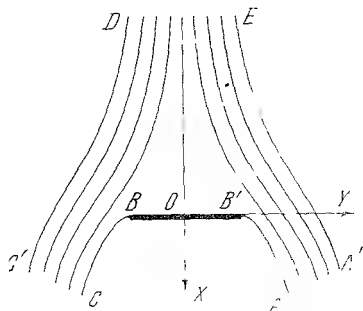


Рис. 5

с верхней стороны этой оси, так как при $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ при бесконечно малом ε мы будем иметь $\psi_1 = k\varepsilon$, где k — некоторое положительное количество. Когда точка $\psi + i\theta$ придет в положение $\psi = 0$, $\theta = \pi/2$, w успеет пройти отрезок своей действительной оси от 0 до $\psi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln(1 - \sin^2 m)$. Когда, далее, $\psi + i\theta$ двинется вдоль мнимой оси, точка w будет продолжать свое движение по оси ψ_1 в том же направлении до $\psi_1 = \infty$, где она окажется при $\psi = 0$, $\theta = m$; при прохождении точки $\psi = 0$, $\theta = m$ логарифм в формуле (67) получит приращение $-\pi i$, и w при $\psi = 0$, $m > \theta > 0$ будет продвигаться по прямой $w = iQ/2$ от $+\infty + iQ/2$ до $+\infty + iQ/2$; в последнее положение w приходит при $\theta = 0$. Прохождение через точку $\psi = 0$, $\theta = 0$ даст логарифму в формуле (67) приращение $2\pi i$, причем w скачком перейдет с верхней границы своей области на нижнюю и продвинется по ней из $-\infty - iQ/2$ до $+\infty - iQ/2$ при изменении $\psi + i\theta$ от 0 до $-im$; далее, при проходе $\psi + i\theta$ через $-im$ логарифм возрастет на $-\pi i$, w перескочит в точку $+\infty$ и по нижней стороне положительной части оси ψ_1 возвратится в начальное положение при движении $\psi + i\theta$ из $-im$ в $-i\pi/2$ и из $-i\pi/2$ в $\infty - i\pi/2$ по границам области этого переменного.

Таким образом, желаемое выяснено: формула (67) действительно решает задачу об ударе жидкой струи о пластинку. Чтобы решить эту же задачу для газовой струи, поступим согласно данному нами правилу. Разложим выражение w в ряд и отделим его мнимую часть. Будем

иметь

$$\begin{aligned}\frac{2\pi w}{Q} &= 2 \ln \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \ln \left(\sin^2 \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \sin^2 m \right) = \\ &= 2 \ln \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \ln \left(\cos 2m - \cos 2 \frac{\vartheta + i\theta}{i} \right) + \ln 2 = \\ &= 2 \ln \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \ln \sin \frac{\vartheta + i\theta - im}{i} - \ln \sin \frac{\vartheta + i\theta + im}{i};\end{aligned}$$

введя показательные функции вместо тригонометрических, легко находим отсюда

$$\begin{aligned}\frac{2\pi w}{Q} &= 2 \ln (1 - e^{-2\vartheta - 2i\theta}) - \ln (1 - e^{-2\vartheta - 2i(\theta - m)}) - \ln (1 - e^{-2\vartheta - 2i(\theta + m)}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} \{ \cos 2n(\theta - m) - i \sin 2n(\theta - m) + \\ &\quad + \cos 2n(\theta + m) - i \sin 2n(\theta + m) - 2 \cos 2n\theta + 2i \sin 2n\theta \}\end{aligned}$$

или по приведении

$$\frac{2\pi w}{Q} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} (1 - \cos 2nm) (\cos 2n\theta - i \sin 2n\theta).$$

Наконец, для ψ_1 получаем

$$\frac{\pi \psi_1}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm);$$

так как

$$e^{-\vartheta} = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$$

(v — скорость, равная $\sqrt{2\alpha\tau}$), то иначе

$$\frac{\pi \psi_1}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm).$$

Таково в переменных τ , θ выражение функции тока для жидкой струи; следовательно, для струи газовой та же задача должна разрешаться формулой

$$\frac{\pi \psi}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm). \quad (68)$$

По формуле (24) главы I отсюда находим для φ выражение

$$\frac{\pi \varphi}{Q} = C - \frac{1}{(1 - \tau)^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos 2n\theta (1 - \cos 2nm). \quad (69)$$

Если мы положим $C = 0$, то, как и в задаче о жидкой струе, при $\tau = \theta = 0$ будем иметь $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Ряды φ и ψ суть ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся при всяком $\tau < \tau_0$, как это явствует из общих соображений главы II, и, следовательно, вопрос, поставленный нами, разрешается соотношениями (68) и (69).

Обратимся к определению ширины пластинки и давления на нее. Ширину пластинки будем обозначать через $2l$. Мы найдем l , если, составив выражение координаты y , положим в нем $\theta = \pi/2$, $\tau = \tau_0$. Но

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi, \quad y_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\int dy \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}};$$

а так как $\psi = 0 = \text{const}$ при $\theta = \pi/2$, то

$$(dy)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau = \left(\frac{\sin \theta}{V^{2\alpha\tau}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Вводя найденное выражение для φ и заметив, что

$$l = y_{\tau=\tau_0, \theta=\frac{\pi}{2}},$$

получим отсюда

$$l = \frac{Q}{\pi V^{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n\tau_0^n y_{n,0}} \int_0^{\tau_0} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \left(\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y'_n \right) \frac{d\tau}{V\tau} \right\}. \quad (70)$$

Для вычисления интегралов, входящих в этот ряд, замечаем прежде всего, что

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} \left(\tau^{n-1} y_n + \frac{\tau^n}{n} y'_n \right) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} z'_n,$$

а на основании уравнения для z_n

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} z'_n = n^2 \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}} z_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J(\tau_0) &= \int_0^{\tau_0} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau \left(\tau^{n-1} y_n + \frac{\tau^n}{n} y'_n \right)}{(1-\tau)^\beta} \frac{d\tau}{V\tau} = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{V\tau} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} z'_n = \\ &= \frac{1}{n} \frac{V\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} z'_{n,0} + \frac{1}{2n} \int_0^{\tau_0} \frac{z'_n}{V\tau(1-\tau)^\beta} d\tau. \end{aligned} \quad (71)$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\tau_0} \frac{z'_n}{V\tau(1-\tau)^\beta} d\tau = \frac{z_{n,0}}{V\tau_0(1-\tau_0)^\beta} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau V\tau(1-\tau)^{\beta+1}} z_n d\tau,$$

а так как на основании дифференциального уравнения для функции z_n

$$\frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}} z_n = \frac{1}{n^2} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} z_n',$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} \frac{z_n'}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau &= \frac{z_{n,0}}{\sqrt{\tau_0}(1-\tau_0)^\beta} + \frac{1}{2n^2} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} z_n' = \\ &= \frac{z_{n,0}}{\sqrt{\tau_0}(1-\tau_0)^\beta} + \frac{1}{2n} J(\tau_0). \end{aligned}$$

Сопоставляя это соотношение с формулой (74), находим

$$\frac{4n^2 - 1}{4n} J(\tau_0) = \frac{1}{(1-\tau_0)^\beta} \left(\frac{z_{n,0}}{2\sqrt{\tau_0}} + \sqrt{\tau_0} z_{n,0}' \right)$$

или, иначе,

$$J(\tau) = \frac{4n}{(4n^2 - 1)(1-\tau)^\beta} \frac{d}{d\tau} z_n \sqrt{\tau} = \frac{4n}{4n^2 - 1} \frac{z_n \sqrt{\tau}}{(1-\tau)^\beta} \frac{d}{d\tau} \ln z_n \sqrt{\tau}, \quad (72)$$

так как $z_n = \tau^n y_n$, $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n} = x_n$, то отсюда

$$J(\tau) = \frac{2n}{4n^2 - 1} \frac{\tau^{n-\frac{1}{2}}}{(1-\tau)^\beta} y_n (1 + 2nx_n).$$

На основании этой формулы равенство (70) переписывается в форме

$$\begin{aligned} l = \frac{2Q}{\pi \sqrt{2\alpha\tau_0}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1} 2nx_n \right\} \frac{1}{(1-\tau_0)^\beta}. \quad (73) \end{aligned}$$

Первая из сумм, входящих в формулу для l , представляет собой абсолютно сходящийся ряд; ее вычисляем так:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2 - 1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2 - 1} = \\ = \cos m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{4n^2 - 1} - \sin m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{4n^2 - 1}; \quad (74) \end{aligned}$$

НО ЛЕГКО ВИДЕТЬ, ЧТО

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m - i \sin (2n-1)m}{4n^2 - 1} = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n}}{2n-1} [\cos (2n-1)m - i \sin (2n-1)m] dt = \\ &= \int_0^1 t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} dt, \quad \xi = te^{-im}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} \xi,$$

то полученный интеграл выразится так:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 t \operatorname{arctg} te^{-im} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2 e^{-im} dt}{1 + t^2 e^{-2im}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{e^{im}}{2} + \frac{e^{im}}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2 e^{-2im}} = \frac{1}{2} (1 + e^{2im}) \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{e^{im}}{2}, \end{aligned}$$

а так как

$$\operatorname{arctg} e^{-im} = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \ln \sqrt{\frac{1 + \sin m}{1 - \sin m}},$$

то

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi}{8} (1 + \cos 2m) - \frac{\cos m}{2} + \frac{\sin 2m}{8} \ln \frac{1 + \sin m}{1 - \sin m} + \\ &+ i \left(\frac{\pi}{8} \sin 2m - \frac{\sin m}{2} - \frac{1 + \cos 2m}{8} \ln \frac{1 + \sin m}{1 - \sin m} \right). \end{aligned}$$

Обращаясь к исходной формуле для K , видим, что первая строка его нового выражения представляет выражение в конечной форме функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{4n^2 - 1},$$

а коэффициент мнимой единицы во второй строке равен

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2a-1)m}{4n^2-1};$$

имея это, составляем по формуле (74)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \cos m - 1 \right),$$

и, наконец,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} (1 - \cos m). \quad (75)$$

Воспользовавшись этой формулой, окончательно преобразуем уравнение (73) в следующее соотношение:

$$l = \frac{Q}{\pi \sqrt{2\alpha\tau_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} (1 - \cos m) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4nx_{n,0}}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) \right\} \frac{1}{(1-\tau_0)^{\beta}}. \quad (76)$$

Ряд, оставшийся в этой формуле, — несомненно сходящийся. Чтобы в этом убедиться, составляем, пользуясь формулой (46) главы II для x_n , остаточный член. Имеем

$$x_{n,0} = \sqrt{1 - 2\beta s_0} + k\lambda_n \frac{s_0}{n^{1/3}},$$

$$R_n = \sqrt{1 - 2\beta s_0} \sum_{n=n}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) +$$

$$+ ks_0 \sum_{n=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (1 - \cos 2nm) \lambda'_n}{n^{4/3}};$$

ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

ибо λ_n и λ'_n суть правильные дроби.

Переходя к вычислению равнодействующей R давлений на рассматриваемую пластинку, обозначим давление позади пластинки через p_1 и замечаем, что

$$R = 2 \int_0^l (p - p_1) dy = 2 \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{p}{\sqrt{2\alpha\tau}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau \right\}_{\theta=\frac{\pi}{2}} - 2p_1 l;$$

но

$$p = k\rho^\gamma = k\rho_0^\gamma (1 - \tau)^{\beta+1},$$

ибо

$$\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta,$$

а потому интеграл, входящий в выражение R , назовем его через T , по вставке значения функции ϕ получает вид

$$T = \frac{Q k \rho_0^\gamma}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n \tau_0^n y_{n,0}} \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y'_n}{(1 - \tau)^\beta} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \right\}.$$

Далее, приняв в расчет выражение

$$J(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y'_n}{(1 - \tau)^\beta} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

имеем

$$\begin{aligned} S(\tau_0) &= \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y'_n}{(1 - \tau)^\beta} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} dJ = \\ &= (1 - \tau_0)^{\beta+1} J(\tau_0) + (\beta + 1) \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^\beta J(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

по формуле (72)

$$J(\tau) = \frac{4n}{(4n^2 - 1)(1 - \tau)^\beta} \frac{d}{d\tau} z_n \sqrt{\tau};$$

поэтому

$$S(\tau_0) = (1 - \tau_0)^{\beta+1} J(\tau_0) + \frac{4n(\beta + 1)}{4n^2 - 1} z_{n,0} \sqrt{\tau_0}.$$

Вставив это выражение в вычисляемую сумму, получаем

$$\begin{aligned} T \frac{\pi}{Q} &= \frac{k \rho_0^\gamma (1 - \tau_0)^{\beta+1}}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n \tau_0^n y_{n,0}} J(\tau_0) + \\ &+ 4 \frac{(\beta + 1) k \rho_0^\gamma}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{\tau_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1}; \end{aligned}$$

первое из этих слагаемых на основании формулы (70) представляет собой величину

$$k \rho_0^\gamma (1 - \tau_0)^{\beta+1} l = p_1 l;$$

а потому, воспользовавшись формулой (75) и замечая, что

$$k \rho_0^\gamma (1 + \beta) = \frac{k \gamma}{\gamma - 1} \rho_0^\gamma = \alpha \rho_0,$$

имеем

$$T = p_1 l + \frac{Q \rho_0 \sqrt{\alpha \tau_0}}{\sqrt{2}} (1 - \cos m).$$

Обращаясь к вышеприведенной формуле для R , получим

$$R = Q \rho_0 \sqrt{2 \alpha \tau_0} (1 - \cos m). \quad (77)$$

Разделив это уравнение почленно на уравнение (76) и приняв в расчет соотношения

$$\sqrt{2 \alpha \tau_0} = v_0, \quad \rho_0 (1 - \tau_0)^{\beta} = \rho_1,$$

где v_0 — скорость струи в удаленных ее точках, а ρ_1 — плотность газа в тех же точках, получим искомую формулу

$$R = 2l \rho_1 v_0^2 \frac{\pi}{\pi + \frac{8}{1 - \cos m} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n x_{n,0}}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2nm)}. \quad (78)$$

Что касается угла m , то он определяется из уравнения (76), в котором все величины, кроме m , даны. В самом деле,

$$v_0 = \sqrt{2 \alpha \tau_0}, \quad \alpha = k \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_0^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{1 - \tau_0},$$

где p_0 и ρ_0 суть давление и плотность в критической точке разветвляющейся линии тока; отсюда

$$\tau_0 = \frac{\rho_1 v_0^2}{\rho_1 v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_1}, \quad s_0 = \frac{\tau_0}{1 - \tau_0} = \frac{(\gamma - 1) \rho_1 v_0^2}{2\gamma p_1}; \quad (79)$$

наконец, разность значений ψ на границах струи — количество, обозначенное нами через Q , определяется из условия

$$Q \rho_0 = 2 \rho_1 b v_0 = 2 b v_0 (1 - \tau_0)^{\beta} \rho_0,$$

если $2b$ есть ширина падающей струи в бесконечно удаленной ее части. Величины b , v_0 , ρ_1 , p_1 , конечно, должно считать данными.

Равнодействующую давлений, после того как m найдено, проще, конечно, вычислять по формуле (77). Кстати, заметим здесь, что эту формулу можно вывести весьма просто из теоремы о количестве движения; при этом оказывается, что она несколько не зависит ни от вида пластинки, лишь бы пластинка эта была симметрична по отношению к средней линии струи, ни от связи между давлением и плотностью. В самом деле, назовем через M количество движения газа, заключенного в струе и ограниченного с одной стороны перпендикулярным сечением начальной струи в удаленных ее точках, с другой — двумя подобными же сечениями,

проведенными через удаленные точки ветвей струи, сбежавших с пластинок. Приращение M через бесконечно малый промежуток времени Δt равно, очевидно,

$$2b\rho_1 v_0 \Delta t (\cos m - 1) v_0 = Q\rho_0 v_0 (\cos m - 1) \Delta t,$$

так как $2b$ есть начальная ширина струи, а $Q\rho_0$ — проносимое ею через поперечное сечение секундное количество газа. Импульс внешних сил выразится через $-R\Delta t$. По теореме о количестве движения имеем

$$Q\rho_0 v_0 (\cos m - 1) \Delta t = -R\Delta t,$$

а это равенство по упрощении и приводит нас к формуле (77).

Для наших целей более существенной является, однако, менее общая формула (78). Пользуясь ею, мы *приближенно* решим вторую основную задачу нашего исследования, задачу о давлении беспредельного потока газа на преграждающую его пластинку. Начнем с приближенного суммирования ряда, входящего в знаменатель формулы (78). Для сего пользуемся употреблявшимся уже в задаче об истечении приближенным выражением функции x_n (при выводе формулы (58)):

$$2x_n = 2 - 5s - \frac{25s^2}{2(2-5s)} + \frac{30s^2}{2+19s} \frac{1}{n+1} + \frac{30s^2}{n+\mu} \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right],$$

где

$$\mu = \frac{6+9s}{4-10s}, \quad s = \frac{\tau}{1-\tau}.$$

Обозначив для краткости вычисляемую сумму через L и опустив для простоты письма значок при s , будем иметь

$$\begin{aligned} 2L = & \left[2 - 5s - \frac{25s^2}{2(2-5s)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2nm) + \\ & + \frac{30s^2}{2+19s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+1)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm) + 30s^2 \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right] \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+\mu)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm). \end{aligned} \quad (80)$$

Назовем ряды первой, второй и третьей строк соответственно через N_1 , N_2 , N_3 и заметим, что, вычислив N_3 и N_1 , мы найдем и N_2 , положив $\mu = 1$ в N_3 .

Величину N_1 рассматриваем как предельное значение величины N_1' :

$$\begin{aligned} N_1' &= \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm); \\ N_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} N_1'. \end{aligned}$$

Имеем

$$4N'_1 = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \\ - \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{2n-1} - \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{2n+1};$$

первая из этих сумм имеет значение

$$1 + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k+1};$$

вторая может быть представлена в виде

$$\cos m \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{2n-1} - \sin m \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1}$$

и третья — в виде

$$- \cos m \sum_{n=2}^{k+1} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{2n-1} - \sin m \sum_{n=2}^{k+1} (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1}.$$

Пользуясь этими формулами, получим для $4N'_1$ выражение

$$4N'_1 = (-1)^{k-1} \frac{1 - \cos 2km}{2k+1} + 2 \sin m \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1},$$

отсюда

$$N_1 = \frac{\sin m}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1}.$$

Но

$$\sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1} = \int_0^m \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \cos (2n-1)m \, dm, \\ \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \cos (2n-1)m = \\ = \frac{1}{2 \cos m} \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} [\cos 2nm + \cos (2n-2)m] = \\ = \frac{1}{2 \cos m} [1 + (-1)^{k-1} \cos 2km],$$

и, следовательно,

$$N_1 = \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{dm}{\cos m} + \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} \, dm.$$

Что касается последнего слагаемого, то оно равно нулю. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} dm &= \int_0^m \frac{\cos (2k-1)m \cos m - \sin (2k-1)m \sin m}{\cos m} dm = \\ &= \frac{\sin (2k-1)m}{2k-1} - \int_0^m \frac{m \sin m}{\cos m} \frac{\sin (2k-1)m}{m} dm; \end{aligned}$$

а на основании свойств интегралов Фурье¹

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^m \frac{m \sin m}{\cos m} \frac{\sin (2k-1)m}{m} dm = 0.$$

Поэтому и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} dm = 0.$$

Итак,

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) = \\ &= \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{dm}{\cos m} = \frac{\sin m}{4} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right). \end{aligned} \quad (81)$$

Обращаемся к вычислению N_3 :

$$N_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+\mu)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) dt.$$

Подынтегральная функция может быть выражена в конечной форме через низшие трансцендентные функции. Для сего рассматриваем ее как действительную часть от величины

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - e^{2nmi}).$$

В таком случае представляющий N_3 интеграл можно выразить как

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - e^{2nmi}) dt \right\}, \\ &4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^n}{4n^2-1} = \left[t + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{3} - \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{5} + \frac{t^3}{7} - \frac{t^4}{7} - \frac{t^4}{9} + \dots \right] = \\ &= \sqrt{t} \operatorname{arctg} \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} (\operatorname{arctg} \sqrt{t} - \sqrt{t}) = 1 - \frac{1-t}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{t}; \end{aligned}$$

¹ Jordan. Cours d'analyse, t. II, стр. 233.

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!^n e^{2nmi}}{4n^2 - 1} = 1 - \frac{1 - te^{2mi}}{\sqrt{t} e^{mi}} \operatorname{arctg} \sqrt{t} e^{mi}.$$

Таким образом,

$$4N_3 = \operatorname{Re} \int_0^1 t^{\mu - \frac{3}{2}} \{ (e^{-mi} - te^{mi}) \operatorname{arctg} \sqrt{t} e^{mi} - (1 - t) \operatorname{arctg} \sqrt{t} \} dt.$$

Применив интеграцию по частям, получаем

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^1 t^{\mu - \frac{3}{2}} (e^{-mi} - te^{mi}) \operatorname{arctg} \sqrt{t} e^{mi} dt = \\ &= \left(\frac{e^{-mi}}{\mu - \frac{1}{2}} - \frac{e^{mi}}{\mu + \frac{1}{2}} \right) \operatorname{arctg} e^{mi} + \frac{1}{\mu(2\mu + 1)} - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1 + te^{2mi}} dt; \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} \frac{e^{-mi}}{\mu - \frac{1}{2}} - \frac{e^{mi}}{\mu + \frac{1}{2}} &= \frac{4 \cos m}{4\mu^2 - 1} - \frac{8\mu i \sin m}{4\mu^2 - 1}; \\ \operatorname{arctg} e^{im} &= \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right); \\ \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1 + te^{2mi}} dt &= \int_0^1 \frac{(1 + t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt - i \sin 2m \int_0^1 \frac{t^{\mu} dt}{1 + 2t \cos 2m + t^2}; \end{aligned}$$

таким образом,

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{\cos m - 2\mu i \sin m}{4\mu^2 - 1} \left[\pi + 2i \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) \right] + \frac{1}{\mu(2\mu + 1)} - \\ &- \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{(1 + t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt + \frac{4\mu i \sin 2m}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu} dt}{1 + 2t \cos 2m + t^2}. \end{aligned}$$

Что касается интеграла, вычисляемого в формуле для N_3 , то он равен J_m при $m = 0$. Поэтому окончательно имеем

$$\begin{aligned} 4N_3 &= \frac{\pi(\cos m - 1)}{4\mu^2 - 1} + \frac{4\mu \sin m}{4\mu^2 - 1} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) + \\ &+ \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1 + t} - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{(1 + t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt; \\ \frac{4N_3}{1 - \cos m} &= -\frac{\pi}{4\mu^2 - 1} + \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \frac{\sin m}{1 - \cos m} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) - \\ &- \frac{8\mu(1 + \cos m)}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu}(1 - t) dt}{(1 + t)(1 + t^2 + 2t \cos 2m)}. \quad (82) \end{aligned}$$

Положив в этой формуле $\mu = 1$, получим, наконец, величину $4N_2$ (N_2 есть вторая сумма, входящая в состав формулы (80)):

$$\frac{4N_2}{1 - \cos m} = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \frac{\sin m}{1 - \cos m} \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) - \frac{8(1 + \cos m)}{3} \int_0^1 \frac{t(1-t) dt}{(1+t)(1+t^2+2t \cos 2m)}; \quad (83)$$

имеющийся здесь определенный интеграл легко вычисляется; он равен

$$m \operatorname{ctg} m + \frac{\cos 2m}{1 - \cos 2m} \ln \cos m - \ln 2. \quad (84)$$

Теперь мы имеем все нужное для приближенного вычисления $2L$ по формуле (80) и могли бы составить выражение силы давления на пластинку любой газовой струи. Обратимся к тому случаю, когда струя бесконечно широка, т. е. к задаче о действии беспредельного потока газа на пластинку. При таком условии $m = 0$, ибо, обтекая пластинку, поток в конце концов вновь принимает начальное направление. Мы должны, следовательно, вычислить

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{8L}{1 - \cos m},$$

причем точное значение L представляется рядом, входящим в знаменатель формулы (78), а приближенное его выражение дается соотношением (80). Пользуясь формулами (81), (82), (83) и (84), имеем

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{N_1}{1 - \cos m} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{N_2}{1 - \cos m} = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{4 + \pi}{12} = 0,32907,$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{N_3}{1 - \cos m} = \frac{2\mu}{4\mu^2 - 1} - \frac{\pi}{4(4\mu^2 - 1)} - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^\mu(1-t) dt}{(1+t)^3};$$

а так как

$$\int_0^1 \frac{t^\mu(1-t)}{(1+t)^3} dt = \frac{2\mu + 1}{4} - \mu^2 \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t},$$

то

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{N_3}{1 - \cos m} = \frac{4\mu^3}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t} - \frac{\mu}{2\mu + 1} - \frac{\pi}{4(4\mu^2 - 1)}.$$

Затем по (80)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{8L}{1 - \cos m} = 4 - 10s - \frac{25s^2}{2 - 5s} + \frac{30s^2}{2 + 19s} 1,3163 + \\ + 30s^2 \left[\frac{2}{(2 - 5s)^2} - \frac{1}{2 + 19s} \right] \left(\frac{16\mu^3}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t} - \frac{4\mu}{2\mu+1} - \frac{\pi}{4\mu^2-1} \right) = P(s),$$

причем

$$\mu = \frac{6+9s}{4-10s}, \quad s = \frac{\tau}{1-\tau}, \quad s = s_0.$$

Формула (78) принимает вид

$$R = 2l\rho_1 v_0^2 \frac{\pi}{\pi + P}. \quad (85)$$

При этом s_0 определяется формулой (79)

$$s_0 = \frac{(\gamma - 1) \rho_1 v^2}{2\gamma p_1},$$

которую можно переписать в виде

$$s_0 = \frac{v_0^2}{5c^2},$$

вводя скорость звука c в отдаленных частях потока и заменяя γ его значением 1,40.

При $s = 0$ найденное для R выражение дает формулу Кирхгоффа

$$R = 2l\rho_1 v_0^2 \frac{\pi}{\pi + 4} = 0,44 \cdot 2l\rho_1 v_0^2,$$

годную для давления потока несжимаемой жидкости. К этому же значению стремится при $s \rightarrow 0$ и предел, даваемый точной формулой (78). Но чем значительнее скорость, тем больше величина $\frac{\pi}{\pi + P}$, и, следовательно, реакция газового потока с увеличением скорости возрастает несколько энергичнее, чем в случае потока жидкости. Вычислим коэффициент $\frac{\pi}{\pi + P}$ при предельном значении s , равном 0,2, и при значениях, недалеких от предельного. Счет будем вести с точностью до 0,01. Полагая $s_0 = 0,2$, имеем

$$\mu = 3,9; \quad \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1+t} dt = j(\mu) = 0,144;$$

$$k(\mu) = \frac{16\mu^3}{4\mu^2-1} j(\mu) - \frac{4\mu}{2\mu+1} - \frac{\pi}{4\mu^2-1} = 0,459;$$

$$P(0,2) = 1 + \frac{6}{29} \cdot 0,857 + \frac{12}{5} \cdot 0,459 = 2,28; \quad \frac{\pi}{\pi + P} = 0,58;$$

при этом $v_0 = c$, где c — скорость звука в далеких частях газового потока; если p_1 — давление в этой области, равное 1 ат, то в случае воздуха $c = 333$ м/сек.

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{11} = 0,1818$$

$$\mu = 3,5; \quad v_0 = c \sqrt{\frac{10}{11}} \approx 318 \text{ м/сек};$$

$$j(\mu) = 0,1625; \quad k(\mu) = 0,508;$$

$$P(0,1818) = 4 - 1,818 - \frac{1,818^2}{4 \cdot 1,091} + \frac{3 \cdot 1,818^2}{54,54} \cdot 0,808 + \frac{3 \cdot 1,818^2}{1,091^2} \cdot 0,102 = 2,42;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0,56.$$

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{17} = 0,1176$$

$$\mu = 2,5; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{17}} c = 255 \text{ м/сек};$$

$$j(\mu) = 0,2375; \quad k(\mu) = 0,676;$$

$$P(0,1176) = 4 - 1,176 - \frac{1,176^2}{4 \cdot 1,412} + \frac{3 \cdot 1,176^2}{42,354} \cdot 0,640 + \frac{3 \cdot 1,176^2}{1,412^2} \cdot 0,135 = 2,93;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0,52.$$

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{29} = 0,069$$

$$\mu = 2; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{29}} c = 195,5 \text{ м/сек};$$

$$j(\mu) = 0,3069; \quad k(\mu) = 0,8085;$$

$$P(0,069) = 4 - 0,69 - \frac{0,69^2}{4 \cdot 1,655} + \frac{3 \cdot 0,69^2}{33,11} \cdot 0,508 + \frac{3 \cdot 0,69^2}{1,655^2} \cdot 0,162 = 3,34;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0,485.$$

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{53} = 0,0377$$

$$\mu = 1,75; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{53}} c = 144,6 \text{ м/сек};$$

$$j(\mu) = 0,3578; \quad k(\mu) = 0,8925;$$

$$P(0,0377) = 4 - 0,377 + 0,010 = 3,63;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0,464.$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент формулы давления резко падает с уменьшением скорости вблизи предельных скоростей, а затем падение его замедляется. Так, при уменьшении скорости с 333 до 318 м/сек он падает с 0,58 до 0,56, убывая на 0,02, т. е. 3,4% своей величины. Такова же числовая величина падения его при изменении скорости от 196 до 145 м/сек, хотя разность этих скоростей в 3,4 раза больше. Заметим, сверх того, что при скорости в 145 м/сек коэффициент давления уже близок к тому значению, которое вычисляется из формулы Кирхгоффа:

$$\frac{\pi}{\pi + 4} = 0,44;$$

разность этих значений равна всего 0,024, т. е. около 6% большего из них. Полное приращение коэффициента

$$0,58 - 0,44 = 0,14$$

составляет около 32% его низшей величины. Итак, при скоростях не очень значительных коэффициент в формуле давления потока на пластинку, или, все равно, сопротивления газовой среды движению в ней пластинки, меняется очень медленно; поэтому при таких условиях среда сопротивляется приблизительно по закону квадрата скорости. Но, когда скорость движения пластинки близка к звуковой, сопротивление возрастает весьма заметно. Этот вывод наш вполне подтверждается имеющимися опытными данными (см. ниже).

Отметим, далее, сравнительно простую формулу, которая при принятой точности счета дает результаты, совершенно согласные с теми, которые мы получили по формуле (85). Она такова:

$$P(s_0) = 4 - 10s_0 + 7s_0^2. \quad (86)$$

Подсчитываем $P(s_0)$ по формуле (86) и по формуле (85) и для сравнения ищем друг под другом результаты. Получаем следующую таблицу:

s_0	0,2	0,1818	0,1176	0,069	0,0377
$P(s_0)$ по (85)	2,28	2,42	2,93	3,34	3,63
$P(s_0)$ по (86)	2,28	2,41	2,92	3,34	3,63

Получаемая по сравниваемым формулам разница значений P несколько не влияет на величину коэффициента сопротивления при принятом приближении.

Окончательная формула сопротивления принимает теперь вид

$$R = \frac{\pi}{\pi + 4 - 10s_0 + 7s_0^2} 2\rho_1 v_0^2; \quad (87)$$

при этом

$$s_0 = \frac{v_0^2}{5c^2},$$

где c представляет скорость распространения звука в далеких частях потока, равную 333 м/сек, если движение пластинки происходит в атмосфере.

Если v_0 не очень велико ($< \frac{c}{\sqrt{10}}$), то член $7s_0^2$ незначителен и в пределах точности им можно пренебречь; тогда

$$R = \frac{\pi}{\pi + 4 - 2 \frac{v_0^2}{c^2}} 2l\rho_1 v_0^2.$$

Приближенная формула (87) может быть получена из точного выражения для силы давления газовой струи на пластинку совершенно тем же путем, как и соответственная формула (65) в предшествующей главе. Нетрудно убедиться, что если мы заменим в знаменателе соотношения (78) величину $x_{n,0}$ приближенно через

$$x_n(0) + s_0 x'_n(0) + \frac{s_0^2}{2} x''_n(0),$$

то, совершив вычисления и положив $m = 0$, придем к формуле (87); разница будет лишь в том, что знаменатель окажется равным $\pi + 4 - 10s_0 + 7,2s_0^2$, а это не имеет значения при принятой нами точности счета.

Посмотрим теперь, что даст нам формула (87), если мы попытаемся определять по ней сопротивление воздуха движению, применяя ее за законным пределом ее приложимости. Остановим при этом наше внимание на коэффициенте

$$K = \frac{\pi}{\pi + 4 - 10s_0 + 7s_0^2};$$

пока скорость пластинки не превосходит звуковой, коэффициент этот возрастает сначала очень медленно, потом значительно быстрее вместе с возрастанием скорости, как было показано выше; при этом пределы изменения его ограничены крайними значениями 0,44 и 0,58. Это возрастание продолжается и после того, как s_0 перейдет значение 0,2, соответствующее равенству $v_0 = c$; так, при $v_0 = \frac{3}{2}c \approx 500$ м/сек $s_0 = 0,45$, $K = 0,77$; при $v_0 = \frac{5}{7}\sqrt{7}c \approx 629$ м/сек $s_0 = \frac{5}{7}$ и K достигает своего максимального значения 0,88, вдвое превышающего величину его при малых скоростях. Далее K убывает, и при $v_0 = 2,5c \approx 833$ м/сек $s_0 = 1,25$, $K = 0,56$.

Отмеченные результаты с качественной стороны находятся в довольно хорошем согласии с данными опыта. Это тем более любопытно, что опыты производились в условиях, чрезвычайно далеких от условий рассмотренной теоретической задачи, так как на деле K вычислялось из на-

блюдений над полетом артиллерийских снарядов. Полученные таким путем данные приведены в руководстве по баллистике Забудского², которым мы главным образом и пользовались в целях сравнения. В действительности изменение коэффициента K при скоростях, не превышающих 240 м/сек, почти незаметно; засим он очень быстро начинает возрастать, увеличиваясь в 2,8 раза при изменении скорости снаряда от 240 до 420 м/сек; далее он держится на одной и той же высоте, пока скорость не превзойдет 550 м/сек, а засим спадает, приобретая при 1100 м/сек ту же величину, как и при скорости в 340 м/сек. Таким образом, действительное изменение K отличается большей резкостью: с большей ясностью выступает закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости при скоростях, не очень значительных или очень больших, и более быстро оказывается рост коэффициента при скоростях, сопредельных со звуковой. Такое явление до некоторой степени можно было и предвидеть: в самом деле, в нашей теоретической задаче струйки сбегает с движущейся пластинки лишь в двух направлениях, тогда как при полете артиллерийского снаряда они срываются с него во всех меридиональных плоскостях; если бы в каждой из этих плоскостей движение происходило, как в рассмотренном нами случае, то коэффициент сопротивления должен был бы изменяться, как наше K^2 ; в действительности колебания его не так значительны; это потому, что струйки, разбегаясь по снаряду, расширяются и, стало быть, должны слабее давить на тело снаряда вблизи его контуров. Лучших результатов нельзя было ожидать и по той причине, что мы прилагаем формулу (87) вне тех пределов, в которых доказана ее применимость.

Кроме указанных причин имеется и еще один уклоняющий фактор — это вязкость воздуха и трение его о бока движущегося тела; благодаря вязкости позади пластинки должны образоваться вихри, понижающие давление в этой области и ведущие вследствие этого к увеличению сопротивления. Это обстоятельство сказывается уже и при малых скоростях; так, из опытов Тибо оказалось, что коэффициент K равен приблизительно 0,64 вместо 0,44, если скорость колеблется³ в границах от 0,5, до 11 м/сек.

Нам представляется, что при значительных скоростях влияние вязкости не будет так велико.

В заключение этой главы укажем способ построения теоретической формулы, разрешающей задачу о сопротивлении в том случае, если скорость движения пластинки превосходит звуковую. В этом случае по тем же причинам, как и при истечении газа из сосуда, нельзя ожидать сплошного установившегося движения. Здесь, как и там, должна образоваться некоторая поверхность раздела, рассекающая область текущего газа на две части, движение в которых обладает различным характером. Эту по-

² Забудский Н. Внешняя баллистика. СПб., 1895, стр. 47—57, а также таблица 4, фиг. 30.

³ Там же, стр. 14.

верхность, состоящую в рассматриваемом случае из двух полостей и представленную на рис. 6, мы будем считать облегающей звуковых волн. Внутри уплотненного и разогретого воздушного слоя, выделяемого ею из атмосферы, движение будет установившееся, и наше переменное τ везде менее $1/(2\beta + 1)$; на самой поверхности $\tau = 1/(2\beta + 1)$, и относительная скорость проникающих в рассматриваемый слой воздушных частиц равна скорости звука, которая в этом месте наблюдалась бы при спокойном газе и которая равна скорости летящей пластинки. При переходе через границу слоя во внешнюю атмосферу мы встретим резкое падение давления; здесь движение будет неустановившееся. Приняв ту же гипотезу, как и в задаче об истечении, мы найдем, что угол, под которым струйки в их относительном движении (при неподвижности пластинки) пересекают границы области сгущенного слоя, будет иметь постоянную величину во всех точках поверхности раздела. Этого добавочного условия достаточно для математического анализа движения внутри выделенного воздушного слоя, а следовательно, и для решения вопроса о давлении воздуха на пластинку. Заметим, что самое существование поверхности раздела и сжатого воздушного слоя отнюдь нельзя считать гипотетическим, так как эти явления с несомненностью констатированы были Э. Махом и другими учеными наблюдателями.

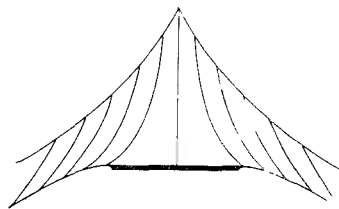


Рис. 6

Глава V

ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

Если скорости течения газа в рассматриваемой задаче достаточно далеки от предельной скорости c , определяемой равенством $\tau_0 = 1/(2\beta + 1)$, то формулы, разрешающие вопрос, приближенно могут быть представлены в более простой и компактной форме при помощи введения некоторого комплексного переменного.

В главе I выведены были следующие основные формулы, связывающие производные от потенциала скоростей и функции тока по независимым переменным τ и θ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Это формулы (14) главы I. Введем обозначение

$$\sigma = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau, \quad (88)$$

где τ_0 — максимальная величина τ , соответствующая границе струи. Тогда приведенные формулы смогут быть изображены в форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = K \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

причем

$$K = \frac{1 - (2\beta + 1) \tau}{(1 - \tau)^{2\beta + 1}}.$$

В области течения коэффициент K изменяется; но если скорости движения газа не близки к предельной, то K остается заключенным в весьма тесных пределах. Покажем прежде всего, что K уменьшается с увеличением τ . Для сего составляем производную $\frac{dK}{d\tau}$:

$$\frac{dK}{d\tau} = - \frac{2\beta(\beta + 1) \tau}{(1 - \tau)^{2\beta + 2}}.$$

Ясно, что она сохраняет знак минус, каково бы ни было положительное количество τ , а потому утверждение наше правильно. Затем сделаем вычисление значений K при крайних величинах τ , допускаемых рассматриваемой задачей; тогда на основании сказанного K будет заключаться между найденными таким образом граничными его значениями. Переходя для удобства вычислений от переменного τ к переменному $s = \frac{\tau}{1 - \tau}$, мы получим для K значение

$$K = (1 - 2\beta s) (1 + s)^{2\beta}$$

или, положив β по-прежнему равным 2,5,

$$K = (1 - 5s) (1 + s)^5.$$

Отсюда находим

$$s_0 = \frac{1}{12\beta} = \frac{1}{30}, \quad 1 > K > 0,982;$$

$$s_0 = \frac{1}{14\beta} = \frac{1}{35}, \quad 1 > K > 0,987;$$

$$s_0 = \frac{1}{16\beta} = \frac{1}{40}, \quad 1 > K > 0,990;$$

$$s_0 = \frac{1}{18\beta} = \frac{1}{45}, \quad 1 > K > 0,9920;$$

$$s_0 = \frac{1}{243} = \frac{1}{60}, \quad 1 > K > 0,9957;$$

$$s_0 = \frac{1}{323} = \frac{1}{80}, \quad 1 > K > 0,9976;$$

$$s_0 = \frac{1}{503} = \frac{1}{125}, \quad 1 > K > 0,9992;$$

$$s_0 = \frac{1}{2003} = \frac{1}{500}, \quad 1 > K > 0,9995.$$

Соответственные величины максимальной скорости v_0 определяются по формуле

$$v_0^2 = 5c^2 s_0,$$

где c — скорость звука при том физическом состоянии газа, в котором он находится на границах струй. При приведенных выше значениях s_0 , предположив вместе с тем, что вблизи границ струй господствуют средние атмосферные условия, мы получим для v_0 соответственно следующие значения:

$$136; 126; 118; 111; 96; 83; 66,6; 33,3 \text{ м/сек};$$

числа для простоты округлены; c принято равным 333 м/сек.

Приближение, которое мы теперь допустим, состоит в том, что K принимается равным единице. Тогда имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

и, следовательно,

$$w = \varphi + i\psi = F(\sigma + i\theta),$$

причем σ определяется формулой (88).

Будем опять наряду с разрешаемой задачей о течении газа рассматривать соответственное движение жидкости несжимаемой, оставляя те же граничные условия: преграждающие стенки — плоские, область течения беспрестанно простирается в некоторых направлениях; позади стенок, с которых срывается текущая масса, господствует постоянное давление и имеется спокойная жидкость или газ. Задача о струях в несжимаемой жидкости разрешается соотношением

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = F(\vartheta + i\theta), \quad \vartheta + i\theta = \ln \frac{v_0 dz}{dw_1},$$

где $\vartheta = \ln \frac{v_0}{v}$, θ — тот же угол скорости с осью OX , как и в задаче о газах. На всех границах ψ_1 имеет то или другое постоянное значение; на преграждающих стенках $\theta = \text{const}$, а на струях скорость $v = \text{const} = v_0$, и, следовательно, $\vartheta = 0$. Таковы условия, налагаемые на w_1 , функцию комплексного переменного $\vartheta + i\theta$. Способ отыскания такой функции

дается методом Н. Е. Жуковского в цитированном выше его сочинении «Видоизменение метода Кирхгофа».

Ясно, что, найдя функцию F , решающую данную задачу о несжимаемой жидкости, мы получим отыскиваемое решение той же задачи о движении газа, положив

$$\varphi + i\psi = F(\sigma + i\theta),$$

т. е. просто заменив ϑ через σ ; тогда при прохождении переменными θ и σ границ их области ψ будет получать те же постоянные значения, как и ψ_1 ; где $\vartheta = 0$, там, конечно, и $\sigma = 0$, а следовательно, $\tau = \tau_0$.

Раз функция $\varphi + i\psi$ найдена в зависимости от $\sigma + i\theta$, легко найти координаты в зависимости от переменных σ и θ , изучить контуры струй и определить характерные для задачи постоянные — количества несомого струями газа и равнодействующие давлений на преграды.

Для определения зависимости координат от σ и θ прежде всего выразим τ через σ . На основании формулы (88) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{\tau}} &= -\frac{1}{2\tau \sqrt{\tau}} \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\tau} (1-\tau)^\beta}, \\ \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{\tau} (1-\tau)^\beta} &= -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau \sqrt{\tau} (1-\tau)^{\beta+1}} \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{K}{\sqrt{\tau}}; \end{aligned}$$

а так как мы приняли

$$K = \frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}} = 1,$$

то из этих соотношений выводим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}; & \frac{1}{\sqrt{\tau}} &= \frac{C_1 e^\sigma + C_2 e^{-\sigma}}{2}; \\ \frac{1}{\sqrt{\tau} (1-\tau)^\beta} &= \frac{C_1 e^\sigma - C_2 e^{-\sigma}}{2}. \end{aligned} \tag{89}$$

Положив $\tau = \tau_0$, найдем

$$\frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}}, \quad \frac{C_1 - C_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0} (1-\tau_0)^\beta}. \tag{90}$$

Обратимся теперь к формулам (9) и (10) главы I, дающим производные от координат по φ и ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}; \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau} (1-\tau)^\beta}, & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\alpha\tau} (1-\tau)^\beta}. \end{aligned}$$

На основании высказанного выше правила мы получим решение интересующей нас задачи о газовом потоке, полагая

$$\varphi + i\psi = ku^2, \quad \frac{\cos^2 \lambda}{u} = \sin \lambda + \sin(\theta - i\sigma). \quad (92)$$

Отыщем теперь выражения координат через σ и θ . Для этого обращаемся к последней из формул (94). Она дает

$$2\sqrt{2\alpha} z = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_2 e^{-\sigma+i\theta} w' - C_1 \int w e^{\sigma+i\theta} d(\sigma + i\theta) + C_2 \int w' e^{-\sigma+i\theta} d(\sigma - i\theta).$$

Положив для краткости под знаками интегралов

$$t = e^{\sigma+i\theta}, \quad t' = e^{-\sigma+i\theta}$$

и вводя выражения w и w' из равенств (92), получим

$$2\sqrt{2\alpha} z = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_2 e^{-\sigma+i\theta} w' - 4kC_1 \cos^2 \lambda \int \frac{t^2 dt}{(2 \sin \lambda t + i - it^2)^2} - \\ - 4kC_2 \cos^2 \lambda \int \frac{t'^2 dt'}{(2 \sin \lambda t' + i - it'^2)^2}.$$

По интегрировании будем иметь

$$2\sqrt{2\alpha} z = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_2 e^{-\sigma+i\theta} w' + \\ + 2k \cos^2 \lambda C_1 \frac{it \cos 2\lambda + \sin \lambda}{2 \sin \lambda t + i - it^2} + 2k \cos^2 \lambda C_2 \frac{it' \cos 2\lambda + \sin \lambda}{2 \sin \lambda t' + i - it'^2} - \\ - 2ik \cos \lambda C_1 \operatorname{arctg} \frac{t + i \sin \lambda}{i \cos \lambda} - 2ik \cos \lambda C_2 \operatorname{arctg} \frac{t' + i \sin \lambda}{i \cos \lambda} + L,$$

или, вводя сумму и разность имеющихся в этой формуле арктангенсов и умножая все равенство на i ,

$$\frac{2\sqrt{2\alpha} zi}{k} = C_1 i e^{\sigma+i\theta} \frac{\cos^4 \lambda}{[\sin \lambda + \sin(\theta - i\sigma)]^2} + C_2 i e^{-\sigma+i\theta} \frac{\cos^4 \lambda}{[\sin \lambda + \sin(\theta + i\sigma)]^2} - \\ - C_1 \cos^2 \lambda \frac{\cos 2\lambda - i \sin \lambda e^{-\sigma-i\theta}}{\sin \lambda + \sin(\theta - i\sigma)} - C_2 \cos^2 \lambda \frac{\cos 2\lambda - i \sin \lambda e^{\sigma-i\theta}}{\sin \lambda + \sin(\theta + i\sigma)} + \\ + \cos \lambda (C_1 + C_2) \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta} + 2i \sin \lambda}{\cos 2\lambda + e^{2\theta i} + i \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta}} \frac{\cos \lambda}{i} \right\} + \\ + \cos \lambda (C_1 - C_2) \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(e^\sigma - e^{-\sigma}) e^{i\theta}}{1 - e^{2\theta i} - i \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta}} \frac{\cos \lambda}{i} \right\} + Li. \quad (93)$$

Нетрудно убедиться, что оба арктангенса, входящие в эту формулу, всюду изменяются непрерывно; что при стремлении σ к ∞ , каково бы ни было θ , первый из них стремится к $-\frac{\pi}{2} + \lambda$, а второй — к $\frac{\pi}{2} - \lambda$, и, следовательно, L , произвольное постоянное интегрирования, можно

определить так, чтобы при $\sigma = \infty$ было $z = 0$. Заметим, далее, что первый из этих арктангенсов нигде не достигает значения $\pi/2$, ибо знаменатель его аргумента нигде не обращается в нуль; второй переходит через $\pi/2$ на линии, которая определяется равенством

$$2 \sin \theta + \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) = 0.$$

Составим теперь выражение длины пластинки $2l$. Для сего по формуле (93) определяем

$$2l = -iz_1 + iz_2,$$

равное разности результатов подстановки в выражение $-iz$ значений $\sigma = 0$, $\theta = \pi/2$ и $\sigma = 0$, $\theta = -\pi/2$; заметим, что на основании сказанного нами об изменении второго арктангенса формулы (93)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma=0, \theta=\frac{\pi}{2} \\ \sigma=0, \theta=-\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \operatorname{arctg} \frac{(e^\sigma - e^{-\sigma}) e^{i\theta} \cos \lambda}{i - ie^{2\theta i} + \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{\theta i}} = -\pi.$$

Такая же подстановка в первый из арктангенсов дает в результате нуль. Приняв это во внимание, легко находим после простых приведений

$$\frac{2l \sqrt{2\alpha}}{k} = 4 \frac{C_1 + C_2}{2} + \pi \cos \lambda \frac{C_1 - C_2}{2},$$

а отсюда на основании формул (90)

$$2l \frac{\sqrt{2\alpha\tau_0}}{k} = 4 + \pi \cos \lambda (1 - \tau_0)^{-\beta}. \quad (94)$$

Обратимся к вычислению равнодействующей R [сил] давления на пластинку. Пользуемся для сего формулой

$$p = p_0 (1 - \tau)^{\beta+1},$$

где p_0 — давление в критической точке; оно определяется через p_1 , давление, имеющее место позади пластинки и господствующее во всей спокойной области газовой среды, формулой

$$p_0 (1 - \tau_0)^{\beta+1} = p_1.$$

Для определения R имеем

$$R = \left(\int_0^{l_1} p_0 (1 - \tau)^{\beta+1} dy \right)_{\theta=\pi/2} + \left(\int_{-l_2}^0 p_0 (1 - \tau)^{\beta+1} dy \right)_{\theta=-\pi/2} - 2p_1 l;$$

здесь через l_1 и l_2 обозначены соответственно длины частей пластинки OA и OB от критической точки до [ее] концов. Совершив интеграцию по

частям, получаем

$$R = p_0 (1 - \tau_0)^{\beta+1} (l_1 + l_2) - 2p_1 l + (\beta + 1) p_0 \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta} d\tau (y_{\theta=\pi/2} - y_{\theta=-\pi/2}).$$

Введем в это выражение переменное σ ; на основании связи между τ и σ (формулы (88) и (89))

$$(1 - \tau)^{\beta} d\tau = -2\tau d\sigma = -\frac{8}{(C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma})^2} d\sigma;$$

пределы интегрирования по σ суть ∞ и 0 ; заметим, кроме того, что первые два слагаемые в формуле R сокращаются, так как $l_1 + l_2 = 2l$, $p_0 (1 - \tau_0)^{\beta+1} = p_1$; поэтому

$$R = 8(\beta + 1) p_0 \int_0^{\infty} (y_{\theta=\pi/2} - y_{\theta=-\pi/2}) \frac{d\sigma}{(C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma})^2}$$

или, проинтегрировав по частям,

$$\begin{aligned} \frac{C_1 R}{4(\beta + 1) p_0} = & - \int_0^{\infty} (y_{\theta=\pi/2} - y_{\theta=-\pi/2}) \frac{1}{C_1 e^{2\sigma} + C_2} + \\ & + \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=\pi/2} - \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=-\pi/2} \right\} \frac{d\sigma}{C_1 e^{2\sigma} + C_2}. \end{aligned}$$

Подстановка дает результат

$$\frac{2l}{C_1 + C_2}.$$

Что касается оставшегося интеграла, то по формуле (91), положив $\theta = \pi/2$ и помня, что при этом $\psi = 0$, имеем

$$2 \sqrt{2\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=\pi/2} = (C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right)_{\theta=\pi/2};$$

при

$$\theta = -\pi/2, \psi = 0$$

получим

$$2 \sqrt{2\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=-\pi/2} = - (C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right)_{\theta=-\pi/2}.$$

Воспользовавшись этими формулами и совершив в выражении R новую интеграцию по частям, приводим это выражение к виду

$$\frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta + 1) p_0} = \frac{4l \sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} + \int_0^{\infty} (\varphi_{\theta=\pi/2} + \varphi_{\theta=-\pi/2}) e^{-\sigma} + \int_0^{\infty} (\varphi_{\theta=\pi/2} + \varphi_{\theta=-\pi/2}) e^{-\sigma} d\sigma.$$

Из формул (92) имеем

$$\varphi_{\theta=\pi/2} = \frac{k \cos^4 \lambda}{\left(\sin \lambda + \frac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \right)^2}, \quad \varphi_{\theta=-\pi/2} = \frac{k \cos^4 \lambda}{\left(\sin \lambda - \frac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \right)^2};$$

а потому, выполнив подстановку и вводя в интеграл переменное $\xi = e^{-\sigma}$, получаем

$$\frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta+1)p_0} = \frac{4l \sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} - 2k(1 + \sin^2 \lambda) + \\ + 4k \cos^4 \lambda \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2 + 2\xi \sin \lambda)^2} + 4k \cos^4 \lambda \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2 - 2\xi \sin \lambda)^2}.$$

Эти определенные интегралы имеют соответственно значения

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left\{ \frac{\sin \lambda - \cos 2\lambda}{2 + 2 \sin \lambda} - \sin \lambda + \frac{1}{\cos \lambda} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \right\}$$

и

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left\{ -\frac{\sin \lambda + \cos 2\lambda}{2 - 2 \sin \lambda} + \sin \lambda + \frac{1}{\cos \lambda} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \right\}$$

и, следовательно, по сложении дают

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left(-1 + \frac{\pi}{2 \cos \lambda} \right);$$

подставив это выражение в формулу для R , получаем

$$\frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta+1)p_0} = \frac{4l \sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} - 4k + \pi k \cos \lambda.$$

Так как (см. (94))

$$2l \sqrt{2\alpha \tau_0} = 4k + \frac{\pi k \cos \lambda}{(1 - \tau_0)^\beta},$$

а

$$C_1 + C_2 = \frac{2}{\sqrt{\tau_0}}, \quad C_1 = \frac{1 + (1 - \tau_0)^{-\beta}}{\sqrt{\tau_0}},$$

то

$$R = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha}} k \cos \lambda \sqrt{\tau_0} (\beta + 1) p_0. \quad (95)$$

Из только что приведенной формулы для $2l$ имеем

$$\frac{k}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{2l \sqrt{\tau_0}}{4 + \pi (1 - \tau_0)^{-\beta}};$$

кроме того,

$$p_0 = k \rho_0^\gamma, \quad (\beta + 1) p_0 = \frac{\gamma k \rho_0^\gamma}{\gamma - 1} = \alpha \rho_0 = \alpha \rho_1 (1 - \tau_1)^{-\beta},$$

ибо по формуле (5) главы I

$$\bar{\alpha} = \frac{k \gamma \rho_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1},$$

а плотность ρ_1 на струе, равная плотности в далеких областях потока, связана с плотностью ρ_0 в критической точке формулой

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - \tau_0)^\beta;$$

наконец, приняв в расчет формулу $\sqrt{2\alpha\tau_0} = v_0$ — скорости на струе и в бесконечно удаленных частях движущейся массы газа, получим из (95)

$$R = \frac{\pi \cos \lambda}{4(1 - \tau_0)^\beta + \pi \cos \lambda} 2lv_0^2 \rho_1.$$

Эта формула при $\beta = 0$, как и должно быть, обращается в формулу Рэлея для потока несжимаемой жидкости, а при $\lambda = 0$ дает приближенное решение задачи о давлении на пластинку симметричного газового потока.

Вычисляя коэффициент $\frac{\pi \cos \lambda}{4(1 - \tau_0)^\beta + \pi \cos \lambda}$ при принятых в начале этой главы значениях s_0 , для которых применима указанная нами приближенная метода, и ограничиваясь при этом лишь случаем симметричного потока, мы приходим к следующему результату: при изменении s_0 от 0 до $\frac{1}{12\beta}$ и скорости потока от 0 до 136 м/сек коэффициент $\frac{\pi}{4(1 - \tau_0)^\beta + \pi}$ колеблется в пределах 0,440—0,460, причем растет в конце быстрее, чем в начале; так, при $s_0 = \frac{1}{24\beta}$ и $v_0 = 96$ м/сек он еще равен только 0,449.

Таким образом, при не очень значительных скоростях оказывается почти точным закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости.

Выражение

$$K = [1 - (2\beta + 1)\tau] (1 - \tau)^{-2\beta-1}$$

[см. стр. 84], которое при изложении приближенной методы мы приняли равным единице, будет ей в точности равно в двух случаях:

1) если $\beta = 0$; это случай движения несжимаемой жидкости, так как формула для плотности $\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta$ приводится к равенству $\rho = \text{const}$;

2) при $\beta = -\frac{1}{2}$; тогда

$$p = k\rho^{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{k}{\rho}.$$

Если движущаяся материя есть идеальный газ, то для осуществления этого требования надо известным образом отнимать тепло от текущей массы газа. Создать такую обстановку движения газа в действительности не представляется возможным. Но задача, к которой мы приходим, положив $\beta = -\frac{1}{2}$, имеет интерес с совершенно иной точки зрения.

В самом деле, обратим внимание на начальные уравнения (8) главы I. Подставим в них на место τ его значение

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right],$$

примем 2α равным -1 и заменим для краткости производные от φ по x и y соответственно через p и q ; тогда означенные уравнения дадут

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \frac{p dy - q dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = d\varphi.$$

Отсюда ясно, что если мы положим $\varphi = z$, то x , y , z будут прямоугольными координатами точек минимальной поверхности.

Формулы (88) — (92) по замене в них τ через $-u$ приводят к следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = C_1 e^\sigma + C_2 e^{-\sigma}, \quad \sqrt{\frac{1+u}{u}} = C_1 e^\sigma - C_2 e^{-\sigma},$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{\sqrt{u_0}}, \quad C_1 - C_2 = \sqrt{\frac{1+u_0}{u_0}};$$

здесь произвольным постоянным придано несколько иное значение, чем в формулах (88) — (92). Если мы положим

$$\sigma + i\theta = t, \quad \sigma - i\theta = t_1,$$

то

$$z + i\psi = f(t), \quad x + iy = C_1 \int e^{t'} f'(t) dt + C_2 \int e^{-t_1'} f_1'(t_1) dt_1;$$

при этом

$$u = p^2 + q^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{q}{p}.$$

Для квадрата линейного элемента поверхности легко находим выражение

$$ds^2 = (C_1 e^\sigma - C_2 e^{-\sigma})^2 (dz^2 + d\psi^2) = \frac{1+p^2+q^2}{p^2+q^2} (dz^2 + d\psi^2).$$

Если плоскость OXY горизонтальна, то кривые $z = \text{const}$ будут горизонталями поверхности; кривые $\psi = \text{const}$ суть их ортогональные траектории. Эти формулы позволяют определить многие формы минимальных поверхностей.

1. Положив $f(t) = e^{nt}$, находим

$$x + iy = \frac{nC_1}{n+1} (z + i\psi)^{\frac{n+1}{n}} + \frac{nC_2}{n-1} (z - i\psi)^{\frac{n-1}{n}}.$$

При n соизмеримом мы получаем, таким образом, алгебраические поверхности весьма разнообразного вида; исключение представляет случай $n = 1$, когда поверхность оказывается трансцендентной. Положив $j(t) = At$, получим при A действительном катеноид, при A мнимом — геликоид.

2. Гораздо более любопытна другая группа минимальных поверхностей, получаемая из приведенных выше формул: мы можем с их помощью отыскать минимальную поверхность, вписанную в некоторый за-

данный многоугольный контур. Для сего он должен состоять из горизонтальных и вертикальных прямолинейных отрезков (за плоскость OXY по-прежнему принимаем какую-нибудь горизонтальную плоскость).

Положив в найденных выше формулах для простоты $u_0 = \infty$ и вследствие этого $C_1 = -C_2 = 1/2$, замечаем следующее: на каждом горизонтальном звене граничного контура мы будем иметь, очевидно, $z = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$; если же рассматриваемый граничный отрезок вертикален, то на нем $\psi = \text{const}$, $p^2 + q^2 = \infty$ и $\sigma = 0$. Таким образом, области $z + i\psi$ и $\sigma + i\theta$ будут ограничены прямыми линиями. Отыскав по известному способу конформное изображение этих областей на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного s , мы приведем решение задачи к выполнению квадратур.

В качестве весьма простого примера укажем поверхность, вписанную в пятиугольный контур следующего вида: одной его стороной служит отрезок оси Oy , делящийся пополам в начале координат; от концов этого отрезка отходят две равные стороны, параллельные оси z ; из их конечных точек проводим два бесконечных отрезка параллельно положительному направлению оси Ox , дополняющие контур.

Эта поверхность выразится следующими уравнениями:

$$\sin \frac{2y \sqrt{1-k^2}}{a} = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{\psi}{a} \operatorname{cn} \frac{\psi}{a} \operatorname{dn} \frac{iz}{a}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\psi}{a} \operatorname{sn}^2 \frac{iz}{a}};$$

$$\operatorname{sh} \frac{2x \sqrt{1-k^2}}{a} = - \frac{2ki \operatorname{sn} \frac{iz}{a} \operatorname{dn} \frac{iz}{a} \operatorname{cn} \frac{\psi}{a}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\psi}{a} \operatorname{sn}^2 \frac{iz}{a}}.$$

Они легко получаются с помощью указанных выше общих формул, если мы положим

$$\sigma + i\theta = \ln \frac{k \sqrt{1-s^2} + \sqrt{1-k^2 s^2}}{\sqrt{1-k^2}}, \quad z + i\psi = ai \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}.$$

Заметим в заключение, что задание поверхности может быть несколько изменено; так, в число условий можно включить требование, чтобы одна из горизонталей была линией кривизны поверхности; тогда плоскость этой горизонтали пересекает искомую поверхность под постоянным углом, и, следовательно, мы будем иметь при некотором заданном значении z

$$p^2 + q^2 = \text{const},$$

а стало быть, $\sigma = \text{const}$. Точно так же, если известно, что одна из линий $\psi = \text{const}$ есть плоская кривая, то, как нетрудно убедиться, вдоль этой линии будет иметь постоянное значение угол θ .

О ДАВЛЕНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА НА ПРЕГРАЖДАЮЩИЕ ТЕЛА (К ТЕОРИИ АЭРОПЛАНА)¹

§ 1. Введение. Одним из существенных вопросов в теории аэроплана является вопрос о давлении воздуха на крыло. Решить эту задачу во всей ее сложности представляется делом весьма трудным и едва ли посильным современному анализу. А потому представляется не лишенным интереса хотя приблизительно выяснить источники возникновения давления на поддерживающие планы и оценить при этом связь между углами их наклона к направлению движения и подъемной силой. С указанной целью мы ставим следующую задачу: невихревой поток несжимаемой жидкости течет параллельно плоскости с определенной постоянной скоростью в бесконечной дали. Определить его давление на преграждающий цилиндр или изогнутую пластинку. То обстоятельство, что мы рассматриваем вместо воздуха несжимаемую жидкость, не играет существенной роли, так как нам удалось показать, что при скоростях, далеких от скорости звука в воздухе, его сжимаемость не имеет значения².

Если бы потенциал скорости представлял однозначную непрерывную функцию во всей области, занятой жидкостью, то по теореме Эйлера полное давление на преграждающее тело было бы нулем. По этой причине источниками давления могут быть следующие обстоятельства: во-первых, образование струй (поверхностей раздела скоростей); во-вторых, присоединенные вихри и, в-третьих, особенности бесконечно удаленной точки потока и связанная с нею многозначность потенциальной функции скоростей.

Вопрос о давлении на преграждающий цилиндр с образованием струй хорошо выяснен для плоских пластинок даже и в случае сжимаемой жидкости. Закон давления характеризуется для пластинки, с которой срывается несжимаемый поток, как известно, формулой Рэлея

$$P = \frac{\pi \sin \lambda}{4 + \pi \sin \lambda} \rho v_0^2,$$

где ρ — плотность жидкости; v_0 — скорость потока в бесконечной дали; l — ширина пластинки, а λ — угол ее с направлением скорости потока; P — полная сила давления.

¹ Сообщено Московскому математическому обществу в феврале 1910 г. Впервые напечатано отдельным изданием в том же году.

² См. нашу работу «О газовых струях» в Ученых записках Отделения физико-математических наук Московского университета, 1903 г. [стр. 11—96 настоящего издания].

Н. Е. Жуковскому удалось найти удобные формулы для выражения поддерживающей силы давления и в том случае, когда поток срывается с несколько изогнутой пластинки, причем, однако, форма ее не может быть наперед задана³.

Этого вопроса касался также и доклад автора в Московском математическом обществе несколько лет тому назад, причем были даны формулы для распределения скоростей в срывающемся потоке и указан путь для определения давления; форма пластинки и в этом решении не могла быть наперед задана.

Переходя к вопросу о втором возможном источнике возникновения поддерживающей силы, открытом Н. Е. Жуковским, необходимо отметить замечательный по своему изяществу и простоте закон давления

$$P = \rho C v_0,$$

где P , ρ и v_0 имеют те же значения, что и в формуле Рэлея, а C есть сумма циркуляций скорости, возникающая вследствие присоединенных вихрей⁴.

В настоящей работе я преследую цель вычислить давление, возникающее из третьего источника. Оно обязано своим возникновением циркуляции скорости вокруг бесконечно удаленной точки. В этом случае может совершенно не быть вихрей в области, занятой жидкостью; отсутствуют и воображаемые присоединенные вихри внутри преграждающего цилиндра, который может сводиться к простой изогнутой пластинке. Тем не менее давление выражается той же самой формулой Н. Е. Жуковского, в которой под C следует разуметь циркуляцию скорости около бесконечности. Направление поддерживающей силы, как и в случае присоединенных вихрей, перпендикулярно к направлению потока в бесконечной дали. Само собою разумеется, что скорости всюду в потоке остаются конечными и изменяются непрерывно. Если бы при этом потоке существовали стоячие вихревые шнуры, то их присутствие, как оказывается, лишь косвенно повлияло бы на давление, вызывая изменение циркуляции около бесконечно удаленной точки; циркуляции около самих вихрей никакой результирующей силы не вносят. Формулы, при этом получающиеся, по моему мнению, дают хорошее объяснение действия воздуха на крылья аэроплана и согласуются с наблюдающимися явлениями.

§ 2. Вывод общей формулы для определения слагающих сил давления. Примем за плоскость OXY направляющую плоскость потока. Пусть поток прегражден цилиндром определенной формы. Мы можем изобразить область, занятую жидкостью, область комплексного переменного

См. Дневник XII съезда естествоиспытателей и врачей в 1909 г. [и статью «О подсысывающем действии потока воздуха на пластинку». — Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IV, вып. 2, 1909 или Собрание сочинений, т. II. М., Гостехиздат, 1949].

⁴ Жуковский Н. Е. О присоединенных вихрях. — Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XIII, вып. 2, 1906 [см. также Избранные сочинения, т. II, Гостехиздат, 1948].

$z = x + iy$, на круге или на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного u или на какой-либо иной площади, смотря по удобству, в целях простоты решения задачи. При этом контуру цилиндра будет соответствовать граница области u , а бесконечно удаленной точке области z — определенная точка области u .

Займемся прежде всего разрешением вопроса о давлении потока на цилиндр; при этом для определенности будем предполагать, что z изображено на верхней полуплоскости вспомогательного переменного u . Обозначим через X и Y слагающие полной силы давления на цилиндр. Давление p определяется формулой

$$p = p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \rho \frac{v^2}{2},$$

где p_0 и v_0 — давление и скорость в бесконечно удаленной точке, v — переменная скорость в потоке. Легко находим

$$X = + \frac{\rho}{2} \int v^2 \frac{dy}{ds} ds,$$

$$Y = - \frac{\rho}{2} \int v^2 \frac{dx}{ds} ds,$$

$$Y + iX = - \frac{\rho}{2} \int v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) v ds,$$

где ds — элемент контура цилиндра и интеграл взят по этому контуру. Обозначив через φ потенциал скоростей, через ψ — функцию тока, постоянную на контуре, и через w — комплексное переменное

$$w = \varphi + i\psi,$$

имеем на контуре

$$v ds = d\varphi = dw,$$

$$v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dw}{dz},$$

$$Y + iX = - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw. \quad (1)$$

Интеграл этот легко выразить через коэффициенты разложения функций z и w около точки полуплоскости u , соответствующей бесконечно удаленной точке потока: $u = u_0$, $z = \infty$, $w = \infty$. В самом деле, z может иметь в области течения лишь единственную особую точку, могущую дать Rés,— это простой полюс при $u = u_0$; для w та же точка является полюсом и вместе с тем логарифмической точкой, так как $\left(\frac{dw}{dz} \right)_\infty$ есть конечная величина. Разложения $\frac{dz}{du}$ и $\frac{dw}{du}$ поэтому должны иметь вид

$$\frac{dw}{du} = \frac{A}{(u - u_0)^2} + \frac{B}{u - u_0} + f(u - u_0),$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{D}{(u - u_0)^2} + F(u - u_0),$$

где F и f суть голоморфные функции $u - u_0$. При этих обстоятельствах разложение $\frac{dw}{dz}$ имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D}(u - u_0) + (u - u_0)^2 \Phi,$$

$$\frac{dw}{du} du = \frac{du}{(u - u_0)^2} [A + B(u - u_0) + (u - u_0)^2 f];$$

функция Φ голоморфна.

Уравнение (1) по формуле Коши переписывается так:

$$Y + iX = \pm 2\pi i \rho B \frac{A}{D}.$$

При выборе знака необходимо принять во внимание, что при обходе в плоскости z контура в направлении от оси OX к оси OY обход около полюса z (точки u_0) в плоскости u будет совершаться обратно от мнимой оси к действительной; поэтому следует взять знак плюс. Что касается B , то это количество — чисто мнимое, и, следовательно, количество

$$-2\pi i B = C,$$

[т. е.] циркуляции скорости около бесконечно удаленной точки, есть величина действительная, обладающая тем же знаком, как и коэффициент мнимой единицы в количестве B . Что касается отношения A/D , то оно представляет значение

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty, u=u_0} = v_0 e^{-i\theta_0},$$

где v_0 — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а θ_0 — угол направления этой скорости с осью OX . Таким образом, получаем

$$Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\theta_0}, \quad (2)$$

$$Y = -\rho C v_0 \cos \theta_0, \quad X = +\rho C v_0 \sin \theta_0,$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$P \perp v_0, \quad P = \rho v_0 |C|.$$

Направление давления получается, если мы повернем скорость потока в бесконечности на прямой угол в направлении от оси OY к оси OX при C положительном и в противоположном направлении, когда оно отрицательно.

§ 3. Давление в присутствии стоячих вихрей. Формула (2), выведенная в предположении отсутствия вихрей в жидкости, будет справедлива и в том случае, если имеются стоячие вихри (или установившиеся вихревые течения в отдельных конечных областях с замкнутыми линиями тока). В самом деле, пусть в потоке имеется вихрь в точке $z = z_0$, отображением которой на плоскости u является точка $u = \alpha$ (z_0 и α , конечно,

комплексны). Слагающие полной силы давления определяются и в этом случае по формуле (1), правая часть которой равна

$$- \pi i \rho \left[\left(\text{Rés} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} \right)_{u=\alpha} + \left(\text{Rés} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} \right)_{u=u_0} \right]$$

(Rés есть сокращение Résidu в смысле, придаваемом этому термину Коши)

$$[\text{Rés} f(u)]_{u=\alpha} = \lim_{u \rightarrow \alpha} (u - \alpha) f(u).$$

Разложение

$$\frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} = \left(\frac{dw}{du} \right)^2 : \frac{dz}{du}$$

в области $u = \alpha$ будет иметь вид

$$\left[\frac{B_1}{u - \alpha} + f_1(u - \alpha) \right]^2 : [z' + z''(u - \alpha) + (u - \alpha)^2 M] = \\ = \frac{1}{z'(u - \alpha)^2} \left[B_1^2 + 2B_1 f_1(0)(u - \alpha) - \frac{z''}{z'} B_1^2 (u - \alpha) + (u - \alpha)^2 N \right],$$

где z' и z'' суть значения $\frac{dz}{du}$ и $\frac{d^2z}{du^2}$ при $u = \alpha$; f_1 , M , N — голоморфные функции $u - \alpha$. Таким образом,

$$\left(\text{Rés} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} \right)_{u=\alpha} = \frac{2B_1}{z'} \left[f_1(0) - \frac{B_1 z''}{2z'} \right].$$

Легко убедиться, что это выражение равно нулю, если вихревой шнур неподвижен. В самом деле, обозначив средние скорости на контуре, окружающем бесконечно малое сечение вихревого шнура, через $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$, имеем

$$\bar{v}_x - i\bar{v}_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dw}{dz} d\lambda,$$

где λ — угол с осью OX радиуса-вектора из точки z_0 в бесконечно близкую точку; так как

$$d\lambda = \frac{dz}{i(z - z_0)},$$

то

$$\bar{v}_x - i\bar{v}_y = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dw}{z - z_0}$$

по бесконечно малому контуру, окружающему точку $z = z_0$, $u = \alpha$. Пользуясь разложением dw/du в соседстве этой точки

$$\frac{dw}{du} = \frac{B_1}{u - \alpha} + f_1(u - \alpha)$$

и принимая во внимание равенство

$$z - z_0 = (u - \alpha)z' + (u - \alpha)^2 \frac{z''}{1.2} + \dots,$$

находим

$$\frac{dw}{z - z_0} = \left\{ \frac{B_1}{(u - \alpha)^2} + \frac{f_1(0)}{u - \alpha} - \frac{B_1}{u - \alpha} \frac{z''}{2z'} + \Phi_1(u - \alpha) \right\} \frac{du}{z'}.$$

При соблюдении выведенного выше условия

$$f_1(0) - B_1 \frac{z''}{2z'} = 0 \quad (3)$$

имеем

$$\bar{v}_x - i\bar{v}_y = 0,$$

что и доказывает неподвижность вихря.

То же заключение можно вывести из простого применения принципа динамики о движении центра тяжести; в самом деле, модуль интеграла

$$\int \frac{dw}{dz} dw,$$

взятого по контуру линии тока, охватывающей вихрь, равен силе давления окружающей жидкости на вихрь, умноженной на некоторое постоянное; если центр тяжести вихря неподвижен, то этот интеграл должен обращаться в нуль, а отсюда вытекает условие (3).

Таким образом, формула (2) вполне решает вопрос о силе, поддерживающей цилиндр в потоке, и во всяком отдельном частном случае подлечит отысканию лишь один коэффициент C в зависимости от величин, характеризующих цилиндр и скорость потока.

Обратимся теперь к разрешению различных частных задач.

§ 4. Давление на часть боковой поверхности круглого цилиндра. Пусть в потоке имеется пластинка, представляющая вырез из боковой поверхности круглого цилиндра. Примем за ось OX линию, делящую пополам центральный угол, опирающийся на дугу круга, по которой эта пластинка пересекается с направляющей плоскостью, к ней перпендикулярной. Обозначив через a радиус дуги, через 2α — центральный угол, стягиваемый дугой ABC , мы изобразим область, занятую жидкостью, на круге радиуса единицы в плоскости комплексного переменного u , положив

$$z = a \frac{h - u}{u(hu - 1)}, \quad (4)$$

где $h = \sin \frac{\alpha}{2}$. При этом соответственные точки областей z и u на рис. 1 и рис. 2 изображены одинаковыми буквами; точка O' , где $u = 0$, соответствует $z = \infty$. Нетрудно убедиться в самом деле, что на окружности круга, представляющего область u ,

$$|z| = a;$$

кроме того, так как

$$\frac{dz}{du} = ah \frac{1 + u^2 - 2hu}{u^2(hu - 1)^2} \quad (5)$$

и обращается в нуль при

$$u = e^{\pm i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)},$$

где соответственно

$$z = ae^{\pm \alpha i},$$

то полному обходу вокруг точек C и A в области z соответствуют полу-

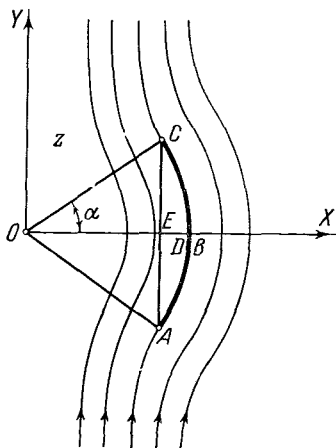


Рис. 1

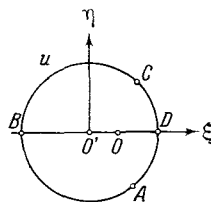


Рис. 2

обходы около тех же точек области u , что и требуется. Кроме упомянутых точек особой является еще точка $u = 0$, представляющая простой полюс функции z .

Обращаясь к определению возможного непрерывного течения жидкости, вводим комплексное переменное Н. Е. Жуковского:

$$\vartheta + i\theta = \ln \frac{v_0}{v} + i\theta = \ln v_0 \frac{dw}{dz},$$

где v_0 — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а v и θ — переменная скорость и ее угол с осью OX . Последняя величина, вполне заданная на контуре, всюду конечная и непрерывная, тем самым определяется во всей области потока. А потому искомое течение возможно лишь при условии одного определенного направления потока в бесконечности. Это условие, как нетрудно показать, возникает всякий раз, если при отсутствии вихря мы имеем на контуре обтекаемого препятствия более одной критической точки такого характера, что контур образует вдающийся в поток угол, меньший полуокружности.

Переходя к определению комплексного переменного

$$w = \varphi + i\psi,$$

обращаем внимание на то обстоятельство, что на граничной окружности области $u\psi$ должно быть постоянно; это постоянное можно принять равным нулю. Бесконечно удаленная точка должна быть полюсом и логарифмической точкой, а в точках C и A dw/du должно обращаться в нуль и притом так, что dw/dz имеет конечный модуль. Всем этим требованиям мы удовлетворим, положив

$$w = Ai \left(\frac{1}{u} - u + 2h \ln u \right), \quad (6)$$

где A реально, так что на граничной окружности

$$w = 2A (\sin \lambda - h\lambda), \quad u = e^{i\lambda};$$

при этом

$$\frac{dw}{du} = -\frac{Ai}{u^2} (1 + u^2 - 2hu) \quad (7)$$

и по (5)

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{Ai}{ah} (hu - 1)^2. \quad (8)$$

Коэффициент A определяется из условий движения вдали от пластинки. При $z = \infty$, $u = 0$ имеем

$$\frac{dw}{dz} = v_0 e^{-i\theta_0} = -\frac{Ai}{ah},$$

откуда

$$A = v_0 ah, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Итак, в бесконечно удаленных точках жидкость течет в направлении оси OY , т. е. параллельно хорде, стягивающей дугу, на которую описывается пластинка.

Поддерживающая сила давления по формуле (2) определяется при помощи равенств (7) и (9) из формулы

$$Y + iX = -4\pi a r v_0^2 h^2 e^{-i\theta_0};$$

[имеем]

$$Y = 0, \quad X = 4\pi a r v_0^2 h^2;$$

а так как

$$2h^2 = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

$$a(1 - \cos \alpha) = s,$$

[где s —] стрелка дуги, то

$$P = X = 2\pi s r v_0^2. \quad (10)$$

В этой формуле любопытно то, что давление зависит лишь от абсолютной величины прогиба пластинки, и, следовательно, при одной и той же стрелке оно будет одно и то же, каков бы ни был радиус. Все пластинки, сечения которых изображены на рис. 3, испытывают одинаковое давление.

Что касается его величины, то она весьма значительна, если угол, стягиваемый дугой пластинки, достаточно велик и может превзойти ту

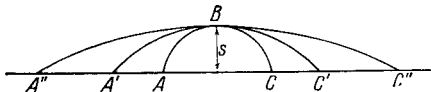


Рис. 3

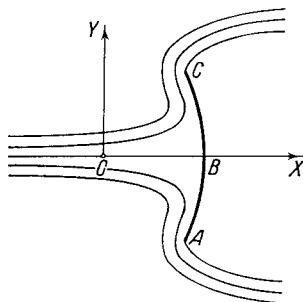


Рис. 4

силу, которая вызывается срывающимся потоком, стремящимся на ту же пластинку параллельно ее среднему радиусу. В самом деле, по точной формуле Кирхгоффа мы знаем, что давление на плоскую пластинку при этих условиях равно

$$P_1 = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho l v_0^2 = 0,44 \rho l v_0^2,$$

где l — ширина пластинки. Легко убедиться, что для случая вогнутой пластинки (если угол между хордой и касательной к дуге не превышает нигде $\pi/2$) это давление, равное

$$P' = \frac{1}{2} \rho v_0^2 l - \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v^2 dy,$$

не может превзойти никоим образом предела

$$P_2 = 0,5 \rho l v_0^2,$$

где l — стягиваемая пластинкой хорда (рис. 4). Давление, вытекающее из формулы (10), может быть изображено в виде

$$P = \pi \rho l v_0^2 \lg \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

и при центральном угле

$$2\alpha_1 > 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{4 + \pi}$$

превзойдет P_1 , а при

$$2\alpha_2 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi}$$

окажется равным P_2 и более P' . Первый из этих пределов приблизительно равен 32° , последний ⁵ 36° .

Обращаясь к определению подъемной силы, приходящейся на один квадратный метр поверхности пластинки в воздухе, легко находим эту силу. При скорости 14 м/сек (50 км/час) она равна приблизительно

$$\frac{\pi^2 \cdot 1,292 \cdot 196}{48g} = 5,3 \text{ кг} [g - \text{в м}]$$

при таком изгибе пластинки, что ее центральный угол равен 15° ; при угле в 30° сила эта приблизительно вдвое больше.

Для наглядности приводим небольшую табличку сил давления $\bar{P}$ на квадратный метр (в килограммах) при скорости 14 м/сек с соответствующим значением центрального угла 2α и отношения стрелки к хорде $s/2c = k$.

$2\alpha^\circ$	k	$\bar{P}$
15	1 : 30,5	5,3
30	1 : 15,2	10,6
32	1 : 14,2	11,4
36	1 : 12,6	12,8

Обратимся к определению скоростей на пластинке. По формулам (8) и (9)

$$\frac{v}{v_0} = |(1 - he^{\lambda i})^2| = 1 + h^2 - 2h \cos \lambda.$$

Наибольшая скорость равна $v_0 (1 + h)^2$, наименьшая — $v_0 (1 - h)^2$; скорость в точках входа и схода с пластинки получится, положив $\cos \lambda = h$, где $h = \sin \frac{\alpha}{2}$, и равна $v_0 (1 - h^2)$. Легко видеть, что скорость эта изменяется в довольно узких пределах при небольшом h .

⁵ Во время печатания этой работы Н. Е. Жуковский обратил внимание автора на заметку Кутта (*Kutta W. M. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Illustrierte Aëronautische Mitteilungen*, 1902, вып. 3), в которой сообщается решение той же задачи; формулы Кутта для функции тока имеют иной (более сложный) внешний вид, но полученное им выражение для силы давления вполне совпадает с формулой (11).

В заключение этого параграфа укажем формулы, которые разрешают ту же задачу путем изображения области z и соответственной области w на верхней полуплоскости комплексного переменного u или на бесконечной полосе, ограниченной двумя параллельными прямыми. Эти формулы понадобятся нам для сравнения при разрешении последующих задач. Нетрудно убедиться, что, положив,

$$z = 4ain \frac{1}{(u+n-i)(u-n+i)},$$

$$z = a - a \frac{u+n+i}{u+n-i} \frac{u-n-i}{u-n+i}, \quad (12)$$

$$\frac{dz}{du} = -8ain \frac{u}{(u+n-i)^2(u-n+i)^2}, \quad (13)$$

мы изобразим область z , занятую потоком, на верхней полуплоскости, так что бесконечно удаленная точка действительной оси области u соот-

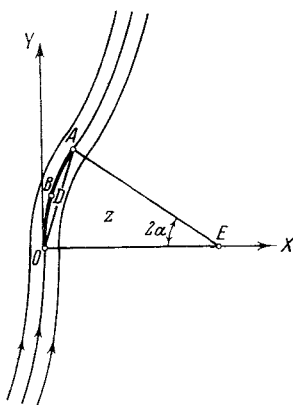


Рис. 5

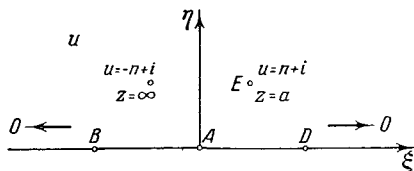


Рис. 6

ветствует одному из концов дуги, принятому за начало координат в области z ; ось OY будет касательной к дуге в этой точке. Соответственные точки областей помечены одинаковыми буквами на рис. 5 и 6.

Количество n имеет простое геометрическое значение, а именно

$$n = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Функция dw/du изобразится в новом переменном формулой

$$\frac{dw}{du} = K \frac{u}{(u+n-i)^2(u-n+i)^2},$$

причем K определяется из условия

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\infty} = v_0 e^{-i\theta_0} = \frac{Ki}{8na} \left(\frac{u-n+i}{u+n+i}\right)^2_{u=-n+i} = \frac{Ki}{8na} (1+ni)^2;$$

отсюда

$$K = \frac{8nav_0}{1+n^2}, \quad e^{-i\theta_0} = ie^{i\alpha}, \quad \theta_0 = 3\frac{\pi}{2} - \alpha;$$

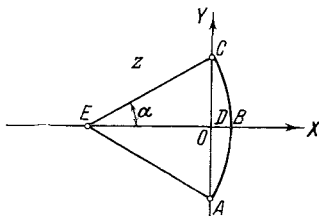


Рис. 7

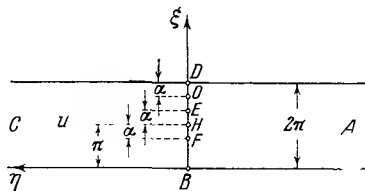


Рис. 8

поток в бесконечной дали направлен параллельно хорде AO , как и следовало ожидать. Затем определяем w :

$$w = \frac{K}{4} \left[\frac{i-n}{u+n-i} - \frac{i+n}{u+n+i} + ni \ln \frac{u+n-i}{u+n+i} \right].$$

Циркуляция скорости около точки $u = -n + i$, $z = \infty$ есть

$$C = \frac{\pi nK}{2} = 4\pi \frac{n^2}{1+n^2} av_0 = 4\pi av_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4\pi av_0 h^2,$$

и мы снова приходим к формуле (10) для определения силы давления.

Если, наконец, за область u мы примем бесконечную полосу между двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние 2π , то для изображения области z мы должны воспользоваться неймановским изотермическим преобразованием и положить

$$z = ctg \frac{u + \alpha}{2}; \quad (14)$$

[отсюда получится]

$$\frac{dz}{du} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{u + \alpha}{2}}. \quad (15)$$

При этом действительная часть переменного $u = \xi + i\eta$ изменяется от 0 до 2π , мнимая — от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 7 и 8); ξ равно нулю на выпуклой и равно 2π на вогнутой стороне дуги; η равно $-\infty$ в точке A и $+\infty$ в точке C ; z равно бесконечности при $u = \pi - \alpha$ (точка F) и равно нулю при $u = 2\pi - \alpha$ (точка O); центр дуги соответствует $u = \pi + \alpha$ (точка E).

Для dw/du и w легко получаем выражения

$$\frac{dw}{du} = -\frac{icv_0}{2} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2},$$

$$w = -icv_0 \left[\frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\sin \frac{\pi - \alpha + u}{4}}{\sin \frac{\pi - \alpha - u}{4}} \right]; \quad (16)$$

отсюда по формулам (14) и (15)

$$\frac{dw}{dz} = -iv_0 \left\{ \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{u + \alpha}{2}}{\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \right\}^2,$$

и при

$$z = \infty, \quad u = \pi - \alpha \quad (17)$$

$$\frac{dw}{dz} = -iv_0 = v_0 e^{-i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Циркуляция около точки $z = \infty$, $u = \pi - \alpha$ определяется формулой (16) и равна

$$C = icv_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (-2\pi i) = 2\pi cv_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

а величина слагающих силы давления найдется из равенства

$$Y + iX = -C\rho v_0 e^{-i\theta_0} = 2\pi i \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2\pi i \rho v_0^2 s$$

в полном согласии с формулой (10).

§ 5. Давление на сложное крыло. Разрешив основную задачу о потоке, непрерывно обтекающем часть боковой поверхности круглого цилиндра, обратимся к исследованию других форм преграждающих цилиндров, позволяющих освободиться от стеснения в выборе направления потока в бесконечной дали. Это стеснение, как я уже имел случай указать, отпадает, если на преграде число критических точек с выдающимися углами менее двух.

Весьма простой и изящный по результатам пример этого рода представляет модель сложного крыла, состоящая из такой же пластинки, изогнутой в форме части боковой поверхности круглого цилиндра, как и в разобранным случае, с добавлением насадка в форме ортогонального к ней цельного цилиндра на одном из концов. Очертание перпендикулярного сечения такого крыла и обтекающих струй представлено на рис. 9. Радиус насадка, конечно, надо предполагать небольшим, так как он должен изображать естественную притупленность передней стороны крыла, реально никогда не имеющей математически острой формы. Присутствие такого насадка дает возможность ввести лишнее постоянное в функцию w ,

зависящее от положения критической точки M раздела линии тока на передней стороне сложного крыла.

Область z , занятую текущей жидкостью, мы изображаем путем неймановского преобразования на части бесконечной полосы в плоскости комплексного переменного u (рис. 10), положив

$$z = c \operatorname{tg} \frac{u + \alpha}{2},$$

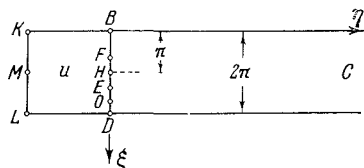
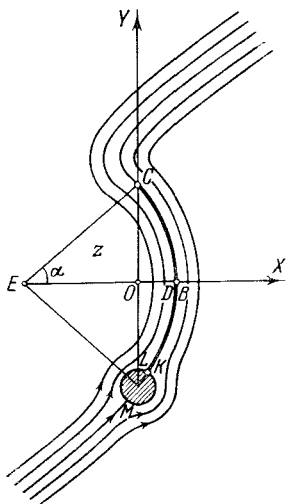


Рис. 9

Рис. 10

как в формуле (14). На границе CBK действительная часть переменного $u = \xi + i\eta$ есть нуль; на линии KML $\eta = -b$, где b — некоторая положительная, очень большая величина; на LDC $\xi = 2\pi$; в точке C $\eta = +\infty$. Случай, разобранный выше, получится при $b = \infty$. Зависимость $w = \varphi + i\psi$ от u получится всего проще, если мы изобразим сначала w на полуплоскости вспомогательного переменного s , а затем эту полуплоскость на площади, занятой переменным u . Для изображения полуплоскости s на области u достаточно положить

$$s = - \frac{\cos \frac{u + ib}{2}}{\operatorname{ch} \frac{b}{2}}, \quad (19)$$

так что [точке] $z = \infty$, $u = \pi - \alpha$ соответствует

$$s = s_0 = m + ni = - \frac{\sin \frac{\alpha - ib}{2}}{\operatorname{ch} \frac{b}{2}} = - \sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2},$$

откуда

$$m = - \sin \frac{\alpha}{2}, \quad n = \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2}. \quad (20)$$

Засим, имея в виду свойство особой точки s_0 и соблюдая требование реальности w на действительной оси плоскости s , мы определяем w и dw/ds формулами

$$w = \frac{A(s-m) + B}{(s-m)^2 + n^2} + Ki \ln \frac{s-m-ni}{s-m+ni}, \quad (21)$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{A - 2Kn}{(s-m)^2 + n^2} - \frac{2(s-m)[A(s-m) + B]}{[(s-m)^2 + n^2]^2}. \quad (22)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{u+ib}{2}}{\operatorname{ch} \frac{b}{2}}, & \frac{dz}{du} &= \frac{c}{2 \cos^2 \frac{u+\alpha}{2}}, \\ \frac{ds}{dz} &= \frac{1}{c} \frac{b}{\operatorname{ch} \frac{b}{2}} \cos^2 \frac{u+\alpha}{2} \sin \frac{u+ib}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

причем

$$\frac{1}{s^3} \frac{ds}{dz} = - \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{u+\alpha}{2} \sin \frac{u+ib}{2}}{c \cos^3 \frac{u+\alpha}{2}}$$

конечно при $s = \infty$, $\eta = \infty$, а стало быть, ds/dz обращается в этом случае в бесконечность порядка s^3 , то условием конечности в этом месте скорости является требование, чтобы коэффициент при $1/s^2$ в разложении dw/ds , определяемой формулой (22), был равен нулю. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} A - 2Kn - 2A &= 0, \\ K &= -\frac{A}{2n} \end{aligned} \quad (24)$$

и затем

$$\frac{dw}{ds} = 2 \frac{An^2 - B(s-m)}{[(s-m)^2 + n^2]^2}. \quad (25)$$

Обратимся к отысканию величины скорости и направления потока в бесконечной дали; для этого, обозначив через N количество

$$N = \frac{An^2 + Bm}{B} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \quad (26)$$

отыскиваем из равенств (23) и (25)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = v_0 e^{-i\theta_0} = \frac{2B \cos \frac{\alpha-ib}{2}}{c \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2}} \left\{ N + \sin \frac{\alpha-ib}{2} \right\} \lim_{u \rightarrow \pi-\alpha} \left[\frac{\cos \frac{u+\alpha}{2}}{(s-m)^2 + n^2} \right]^2.$$

Легко находим, подставляя m и n :

$$\begin{aligned} -\operatorname{ch} \frac{b}{2}(s-m-ni) &= \cos \frac{u+ib}{2} - \cos \frac{\pi-\alpha+ib}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{u-\pi+\alpha}{4} \sin \frac{u+\pi-\alpha+2ib}{4}; \\ -\operatorname{ch} \frac{b}{2}(s-m+ni) &= \cos \frac{u+ib}{2} - \cos \frac{\pi-\alpha-ib}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{u+\pi-\alpha}{4} \sin \frac{u-\pi+\alpha+2ib}{4}, \end{aligned}$$

а отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} [(s-m)^2 + n^2] &= \left(\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{u+2ib}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \lim_{u \rightarrow \pi-\alpha} \frac{\cos \frac{u+\alpha}{2}}{(s-m)^2 + n^2} &= \frac{i \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha-ib}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}}; \end{aligned}$$

таким образом, подлежащий определению предел получает вид

$$\nu_0 e^{-i\theta_0} = \lim \frac{dw}{dz} = - \frac{B \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} N + \sin \frac{\alpha-ib}{2}}{2c \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha-ib}{2}}. \quad (27)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} B &= -2\nu_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{th}^2 \frac{b}{2} \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}}{\sqrt{N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}}; \\ \theta_0 &= \theta_1 + \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2}; \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}}{N + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2}}; \quad (28) \\ \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{2} N \sin \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ch} \frac{b}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} N \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Из формулы для $\operatorname{tg} \theta_0$ ясно, что при изменении коэффициента N от $+\infty$ до $-\infty$ угол θ_0 может приобретать всевозможные значения в пределах μ и $\pi + \mu$.

Обратимся к исследованию положения критической точки M и распределения скоростей на крыле. Что касается точки M , то ее место определяется корнем уравнения (25), которое дает для определения

соответственного u соотношение

$$N + \cos \frac{u + ib}{2} = 0; \quad (29)$$

количество N определяется величиной угла падения. Пока

$$-1 < N < 1,$$

точка M лежит на насадке, ибо уравнение (29) при этом условии имеет корень

$$u = \xi - ib, \quad \cos \frac{\xi}{2} = -N;$$

при крайних значениях ± 1 для коэффициента N интересующая нас точка оказывается совпадающей соответственно с точками L или K .

Если N выходит из указанных пределов, то критическая точка раздела M находится на вогнутой стороне крыла при $N > 0$ и на выпуклой в противоположном случае.

Скорость потока на выпуклой поверхности пластины крыла получится, если мы составим модуль dw/dz при

$$s = -\operatorname{ch} \frac{\eta + b}{2} / \operatorname{ch} \frac{b}{2},$$

где η изменяется от b до ∞ , а для вогнутой стороны мы должны положить

$$s = \operatorname{ch} \frac{\eta + b}{2} / \operatorname{ch} \frac{b}{2}.$$

Таким образом, мы получаем в этих двух случаях при помощи формул (23), (25) и (26)

$$v = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \pm \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\operatorname{ch} \frac{\eta + b}{2} \pm N\right) \operatorname{sh} \frac{\eta + b}{2}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\operatorname{ch} \frac{\eta + 2b}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2},$$

где верхний знак соответствует выпуклой и нижний — вогнутой стороне крыла. В точке схода $\eta = \infty$ и

$$\begin{aligned} v &= v_1 = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} e^{-b} = \\ &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} e^{-b} \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}}{\sqrt{N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}} v_0; \end{aligned}$$

при $b = \infty$ насадок исчезает, и мы получим формулу, найденную выше:

$$v_1 = v_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = v_0 (1 - h^2).$$

Скорость v на пластинке, как нетрудно видеть, не будет значительно превышать v_1 и v_0 . Что касается скорости на насадке, то она получится по замене в модуле $\frac{dw}{dz}$ величины s через $-\left(\cos \frac{\xi}{2} / \operatorname{ch} \frac{b}{2}\right)$ и определяется формулой

$$v = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \frac{\left(\cos^2 \frac{\xi + \alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}\right) \left(N + \cos \frac{\xi}{2}\right) \sin \frac{\xi}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\xi}{2} - 2\cos \frac{\xi}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}\right)^2}.$$

Эта скорость в некоторых точках окружности насадки достигает очень значительной величины, если направление потока в бесконечной дали заметно отступает от направления хорды крыла и если при этом насадок невелик (b весьма велико). При воздушном потоке, или, все равно, при движении крыла в воздухе, эта скорость при некотором определенном угле θ_0 достигает скорости звука, после чего возможность установившегося движения отпадает, как мною было показано в сочинении «О газовых струях». Такое обстоятельство может возникнуть, если количество N будет величиной порядка $\operatorname{ch} \frac{b}{2}$. Найденная величина скорости достигает своего максимума при значениях ξ , близких к π ; вычислим поэтому v при значении $\xi = \pi$ и примем ее приближенно за $v_{\max}$. При помощи формул (28) в результате весьма несложных преобразований мы можем придать этому количеству следующий простой вид:

$$v_{\max} = v_{\xi=\pi} = 4v_0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \theta_0 \frac{N \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} \left(\operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(N \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда, пренебрегая величиной $\sin \frac{\alpha}{2}$ по сравнению с количествами порядка $\operatorname{ch}^2 \frac{b}{2}$, находим приближенно

$$v_{\max} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} v_0 \cos \theta_0 = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} v_0 \sin \beta,$$

если через β обозначим угол направления потока в далеких точках с хордой пластинки.

Представим себе крыло с незначительным утолщением на переднем крае, моделирующееся пластинкой, вырезанной из боковой поверхности круглого цилиндра и стягивающей центральный угол в 30° , с насадком в один сантиметр в диаметре, причем длина стягивающей хорды равна двум метрам. Легко убедиться, что геометрическое значение b определяется

соотношением

$$\operatorname{sh} b = \frac{c}{\varepsilon},$$

где полухорда c и радиус насадка ε в данном случае выражаются в сантиметрах числами 100 и 0,5. Таким образом,

$$\operatorname{sh} b = 200,$$

откуда приближенно находим

$$\operatorname{ch} \frac{b}{2} = 10,025$$

и затем имеем

$$v_{\max} = 40,65 v_0 \sin \beta.$$

Посмотрим, при каких обстоятельствах $v_{\max}$ может равняться скорости звука, соответствующей состоянию газа в том месте, где эта скорость наблюдается. Примем адиабатный закон связи плотности и давления. Обозначив скорость звука через V , получим

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2};$$

откуда, имея в виду равенство

$$\frac{\gamma p}{\rho} = V^2,$$

имеем

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0} + v_0^2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \sqrt{\frac{7p_0}{6\rho_0} + \frac{v_0^2}{6}};$$

вторым членом сравнительно с первым можно пренебречь по его малости, и при обычном состоянии атмосферы мы получим

$$V = 302 \text{ м/сек.}$$

Положив $v_{\max} = V$, из приведенной выше формулы найдем приближенно

$$v_0 \sin \beta = 7,4 \text{ м/сек.}$$

При $v_0 < 7,4$ обтекание исследуемого типа возможно при всяком угле наклона, определяемого формулами (28) до самой его предельной величины $\theta_0 = \mu$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \mu$. Но если v_0 значительно превосходит величину 7,4 м/сек, то уже при гораздо меньших наклонах крыла возможность интересующего нас движения прекращается. Так, при обычной скорости движения аэроплана, $v_0 = 14$ м/сек, предельный угол β имеет величину около 32° . При более остром переднем крае предельный угол окажется меньше. Так, если при той же хорде пластинки $\varepsilon = 0,25$ см, то

$$\operatorname{sh} b = 400, \quad \operatorname{ch} \frac{b}{2} = 14,15$$

и предельный угол несколько меньше 23° . Если наклон крыла окажется более предельного, то должно наступить новое явление — течение с разрывом сплошности.

Обратимся к составлению формулы для слагающих поддерживающей силы. По уравнениям (22) и (24) определяем циркуляцию C в направлении движения часовой стрелки около точки $s = s_0 = m + ni$. Имеем

$$C = -2\pi \frac{A}{2n} = -\pi \frac{N - m \operatorname{ch} \frac{b}{2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{b}{2}} B,$$

или после подстановки m и n из (20)

$$C = -\pi \frac{N + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2}}{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^3 \frac{b}{2}} \operatorname{ch}^3 \frac{b}{2} B.$$

Основная формула

$$Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\theta_0}$$

по замене C и B их значениями дает

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \frac{N + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}} \frac{e^{-i\theta_0} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}}{\sqrt{N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}, \\ N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} &= \\ &= \left(N + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \right)^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}, \end{aligned}$$

то при помощи формул (28) это соотношение легко приводим к следующему весьма простому виду:

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \theta_1}{\sin \mu} e^{-i\theta_0},$$

или, введя в формулу угол β , образуемый направлением потока в бесконечности с хордой OY , к виду

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu} e^{-i\theta_0},$$

ибо

$$\theta_1 = \theta_0 - \mu = \frac{\pi}{2} - \beta - \mu.$$

Полная подъемная сила

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

по-прежнему перпендикулярная к потоку, определится формулой

$$P = 2\rho c v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu} \quad (30)$$

и совпадает при $\beta = 0$ с той величиной, которая соответствует отсутствию насадка, так как $c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ есть стрелка пластины.

Таким образом, при условии параллельности хорды направлению потока в далеких точках, или, что все равно, направлению движения крыла в спокойном воздухе (когда возможно установившееся непрерывное обтекание пластины без насадка), *поддерживающая сила давления нисколько не зависит от величины насадка на переднем краю.*

Второе важное замечание, которое мы можем сделать по поводу полученной формулы, состоит в следующем: *подъемная сила быстро падает при наклоне крыла вперед по направлению движения и при некотором угле $\beta = -\mu$ оказывается равной нулю, а затем превращается в прямо противоположную давящую сверху силу.* Этот критический угол зависит от конструкции крыла и ни от чего более. Легко дать геометрическое построение угла μ . В самом деле, мы уже заметили значение количества b :

$$\operatorname{sh} b = \frac{c}{\varepsilon};$$

но

$$\varepsilon = OF \operatorname{tg} \gamma = c \operatorname{tg} \gamma,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} b &= c \operatorname{tg} \gamma; & \operatorname{ch} b &= \frac{1}{\sin \gamma}; \\ \operatorname{th} \frac{b}{2} &= \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b + 1} = \frac{\cos \gamma}{1 + \sin \gamma}; \end{aligned}$$

а так как $OO' = c/\cos \gamma$, то

$$\operatorname{th} \frac{b}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\cos \gamma} + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{c}{OO' + \varepsilon} = \frac{c}{OH};$$

а по формулам (28) имеем

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} = \frac{c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{OH} = \frac{OG}{OH}.$$

Отметим на хорде OY точку H' , симметричную с H по отношению к O (рис. 11); соединив H' с G , мы получаем

$$\mu = \angle GH'O,$$

а для давления P находим формулу

$$P = 2\pi\rho v_0^2 GH' \sin \sigma,$$

где σ — угол направления потока, отмеченного стрелкой на рисунке с направлением GH' .

Полученные результаты применимы до тех пор, пока возможно установившееся течение рассмотренного типа, для чего угол θ_0 не должен

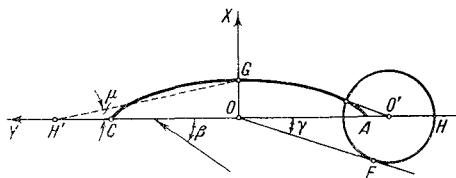


Рис. 11

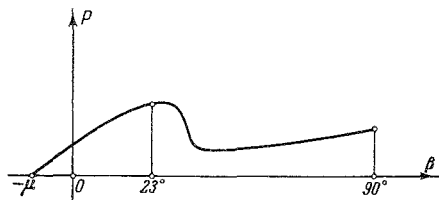


Рис. 12

превышать предельного угла, пример вычисления которого дан выше. При центральном угле $2\alpha = 30^\circ$ мы получим, таким образом, постепенно возрастающую по закону синуса поддерживающую силу, пока угол β заключен между $-7^\circ 30'$ и $+23^\circ$, если удлинение переднего края не превышает $1/400$ полухорды ($v_0 = 14$ м/сек). Относительно последней величины следует, однако, заметить, что при близости к ней угла β наступают особые обстоятельства, а именно, характер потока воздуха около насадка будет значительно разниться от течения несжимаемой жидкости; это, впрочем, едва ли значительно повлияет на давление ввиду малости периметра насадка и характера распределения на нем скоростей. При $\beta > 23^\circ$, вероятно, позади крыла около насадка образуется замкнутая область спокойной жидкости, несущаяся вместе с крылом и в случае вязкой жидкости заменяющаяся сопутствующим вихрем; при углах, близких к прямому, должно ожидать разрывного течения обычного типа (типа Ролея); поддерживающая сила при этом должна значительно упасть по сравнению с такой величиной, которой она достигает при предельном угле. Так, при разрывном потоке с образованием сбегающих струй в случае $\beta = \pi/2$ она выражается формулой

$$P_1 = 2k\rho v_0^2 c,$$

где k лежит между 0,44 и 0,5, в то время как при $\beta = 23^\circ$ мы имеем

$$P = 2\pi\rho v_0^2 c \cdot \operatorname{tg} 7^\circ 30' \frac{\sin 30^\circ 30'}{\sin 7^\circ 30'},$$

и $P : P_1$ близко к трем.

Кривая изменения давления с возрастанием угла должна поэтому иметь приблизительно такой вид, как на рис. 12.

§ 6. Крыло с одной критической точкой возврата. Рассмотрев подробно сложное крыло определенной формы, на котором мы остановились с особым вниманием ввиду простоты и ясности получаемых результатов, укажем, далее, некоторые формы крыльев, напоминающие крылья птиц, с непрерывными и мягкими обводами и лишь с одной точкой заострения.

Простейшая форма этого рода получится, если мы, изображая область z потока на верхней полуплоскости комплексного переменного u , примем для функции z и ее производной значения, близкие к выражениям (12) и (13) § 4. Именно, положим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= -8ain \frac{u + i\varepsilon}{(u + n - i)^2 [u - n + i(1 + 2\varepsilon)]^2}, \\ z &= 4ain \frac{1}{(u + n - i)[u - n + i(1 + 2\varepsilon)]} \end{aligned} \quad (31)$$

где ε — весьма малое количество. Соответственное течение характеризуется функциями

$$\begin{aligned} \frac{dw}{du} &= N \frac{u - b}{(u + n - i)^2 (u + n + i)^2}, \\ w &= \frac{N}{4} \left\{ -\frac{n + b - i}{u + n - i} - \frac{n + b + i}{u + n + i} + (n + b)i \ln \frac{u + n - i}{u + n + i} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Количество N определяется из условий течения в бесконечной дали:

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty} = v_0 e^{-i\theta_0} = \left(\frac{dw}{dz} \right)_{u=-n+i} = -\frac{Ni}{8an} (i - n - b) [i(1 + \varepsilon) - n]$$

или

$$v_0 e^{\left(\frac{3}{2}\pi - \theta_0\right)i} = \frac{N}{8bn} [1 + (n + b)i] [1 + \varepsilon + ni];$$

отсюда

$$\begin{aligned} N &= \frac{8anv_0}{\sqrt{[1 + (n + b)^2][(1 + \varepsilon)^2 + n^2]}}, \quad \frac{3}{2}\pi - \theta_0 = \beta + \mu; \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{n}{1 + \varepsilon}, \quad \operatorname{tg} \beta = n + b. \end{aligned} \quad (33)$$

Посмотрим, какой вид имеет крыло, обтекаемое указанным потоком. Для разрешения этого вопроса разделим действительную и мнимую части во второй из формул (31), считая u вещественным; будем иметь

$$x + iy = 4ain \frac{1}{u^2 + 1 - n^2 + 2\varepsilon + 2i(\varepsilon u + n + n\varepsilon)},$$

откуда на контуре крыла получаем

$$\begin{aligned} x &= 8an \frac{u\varepsilon + n(1 + \varepsilon)}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[u\varepsilon + n(1 + \varepsilon)]^2}, \\ y &= 4an \frac{u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[u\varepsilon + n(1 + \varepsilon)]^2}, \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 16a^2 n^2 \frac{1}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[ue + n(1 + \varepsilon)]^2},$$

$$4an \frac{x}{x^2 + y^2} = \xi = 2ue + 2n(1 + \varepsilon), \quad 4an \frac{y}{x^2 + y^2} = \eta = u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2.$$

Таким образом, очертание сечения исследуемого крыла представляет результат инверсии параболы, уравнение коей

$$4\varepsilon^2 [\eta - 1 - 2\varepsilon + n^2] = [\xi - 2n(1 + \varepsilon)]^2.$$

Рис. 13 и 14 поясняют дело. На них соответственные точки параболы и контура крыла отмечены одинаковыми буквами; O соответствует бесконечно удаленной точке параболы. При $\varepsilon = 0$ парабола обращается

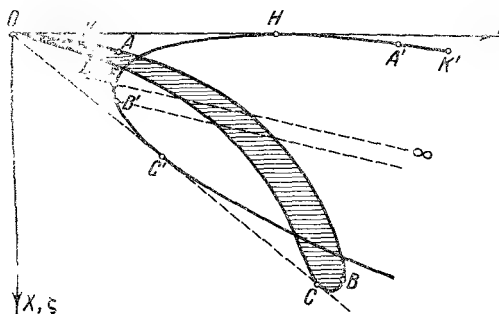


Рис. 13

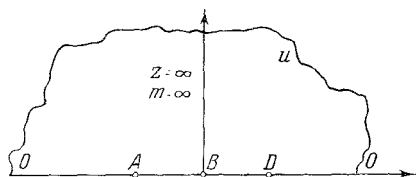


Рис. 14

в часть прямой, параллельной ее оси $F\infty$, а сечение крыла превращается в дугу окружности, центральный угол которой 2α характеризуется соотношением

$$n = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Мы возвращаемся, таким образом, к результатам, найденным в § 4. Точка O крыла представляет точку возврата первого рода, и малая часть контура OKA соответствует бесконечной дуге параболы $A'K'\infty$. Исследуемый контур лежит внутри угла KOC касательных к параболе из начала координат. Обозначив этот угол через 2γ , легко находим

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{n^2 + \varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon}};$$

при этом

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle KOY &= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{(n^2 + \varepsilon^2)(1 + 2\varepsilon) + n(1 + \varepsilon)}}, \\ \operatorname{tg} \angle COY &= \frac{\sqrt{(n^2 + \varepsilon^2)(1 + 2\varepsilon) + n(1 + \varepsilon)}}{1 + 2\varepsilon - n^2}, \\ \angle KOY + \angle COY &= 2\gamma. \end{aligned} \quad (34)$$

Первый из этих углов чрезвычайно мал при малом ε . Контур имеет две точки перегиба, одна из которых лежит вблизи начала координат, а другая недалеко от точки, соответствующей вершине параболы. Соответственные этим точкам значения вспомогательного переменного, как нетрудно показать, определяются из уравнения четвертой степени в переменном u ,

$$\begin{aligned} 3\varepsilon u^4 + 8n(1 + \varepsilon)u^3 - 6\varepsilon(1 + 2\varepsilon - n^2)u^2 - \\ - \varepsilon(1 + 2\varepsilon - n^2)^2 - 4\varepsilon n^2(1 + \varepsilon)^2 - \\ - 4\varepsilon^3(1 + 2\varepsilon - n^2) = 0 \end{aligned}$$

с двумя действительными корнями; один из них (отрицательный) весьма велик по абсолютной величине при малом ε , другой близок к нулю и положителен. Если $n = \frac{1}{8}$, $\varepsilon = 0,01$, то последний корень равен прибли-

зительно 0,236, а толщина крыла в соответственном месте имеет величину 0,004 a . Крыло, таким образом, представляется почти идеально тонким.

Слагающие силы давления на крыло получаем на основании общего правила при помощи соотношений (32), (33) по формуле

$$Y + iX = -\frac{\pi N}{2}(n + b)v_0\rho e^{-i\theta_0};$$

или, в иной форме,

$$\begin{aligned} Y + iX &= -4\pi\rho v_0^2 \sin\mu \sin\beta e^{-i\theta_0} = -4\pi\rho v_0^2 \sin\mu \sin\beta i e^{i(\beta+\mu)}; \\ P &= \sqrt{X^2 + Y^2} = 4\pi\rho v_0^2 \sin\mu \sin\beta. \end{aligned} \quad (35)$$

Из равенств (33) нетрудно усмотреть, что $\beta + \mu$ есть угол, образуемый направлением потока вдали от крыла с отрицательной осью ординат. Что касается μ , то из сравнения определяющей его формулы

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{n}{1 + \varepsilon}$$

с формулами (34) мы усматриваем приблизительное совпадение его величины с γ . Таким образом, проведя равнодействующую угла касательных из начала координат (в этом угле расположено крыло), мы получаем приблизительно то направление, с которым поток образует угол β , фигурирующий в формуле (35) для силы давления (рис. 15). Характер этой формулы остается тот же, что и в рассмотренном случае сложного крыла (§ 5).

Обращаясь к обследованию скоростей на контуре крыла, имеем по формулам (31) и (32)

$$v = v_0 \frac{\sqrt{(u-b)^2}}{\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}} \frac{(u-n)^2 + (1+2\varepsilon)^2}{(u+n)^2 + 1};$$

скорость, как легко усмотреть, растет при малом ε с приближением u

к нулю и будет иметь наибольший максимум вблизи нуля. Положив $u = 0$, найдем при малом ε приближенно

$$v_{\max} = \frac{v_0 b}{\varepsilon}.$$

Если $\varepsilon = 0,01$, как выше, $v_0 = 14$ м/сек, то, как в § 5, заменив $v_{\max}$ через 302 м/сек, найдем для b предельное значение $b = 0,2$. Затем имеем

$$\operatorname{tg} \beta = n + b = 0,336$$

при $n = 1/8$, откуда получаем предельный угол β около 19° ; угол β — μ касательной к нижней поверхности крыла из начала координат с направлением потока в бесконечности, или, [что] все равно, с направлением движения крыла, при этом будет иметь величину около 12° . Поддерживающая сила обращается в нуль при $\beta = 0$. Таким образом, все явления, отмеченные в случае сложного крыла в § 5, имеют место и в рассматриваемом случае. Здесь, так же как и там, пределы возможных

направлений движения расширяются с утолщением крыла, т. е. с увеличением ε и с уменьшением скорости v_0 . Точно такой же характер имеет и кривая зависимости давления от угла.

§ 7. Крылья других очертаний. Формулы предшествующего параграфа можно расширить, охватив широкий класс разнообразных очертаний крыла. Для этого достаточно, сохранив для dw/du формулу (32), т. е.

$$\frac{dw}{du} = N \frac{u - b}{(u + n - i)^2 (u + n + i)^2},$$

принять

$$\frac{dz}{du} = -8\alpha i n \frac{(u + i\varepsilon) f(u)}{(u + n - i)^2 [u - n' + i(1 + 2\varepsilon)]^2} = -8\alpha i n \frac{f(u)}{(u + n - i)^2},$$

где $f(u)$ есть функция, всюду в верхней полуплоскости переменного u конечная и непрерывная. Мы можем, например, положить

$$f(u) = \prod \frac{(u + g_m + h_m i)^{q_m}}{(u + k_m + l_m i)^{r_m}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, p, \quad (36)$$

$$\sum q_m = \sum r_m$$

и выбрать произвольно вещественные количества g, h, k, l, q, r с тем лишь, чтобы h и l были положительны. При этом, так как точка $u = i - n$ должна быть простым полюсом функции z , то должно иметь место соотношение

$$F'(i - n) = 0,$$

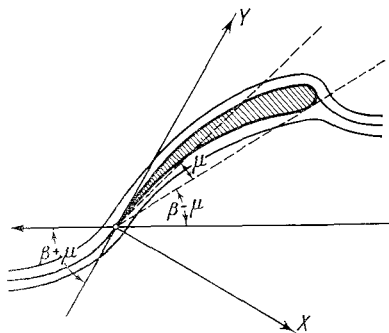


Рис. 15

единственным образом определяющее коэффициенты n' и ε' через n , ε , g , h , k , l , q , r .

Значение N определяется из условия

$$\nu_0 e^{-i\theta_0} = \left(\frac{d\omega}{dz} \right)_{z=\infty} = \frac{Ni}{8an} \frac{n+b-i}{4f(i-n)}; \quad N = 32an \frac{|F(i-n)|}{\sqrt{1+(n+b)^2}} \nu_0;$$

$$\frac{3\pi}{2} - \theta_0 = \arctg(n+b) - \arg iF(i-n) = \beta + \mu,$$

где по-прежнему

$$\beta = \arctg(n+b).$$

Для определения поддерживающей силы имеем затем уравнение

$$Y + iX = - \frac{\pi N(n+b)}{2} \rho \nu_0^{-i\theta_0} = - 4\pi a \rho \nu_0^2 \sigma \sin \beta e^{-i\theta_0}, \quad (37)$$

причем

$$\sigma = 4n |F(i-n)|.$$

Весь характер явления и на этот раз несколько не меняется.

Во всякой частной задаче, когда очертания крыла известны, остается лишь подобрать коэффициенты формулы (36) так, чтобы контур подходил к желаемому типу. Довольно любопытный случай представляет, например, крыло с зубчатой вогнутой поверхностью, как показано на рис. 16. Такой тип получается, если мы примем количества g и k отрицательными, возрастающими с возрастанием указателя, причем численная величина k_m заключается между $-g_m$ и $-g_{m-1}$; за h и l должно принять некоторые весьма малые (положительные, как пояснено выше) числа; все показатели q и r также следует сделать положительными; при $q_m = r_m = 1/2$ зубцы будут приблизительно походить на прямоугольные с закруглением в углах выступы и впадины. Количества n' и ε' можно принять равными n и ε , если остальные коэффициенты таковы, что

$$F'(i-n) = 0,$$

т. е. если

$$\sum \frac{1}{i(1+h_m) - n + g_m} = \sum \frac{1}{i(1+l_m) - n + k_m}.$$

Количество σ получает вид

$$\sigma = \frac{n}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + n^2}} \sqrt[4]{\prod \frac{(1+h_m)^2 + (n-g_m)^2}{(1+l_m)^2 + (n-k_m)^2}}.$$

На основании сказанного выше легко видеть, что находящиеся в нашем распоряжении количества можно подобрать так, чтобы радикал четвертой степени значительно превосходил единицу.

Таким образом, по сравнении формул (37) при указанном значении σ и (35) § 6 мы убеждаемся, что присутствие зубцов надлежащей формы на нижней поверхности крыла должно увеличить подъемную силу крыла.

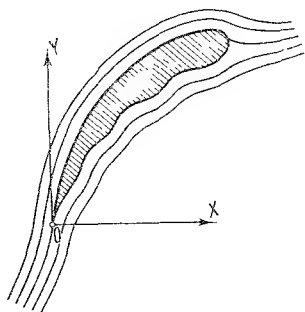


Рис. 16

§ 8. Обтекание пластинки, опирающейся на дугу круга, в присутствии вихревого шнура. В § 4 был рассмотрен случай непрерывного обтекания части боковой поверхности круглого цилиндра, возможной лишь при определенном направлении потока в бесконечной дали, а именно при условии параллельности его хорде, стягивающей дугу, на которую пластинка опирается. Здесь мы покажем, что кроме такого движения возможно иное, также с непрерывным распределением скоростей, в присутствии неподвижного вихревого шнура определенного напряжения и определенно расположенного по отношению

к пластинке: то и другое будет меняться в зависимости от скорости потока и его направления. Хотя присутствие вихря, как было показано в § 3, и не вносит непосредственно добавочного давления на обтекаемую пластинку, но влияние шнура сказывается косвенно, так как он меняет циркуляцию по главному контуру, окружающему пластинку.

При этом исследовании будем пользоваться тем же вспомогательным комплексным переменным, как и в § 4, изображая область, занятую жидкостью внутри круга радиуса, равного единице, и положим согласно формулам (4) и (5)

$$z = a \frac{h - u}{u(hu - 1)}, \quad (38)$$

$$\frac{dz}{du} = ah \frac{1 + u^2 - 2hu}{u^2(hu - 1)^2}, \quad (39)$$

где $h = \sin \frac{\alpha}{2}$ и α — половина центрального угла, опирающегося на поперечную дугу пластинки. Что касается w , то вместо формулы (6) примем для этого переменного выражение

$$w = v_0 a h i \left\{ \frac{e^{\beta i}}{u} - e^{-\beta i} u + 2A \ln u + B \ln \frac{u - \rho e^{-\lambda i}}{\rho u - e^{-\lambda i}} \right\},$$

при $\beta = 0$, $A = h$, $B = 0$ совпадающее с выражением (6). Значение

$$u = u_0 = \rho e^{-\lambda i}$$

соответствует центру вихревого шнура ($0 < \rho < 1$). Количество β имеет очень простое геометрическое значение. В самом деле,

$$\frac{dw}{du} = -v_0 a h i \left\{ \frac{e^{\beta i}}{u^2} + e^{-\beta i} - \frac{2A}{u} + B \frac{1 - \rho^2}{\rho (u^2 e^{\lambda i} + e^{-\lambda i}) - (\rho^2 + 1)u} \right\}, \quad (40)$$

и по формуле (39)

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty, u=0} = v_0 e^{-\theta_0 i} = -i v_0 e^{\beta i},$$

откуда $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \beta$; следовательно, β есть угол, образуемый направлением потока в далеких точках (или, все равно, направлением движения пластины в неподвижном потоке) с хордой пластинки.

Коэффициенты A и B мы должны определить из условия обращения в нуль dw/du при $dz/du = 0$. Положив для краткости

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

легко находим

$$B = -\frac{\sin \beta}{\sin \lambda} \frac{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\lambda - \sigma)][1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\lambda + \sigma)]}{\rho(1 - \rho^2)},$$

$$A = h \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \lambda} \left(\frac{1 + \rho^2}{2\rho} - h \cos \lambda \right).$$

Вставив эти значения в формулу (40), мы преобразуем ее к виду

$$\frac{dw}{du} = -v_0 a h i \frac{(1 + u^2 - 2hu) \left\{ u^2 e^{(\lambda - \beta)i} + e^{-(\lambda - \beta)i} - \frac{2N}{\rho} u \right\}}{u^2 \left(u^2 e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - \frac{\rho^2 + 1}{\rho} u \right)}, \quad (41)$$

где

$$2N = (1 + \rho^2) \frac{\sin(\beta + \lambda)}{\sin \lambda} - 2h\rho \frac{\sin \beta}{\sin \lambda}.$$

При $\beta = 0$ и λ , *отличном от нуля или π* , формула (41) превращается в формулу (7), и мы вновь получаем результаты, найденные в § 4. Отвлекаясь от этого предположения, определим ρ и λ из условия неподвижности вихря. В § 3 показано, что условие сводится к обращению в нуль вычета

$$\left(\text{Rés} \frac{dw}{du} \cdot \frac{dw}{dz} \right)_{u=u_0} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\left\{ \frac{d}{du} \left[(u - u_0) \frac{dw}{du} : \sqrt{\frac{dz}{du}} \right] \right\}_{u=u_0} = 0.$$

При помощи приведенных формул мы приводим это соотношение к виду

$$\left\{ \frac{d}{du} \frac{\sqrt{1 + u^2 - 2hu} (hu - 1) \left[u^2 e^{(\lambda - \beta)i} + e^{-(\lambda - \beta)i} - \frac{2N}{\rho} u \right]}{u(\rho u - e^{-\lambda i})} \right\}_{u=u_0} = 0,$$

причем $u_0 = \rho e^{-\lambda i}$. Совершив дифференцирование и выполнив подстановку, находим

$$\frac{h}{h\rho - e^{\lambda i}} - \frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{1 - \rho^2} + \frac{\rho e^{-\lambda i} - h}{\rho^2 e^{-\lambda i} + e^{\lambda i} - 2h\rho} + \frac{2\rho e^{-\beta i} - \frac{2N}{\rho}}{\rho^2 e^{-\beta i} + e^{\beta i} - 2N} = 0,$$

а по замене N его значением

$$\frac{h}{hp - e^{\lambda i}} - \frac{1}{p} + \frac{p}{1 - p^2} + \frac{pe^{-\lambda i} - h}{p^2e^{-\lambda i} + e^{\lambda i} - 2hp} + 2 \frac{pe^{\lambda i} - h}{p^2e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - 2hp} + \frac{1 - p^2}{p} \frac{\sin(\beta + \lambda)}{\sin \beta} \frac{1}{p^2e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - 2hp} = 0. \quad (42)$$

Из этого основного уравнения мы получаем два условия для определения p и λ . Одно из них находим, приравняв нулю мнимую часть выражения (42), а второе — сделав то же самое по умножении равенства (42) на $p^2e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - 2hp$. Таким образом, после весьма простых приведений мы приходим к следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - p^2)^2}{p} \frac{h}{1 - h^2} \frac{\sin(\beta + \lambda)}{\sin \beta} &= (1 - p^2)^2 \frac{1 + p^2 - 2hp \cos \lambda}{(1 + p^2 - 2hp \cos \lambda)^2 - 4p^2(1 - h^2) \sin^2 \lambda} = \\ &= 1 - \frac{1 - h^2 + h^2(1 - p^2)^2}{1 + h^2p^2 - 2hp \cos \lambda}, \end{aligned} \quad (43)$$

которые и определяют положение вихря в зависимости от направления потока. Что касается поддерживающей силы потока, то ее компоненты определяются согласно формуле (2) § 2 из соотношения

$$Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\theta_0},$$

где C — циркуляция около точки $u = 0$ в направлении часовой стрелки. В нашем случае $C = 2\pi v_0 a h \cdot 2A$. Введя вспомогательный угол μ , определяемый равенством

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1 + p^2}{2ph \sin \lambda} - \operatorname{ctg} \lambda, \quad (44)$$

мы легко приводим коэффициент A к виду

$$A = h \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu}$$

и для полной силы давления потока на пластинку получаем

$$P = 4\pi \rho v_0^2 a h^2 \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu}. \quad (45)$$

При $\beta = 0$, если μ отлично от нуля (λ отлично от нуля и π), мы находим, таким образом, прежнее значение P (формула (10)). Что касается формулы (45), то она вполне схожа с формулой (30), ибо

$$2ah^2 = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

равно стрелке дуги. Отличие состоит в том, что на этот раз добавочный угол μ зависит от направления потока.

Зависимости, устанавливаемые формулами (43), (44) и (45), довольно сложны, а потому и общая картина явления представляется весьма не

ясной. Ввиду этого желательно хотя бы в частном случае провести вычисления до конца и сопоставить результаты в таблицу. Выполним это для значения h , определяемого из формулы

$$\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{65}}, \quad \frac{\alpha}{2} = 7^\circ 7' 30'', \quad 2\alpha = 28^\circ 30',$$

что соответствует стрелке

$$s = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16} 2c,$$

равной одной шестнадцатой хорды, — значение, близкое к обычной величине стрелки крыла аэроплана.

Прежде всего для удобства вычислений преобразуем уравнения (43), введя новое переменное t при помощи соотношения

$$\sqrt{1-h^2}t = \frac{h(1+\rho^2) - 2\rho \cos \lambda}{1-\rho^2} \quad (46)$$

и положив для краткости

$$s = 1 - \rho^2, \quad k = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}.$$

Уравнения (43) в результате преобразования дают

$$\frac{s^2}{\sqrt{1-s}} \cdot k \sqrt{1+k^2} \frac{\sin(\lambda+\beta)}{\sin \beta} = ks \frac{t - ks}{1 + kst} = \frac{2-s + kst}{1+t^2}. \quad (47)$$

Из (46) и (44) имеем

$$-\cos \lambda = \frac{1}{2 \sqrt{1+k^2} \sqrt{1-s}} [st - 2k + kst],$$

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{2-s}{2h \sin \lambda \sqrt{1-s}} - \operatorname{ctg} \lambda.$$

Из рассмотрения основных уравнений (43) нетрудно усмотреть, что $\cos \lambda$ должен быть заключен в пределах -1 и h . Заменив в равенстве (47) k его частным значением $1/8$, мы получаем для определения s по t :

$$s^2(1 + 2t^2 - 8t) - 8s(8 + t^3 - 2t) + 128 = 0.$$

Дальнейшие вычисления проведем, давая t различные числовые значения, возможные по смыслу задачи, и определяя последовательно переменные s , λ , β и μ . Легко убеждаемся, что условием соблюдения пределов s и $\cos \lambda$ является требование

$$t > 3,06.$$

При t , близких к этому значению, переменные меняются довольно быстро, затем изменение идет гораздо медленнее. Не видя надобности в особо точных подсчетах, мы, пользуясь логарифмическими таблицами, составили таблицу, поясняющую ход интересующих нас функций

	t	s	λ	β	μ
1	3,064	0,51709	177°26'	0°36'25"	0°16'5"
2	3,07	0,51451	172°56'	1°37'	0°44'
3	3,1	0,50191	164°01'	2°49'	1°39'
4	3,25	0,44391	146°09'	5°57'	3°27'
5	3,35	0,40952	139°14'	6°13'	4°06'
6	3,5	0,36373	131°39'	5°58'	4°48'
7	4	0,25012	116°34'	5°04'	5°56'
8	4,5	0,16944	106°53'	2°29'	6°33'
9	5	0,13027	102°50'	1°41'	6°42'
10	8	0,03175	90°14'	0°14'37"	7°04'
11	∞	0	$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = 82°52'30"$	0	$\frac{\alpha}{2} = 7°7'30"$

Соответственные значения количества $\sin(\beta + \mu)/\sin \mu$ при этом, постепенно уменьшаясь, изменяются в пределах 3, 2 и 1.

Таким образом, мы усматриваем, что исследуемое движение возможно лишь при малых положительных углах наклона крыла к направлению скорости; максимальный наклон несколько более 6°. При меньших углах возможны всякий раз два различных расположения вихря и в соответствии с этим два разных потока с весьма различающимися величинами поддерживающей силы. Эта сила с возрастанием угла наклона при одном

из возможных типов движения не только не увеличивается, но даже падает (приблизительно на 20% своей величины при изменении β от 0 до 6°). На опыте, сколько мне известно, таких явлений не наблюдалось; по всей вероятности, вследствие неустойчивости сопутствующего вихря описанное движение не осуществимо, и полученные в этом параграфе результаты имеют потому лишь теоретический интерес.

Характер очертаний линий тока представлен на прилагаемом рис.

17. Вихрь располагается близ выпуклой поверхности пластинки, на которой находятся и обе критические точки с нулевой скоростью, как показывают весьма простые вычисления в рассмотренном частном примере.

§ 9. Определение вращающего момента. Вопрос о величине вращающего момента, действующего на крыло, является существенным элементом в изложенной теории. Его изучение дает особенно интересный

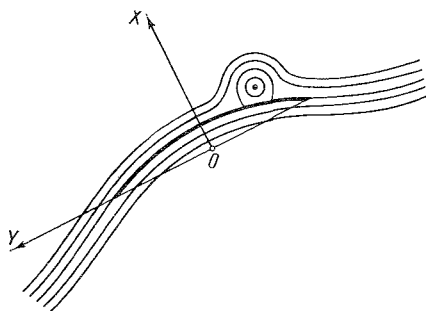


Рис. 17

результат в том случае, когда угол потока достигает критического значения, при котором поддерживающая сила обращается в нуль.

Назовем через $\bar{x}$, $\bar{y}$ координаты центра сил давления на крыло; компоненты X' , Y' силы, действующей на элемент сечения крыла, могут быть изображены в виде

$$X' = \rho \frac{v^2}{2} ds \frac{dy}{ds}, \quad Y' = -\rho \frac{v^2}{2} ds \frac{dx}{ds}$$

(если мы отбросим члены, зависящие от постоянного давления, как не дающие результата). Поэтому центр сил давления, определяющийся, как легко видеть, из соотношения

$$(\bar{x} + i\bar{y})(Y + iX) = \sum (x + iy)(Y' + iX'),$$

найдем, если мы совершим интегрирование по контуру сечения крыла в уравнении

$$(\bar{x} + i\bar{y})(Y + iX) = -\frac{\rho}{2} \int z v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) v ds.$$

Так как на указанном контуре

$$v ds = dw, \quad v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dw}{dz},$$

то мы приходим к окончательной формуле

$$\begin{aligned} (\bar{x} + i\bar{y})(Y + iX) &= \bar{x}Y - \bar{y}X + i(\bar{x}X + \bar{y}Y) = \\ &= -\frac{\rho}{2} \int z \frac{dw}{dz} dw = -\frac{\rho}{2} \int z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 du, \end{aligned} \quad (48)$$

где интеграция по контуру в области z мы должны совершить, обходя его против часовой стрелки (в направлении от оси OX к оси OY), а в области u — в соответственном направлении, в наших рассмотренных выше случаях — по часовой стрелке. Из формулы (48) заключаем, что интересующий нас момент определяется весьма простым соотношением

$$M = Re(\pi \rho i K), \quad (49)$$

где K — есть коэффициент $\frac{1}{u - u_0}$ в разложении $f(u) = z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2$ в области полюса u_0 . Применим нашу формулу к задаче, рассмотренной в § 6. Положив для простоты $u = u_0 + s = i - n + s$, легко находим по формулам (31) и (32)

$$f(u) = -\frac{N^2}{2} \frac{(i - n - b + s)^2 [2i(1 + \varepsilon) - 2n + s]}{s^3 (2i + s)^4 [i(1 + \varepsilon) - n + s]};$$

отсюда, разложив функцию по степеням s и собрав члены при $1/s$, получим

$$\begin{aligned} \frac{16iK}{N^2} &= 3i - 4(n + b) - \frac{5i}{2} \{1 + i(n + b)\}^2 - \frac{i}{2} \frac{i[1 + i(n + b)]^2}{2(1 + \varepsilon + ni)^2} + \\ &\quad + (n + b) \frac{1 + (n + b)i}{1 + \varepsilon + ni}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (33) и подставив в равенство (49) найденное значение iK , мы будем иметь по упрощении искомую формулу момента:

$$M = 4\pi\rho a^2 v_0^2 \sin^2 \mu \left\{ \sin \beta \cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \mu \cos (\beta - \mu)}{1 + \varepsilon} + \frac{\sin (\beta - \mu) \cos (\beta - \mu) \cos^2 \mu}{(1 + \varepsilon)^2} \right\}.$$

При значительных величинах угла β момент положителен, и, как легко сообразить по расположению крыльев, на настоящем аэроплане он будет уравновешиваться моментом веса авиатора. Иное явление возникнет при малых β .

По формуле (35) критическое значение β , при котором полная сила давления P равна нулю, есть нуль. При этом момент

$$M = - \frac{4\pi\rho a^2 v_0^2}{(1 + \varepsilon)^2} \sin^3 \mu \cos^3 \mu$$

и силы давления ветра не только не стремятся выправить наклонившееся вперед крыло, а, наоборот, вращают его дальше.

При значениях, принятых для n и ε в § 6, если мы предположим ширину крыла равной приблизительно 1 м и скорость 14 м/сек, написанная выше формула дает для момента величину, близкую к 10 кгм на каждый метр длины крыла. Это обстоятельство выясняет причину опасных явлений, возникающих при неосторожном наклонении вперед крыльев летящего аэроплана. С увеличением ширины крыльев, если при этом отношение стрелки и ширины не изменяется, опасный момент возрастает пропорционально квадрату ширины.

В заключение скажем несколько слов о том, в каком соотношении изложенная теория стоит, по нашему мнению, к явлениям, имеющим место при реальных условиях. Первое существенное усложнение вносит трение воздуха о крылья. Эта причина служит источником задерживающей силы, направленной противоположно скорости движения, и нашей теорией совершенно не захватывается. Что касается поддерживающей силы, перпендикулярной к скорости движения, то мне представляется, что ее величина едва ли может значительно измениться от влияния трения. Другое важное обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание,— это несколько иной характер потока, устремляющегося на аэроплан, чем предположено в нашей работе. Так как крыло имеет конечную длину, то окружающий воздух не может двигаться плоскопараллельным потоком; его движение за пределами крыльев будет существенно отличаться от разобранного нами. Я полагаю, что на оконечность каждого крыла будет опираться некоторый сопутствующий ему вихрь, образующийся благодаря разности скоростей на нижней и верхней поверхностях крыльев. Крыло вместе с этим вихрем и моделируется нашим бесконечным цилиндрическим крылом.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ О ДВИЖЕНИИ АЭРОПЛАНОВ¹

В настоящее время накопилось очень много опытных данных, позволяющих строить превосходные летательные аппараты, на которых совершают большие путешествия. Поэтому своевременно подумать о том, чтобы попытаться теоретически обосновать опытные данные. Как и в большинстве теоретических изысканий, идущих рядом с фактами, здесь могут быть отмечены направления последующих опытов, от которых возможно ожидать дальнейшего развития аэропланых форм. Для этого я постарался познакомиться с некоторыми из явлений, связанных с теорией летания, и попытался объяснить их.

При летании приходится останавливаться на нескольких существенных вопросах. Во-первых, приходится объяснить, как возникают поддерживающие силы, которые действуют на крылья. Во-вторых, каков момент, опрокидывающий крыло. Третий весьма интересный вопрос — вопрос о действии различного рода рулей. Недавно мне удалось наметить теоретический путь, выясняющий действие рулей высоты. Но я этого вопроса касаться не буду, потому что мое исследование не доведено еще до конца. Что же касается действия потока на неподвижное крыло (или, что то же, действия спокойного воздуха на летящее крыло), то некоторых результатов мне удалось достигнуть; получились формулы, весьма напоминающие и даже прямо совпадающие с эмпирическими. Поэтому вопросу о действии воздуха на крыло аэроплана (точнее, моноплана) и будет посвящено мое сообщение.

Математические затруднения не позволяют охватить вопрос во всей его сложности. Приходится по необходимости несколько упростить постановку задачи, отбросив те явления, которые трудно уловимы современным анализом и которые, как оказывается, не играют существенной роли. Другими обстоятельствами можно пренебречь, так как их второстепенная роль выясняется из теоретических соображений. Так, например, можно совершенно игнорировать сжимаемость воздуха при установившемся движении, так как при скоростях, далеких от скорости звука в воздухе, его

¹ Сообщение, читанное на заседании научно-технического комитета Московского общества воздухоплавания 27 октября 1910 г. Записано студентами В. П. Ветчинкиным и М. Ф. Адамчиком. Впервые напечатано в журнале «Вестник воздухоплавания», СПб., 1910, № 22.

сжимаемость не имеет значения². Скорости же аэропланов во много, в десять и более раз меньше этой последней.

Второе упрощение состоит в том, что мы не принимаем во внимание трение воздуха о крыло. Это обстоятельство более существенно. По всей вероятности, оно повлечет некоторое уменьшение подъемной силы, которая

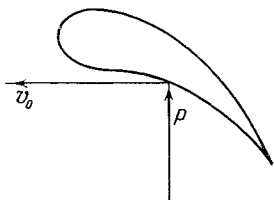


Рис. 1

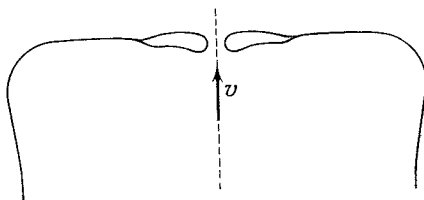


Рис. 2

получается при отсутствии трения; а главное, оно повлечет к возникновению удерживающей силы, направленной противоположно движению крыла. Этого нет при отсутствии трения, где развивается простая поддерживающая сила, перпендикулярная к направлению относительной скорости воздуха (или, что все равно, к скорости полета в спокойном воздухе), и нет силы против направления полета³.

Несмотря на все это, от рассмотрения сил трения приходится отказаться ввиду математической трудности дела.

Наконец, третье упрощение состоит в том, что совершенно приходится отказаться от мысли решить вопрос о движении конечного крыла, как это бывает в действительности. Приходится рассматривать бесконечно длинное цилиндрическое крыло, движущееся по направлению, перпендикулярному к образующим. Таким образом, мы будем рассматривать вместо конечного бесконечное крыло, разрез которого перпендикулярно к образующим представлен на рис. 1.

Если скорость его есть v , то вследствие этой скорости развивается поддерживающая сила P , перпендикулярная к скорости, как это выходит из теории (при отсутствии трения).

Эта необходимость рассматривать бесконечное крыло как будто весьма существенно изменяет задачу. Но мне представляется, что реальное явление должно быть похоже на то, которое получается при рассмотрении

² См. мою работу «О газовых струях» в Ученых записках Отделения физико-математических наук Московского университета, 1903 [стр. 11—96 настоящего издания].

³ В практике летания за «поддерживающую силу» принимается вертикальная составляющая полного воздействия (давления и трения) воздуха на аэроплан, за «лобовое сопротивление» — горизонтальная составляющая той же силы, за «скорость» — горизонтальная составляющая истинной скорости аэроплана. В этом смысле и при отсутствии трения может быть «лобовое сопротивление», уменьшающее «скорость» аэроплана. Оно обращается в нуль, когда истинная скорость горизонтальна.

бесконечно длинных крыльев, потому что в действительности крылья конечной длины необходимо будут сопровождаться увлекающимися на них вихорьками, вместе с которыми крылья могут быть моделированы бесконечным крылом. В существе явления будут похожи и с качественной стороны, и даже с количественной. Эти сопровождающие крылья вихри должны иметь вид длинных усов, расходящихся далеко в обе стороны,

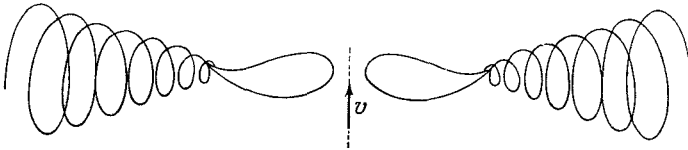


Рис. 3

а затем заворачивающих назад и вниз. Приблизительный вид их представлен на рис. 2. В несжимаемой жидкости без трения эти вихри бесконечно длинны. В действительности вследствие вязкости воздуха эти вихри, конечно, не могут быть бесконечными. Расходясь от концов крыла, они расширяются и исчезают, как представлено на рис. 3. Крыло вместе с этими вихорьками и будет моделироваться нашим цилиндрическим бесконечным крылом.

При всех выше выставленных ограничениях задача формулируется так: невихревой поток несжимаемой жидкости течет параллельно плоскости с определенной постоянной скоростью в бесконечной дали. Определить его давление на преграждающий цилиндр или изогнутую пластинку.

Перейдя к изложению теории поддерживающей силы, прежде всего приходится задать вопрос: откуда происходит поддерживающая сила, в чем ее причина? Долгое время ее искали не там, где она заключается. Это происходило вследствие неточного понимания знаменитого парадокса Эйлера.

Эйлер показал, что если в невихревой жидкости движется тело с постоянной скоростью, то оно не будет испытывать никакой силы сопротивления. Если тело держать в потоке, то опять-таки никакой равнодействующей при этом не развивается.

Долгое время не замечали, что теорема Эйлера применяется с известными ограничениями, о которых речь будет впереди. Поэтому поддерживающую силу искали в разрыве, который возникает благодаря острым краям крыла. Основываясь на теории разрыва, возникновение поддерживающей силы можно было бы объяснить образованием области спокойной жидкости позади крыла (рис. 4). Но подсчеты давали очень небольшую величину поддерживающей силы, которую дает поток при малых углах. Этой силы далеко не достаточно, чтобы объяснить явление полета.

В 1906 г. появилась статья Н. Е. Жуковского «О присоединенных вихрях»⁴, в которой указано правильное отношение к знаменитому парадоксу Эйлера. Оказывается, что не принималось во внимание одно обстоятельство: применение этого парадокса возможно только в том случае, когда потенциал скоростей представляет однозначную непрерывную функцию во всей области, занятой жидкостью. Однако при известных обстоятельствах возможна многозначность этой функции. В этом и лежит источник ограничений применимости парадокса Эйлера.

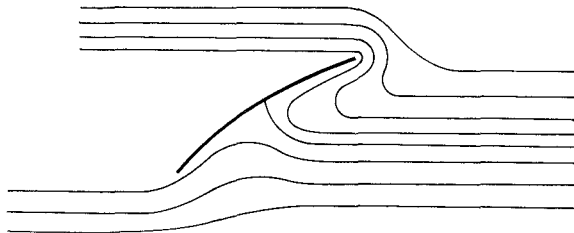


Рис. 4

Так как мне придется в формулах опираться на одно математическое количество — циркуляцию скорости, то объясню значение этого понятия. Вообразим, что у нас имеется цилиндр определенного сечения (рис. 5). На него устремляется установившийся поток, который обтекает его без разрыва. Тогда во всяком месте потока будет известная скорость, которую можно изобразить вектором определенной длины и направления.

Представим себе некоторую замкнутую кривую в этом потоке. Если мы вычислим работу, которую произвели бы силы, действующие на материальную точку массы, равной единице, при прохождении ее по этой кривой в предположении, что силы во всех точках пути равны соответствующим скоростям, то величина этой работы, равная $\int v ds \cos \alpha$, и называется циркуляцией скорости на данном пути. Обозначим ее буквой C . Тогда имеем

$$C = \int v ds \cos \alpha.$$

При однозначности потенциала скоростей циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру равна нулю: $C = 0$. Парадокс Эйлера приложим только тогда, когда $C = 0$. Тогда только не будет никаких давлений на поставленное в потоке тело.

⁴ Жуковский Н. Е. О присоединенных вихрях. — Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XIII, вып. 2, 1907 г. [или Избранные сочинения, т. II, Гостехиздат, 1948]. См. также Kutta W. M. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. — Illustrierte Aëronautische Mitteilungen, 1902, вып. 3.

При других обстоятельствах циркуляция может быть конечной, отличной от нуля величиной, которая зависит от формы цилиндра и от направления потока относительно цилиндра. Через нее, как оказывается, определенным образом будет выражаться сила, возникающая в этом случае, т. е. при $C \neq 0$.

Н. Е. Жуковский показал, что если у нас имеется поток, обтекающий цилиндр, и циркуляция скорости по охватываемому ею контуру конечна

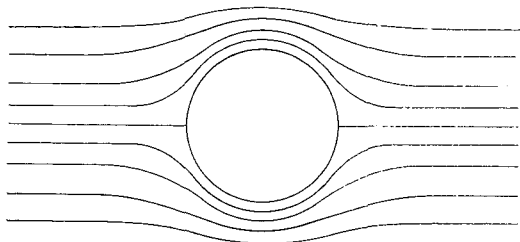


Рис. 5

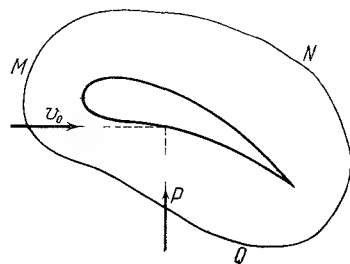


Рис. 6

и отлична от нуля, то развивается сила, перпендикулярная к направлению скорости (рис. 6). Если обозначить скорость потока в бесконечно удаленных точках через v_0 , поддерживающую силу, перпендикулярную к скорости, через P , циркуляцию скорости по произвольному охватываемому цилиндр контуру через C (величина C не зависит ни от формы, ни от размеров контура MNQ), плотность жидкости через ρ , то между этими величинами существует зависимость

$$P = C\rho v_0.$$

Эта формула справедлива и в случае наличия присоединенных вихрей⁵.

Итак, поддерживающая сила равна произведению циркуляции на плотность жидкости и на скорость потока в бесконечности. Во всякой частной задаче, при определенном виде сечения крыла, необходимо, таким образом, подсчитать циркуляцию в связи с формой и затем выяснить, достаточно ли этого объяснения, чтобы охарактеризовать силу, поддерживающую крыло аэроплана. Оказывается, что путем такого объяснения можно истолковать возникающее явление: величина силы близка к полученной опытным путем (несколько ее превышает).

Первая форма, которую мне пришлось рассмотреть, — это часть боковой поверхности круглого цилиндра. В данном случае непрерывное обтекание возможно только тогда, когда направление потока параллельно хорде

⁵ Н. Е. Жуковский связывал циркуляцию и поддерживающую силу с присоединенными вихрями. Но оказывается, что дело в многозначности потенциала скоростей, и безразлично, будут ли существовать присоединенные вихри или нет.

дуги. Благодаря этой непрерывности снизу поток будет течь несколько медленнее, а сверху — несколько скорее (рис. 7). Разность скоростей в свою очередь вызывает разность гидродинамических давлений под и над пластинкой и подъемную силу⁶.

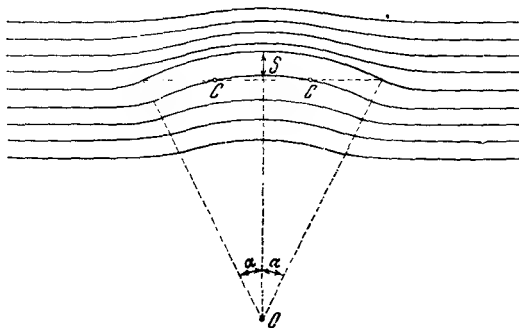


Рис. 7

Вычисляя эти давления, я получил очень простую формулу для поддерживающей силы

$$P = 2\rho s v_0^2,$$

где s — стрелка дуги, или

$$P = 2\rho c v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

где c — полухорда дуги, а α — половина центрального угла, так что⁷

$$s = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

⁶ Обозначив гидродинамическое давление и скорость вдали от крыла через p_0 и v_0 , а в какой-нибудь точке около крыла через p и v , имеем по теореме Бернулли

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2};$$

отсюда видно, что где скорость больше, там давление меньше, и наоборот.

⁷ Когда печаталась моя работа по этому вопросу «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» (Математический сборник, т. XXVIII, 1910 [стр. 97 настоящего издания]), Н. Е. Жуковский указал мне, что еще в 1902 г. приват-доцент Кутта (W. M. Kutta) в заметке «Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten» (Illustrierte Aëronautische Mitteilungen, 1902, вып. 3) разрешил эту задачу. Он является и первым, обратившим внимание на то, что парадокс Эйлера не имеет места при многозначности потенциала скоростей. Кутта ограничился только случаем хорды, параллельной скорости потока, и дальше этим вопросом не занимался. Формулы, которыми он пользовался при своих исследованиях, довольно сложны, потому что он не нашел удобного метода. Но полученное им выражение для силы давления вполне совпадает с формулой (1).

Любопытно, что подъемная сила зависит исключительно от размеров стрелки. Если взять несколько дуг с одной и той же стрелкой, но разных радиусов, то для всех них сила будет одинаковая (рис. 8). Для наглядности приводим небольшую табличку сил давления P кг/м² в воздухе при обычных скоростях аэроплана: 14, 17 и 20 м/сек (50, 61 и 72 км/час); при этом обозначим центральный угол через 2α и отношение $s/2c$ стрелки к хорде через k .

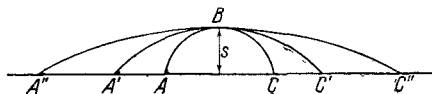


Рис. 8

$2\alpha^\circ$	k	P_{14}	P_{17}^*	P_{20}^*
15	1 : 30,5	5,3	7,8	10,8
30	1 : 15,2	10,6	15,6	21,6
32	1 : 14,2	11,4	16,8	23,3
36	1 : 12,6	12,8	18,8	26,2

* Последние два столбца вычислены студентом В. П. Ветчинкиным.

Конечно, если углубление будет очень значительно, то трение будет оказывать несколько больший эффект, и в зависимости от этого может возникнуть иное явление. Вероятно, есть средний размер, являющийся наиболее выгодным в вязкой жидкости. Представляется, что эта выгодная форма соответствует сравнительно короткой дуге.

В рассмотренной задаче крайне неприятно было то, что приходилось довольствоваться одним определенным направлением потока в бесконечности, и только при нем можно было объяснить явление поддерживающей силы. Между тем весьма существенно рассмотреть такой случай, когда поток стремится на крыло не по направлению хорды, а как-нибудь иначе. Этот вопрос я также разрешил, обратив внимание на ту причину, которая не позволяет найти поток, удовлетворительно решающий дело в разобранным случае. Все затруднение в том, что на крыле рассмотренного типа имеется два математически острых ребра. Для того чтобы устранить указанное стеснение, достаточно было рассмотреть модель крыла с притуплением с одной стороны. Я рассматривал именно такую модель. Сечением ее является та же самая дуга окружности, но снабженная на одном из концов насадком в виде кружка, пересекающего дугу под прямым углом (рис. 9). Радиус насадка, конечно, надо предполагать небольшим, так как он должен изображать естественную притупленность перед-

него края крыла, реально никогда не имеющего математически острой формы.

Оказывается, что задачу в такой форме можно разрешить вполне точно при названных углах наклона хорды к скорости потока вдаль. Для этого случая формула подъемной силы получает вид

$$P = 2\pi\rho cv_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu}, \quad (2)$$

где α и μ имеют прежние значения (формула (1)), β — угол хорды с нап्रा-

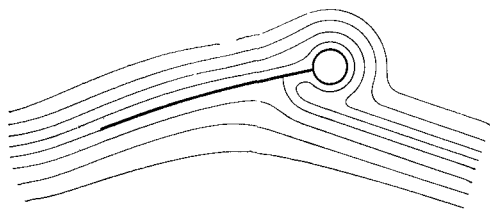


Рис. 9

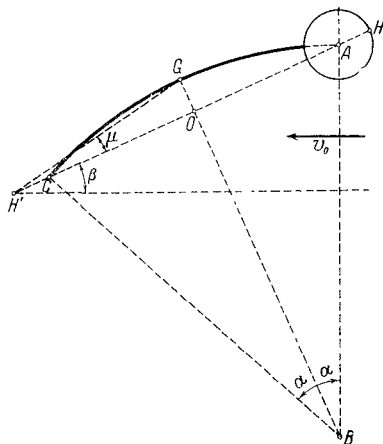


Рис. 10

влении потока вдаль, а μ имеет следующее значение: отметим на продолжении хорды AC точку H' , симметричную с H относительно O (рис. 10); соединим H' с G ; тогда получим⁸

$$\angle GH'O = \mu.$$

При $\beta = 0$ формула (2) совпадает с формулой (1), полученной при отсутствии насадка.

Когда крыло движется под некоторым углом, то подъемная сила может превысить первоначальную ($\beta = 0$) в 4—5 раз. Исследуя подробно эту форму, я пришел к заключению, что не при всех углах и скоростях возможно установившееся движение и, следовательно, выражение подъемной силы формулой (2). Оказывается, что здесь является естественный предел: отвлекаться от сжимаемости воздуха законно только до тех пор, пока

⁸ В аппарате Фармана $\mu \approx 7^\circ 30'$. Приблизительно

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{s}{c} = 2k.$$

скорость нигде в потоке не достигает скорости звука, так как при нарушении этого условия установившееся движение перестает быть возможным⁹. Между тем, скорость в некоторых точках на окружности насадка ($v_{\max}$) во много раз превосходит скорость потока (v_0).

Поясним на примере, каковы пределы применимости формулы (2). Пусть у нас будет крыло описанной формы с центральным углом в 30°

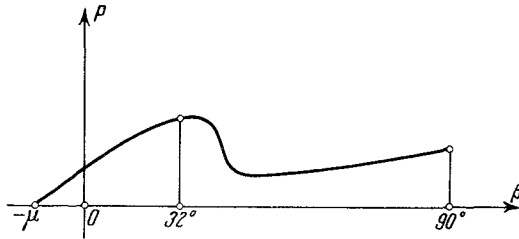


Рис. 11

($k = 1/15,2$), хордой в 2 м и насадком в 1 см в диаметре. Тогда

$$v_{\max} = 40,65 v_0 \sin \beta.$$

Отсюда

$$v_0 \sin \beta = 7,4 \text{ м/сек.}$$

Следовательно, при $v_0 < 7,4 \text{ м/сек}$ формула (2) применима при всяком угле наклона. Но если v_0 значительно превосходит величину 7,4 м/сек, то при наклонах крыла, больших определенного предела, прекращается возможность непрерывного обтекания. При обычных скоростях аэропланов предельный угол $\beta_{\max}$ имеет следующие значения:

$v_0, \text{ м/сек}$	14	17	20
$\beta_{\max}^\circ$	32	28	22

При менее остром переднем крае предельный угол будет больше.

Если наклон крыла окажется более предельного, то должно наступить новое явление: течение с разрывом сплошности. Этому течению соответствует особое исследование. Получается другая формула, определяющая поддерживающую силу. Эта сила будет значительно меньше той, которая определяется по формуле (2).

Кривая изменения давления с возрастанием угла для описанного крыла и $v_0 = 14 \text{ м/сек}$ должна иметь приблизительно такой вид, как на рис. 11. При скоростях, меньших 7,4 м/сек, максимум исчезает и кривая обращается в синусоиду.

⁹ Позднейшие исследования показали, что установившееся движение возможно и при скоростях, превышающих скорость звука. См. примечание⁵ автора на стр. 10. (Прим. ред.)

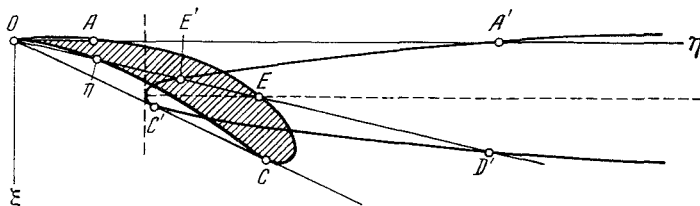


Рис. 12

Из формулы (2) видно, что подъемная сила быстро падает при наклоне крыла вперед по направлению движения; при некотором определенном угле $\beta = -\mu$ обращается в нуль, а затем меняет знак и давит на крыло сверху вниз. Из той же формулы видим, что величина поддерживающей силы при $\beta = 0$ не зависит от диаметра насадка.

Кроме описанных двух я исследовал некоторые формы крыльев, напоминающие крылья птиц с непрерывными и мягкими обводами и лишь с одной точкой заострения. Простейшая форма этого рода получится, когда очертание сечения крыла представляет результат инверсии параболы (рис. 12)¹⁰.

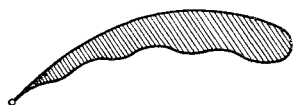


Рис. 13

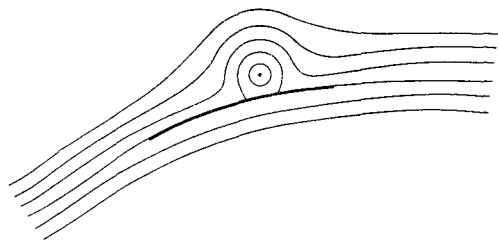


Рис. 14

Кроме этой простейшей кривой я имею возможность выделить широкий класс таких кривых, которые можно охватить этим исследованием. В виде примера укажу форму с зубцами на нижней поверхности крыла, которые можно построить так, что подъемная сила его увеличится (рис. 13). Надо прежде заметить, что неудачные очертания зубцов могут повлечь и умень-

¹⁰ Строится эта кривая таким образом: на всяком радиусе-векторе, исходящем из начала O (точка инверсии) и пересекающем параболу, наносятся две точки так, что произведение их расстояний от начала на длину соответственных радиусов-векторов параболы есть величина постоянная. Имеем

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OD} \cdot \overline{OD'} = \overline{OE} \cdot \overline{OE'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \text{const.}$$

шение подъемной силы. В моем труде приведены формулы для расчета очертаний зубцов.

Наконец, я коснулся влияния на крыло присоединенных вихрей. Присоединенный вихрь должен иметь форму шнура, параллельного образующим крыла и расположенного близ выпуклой его поверхности (рис. 14). Сам по себе вихрь не вносит непосредственно добавочного давления на обтекаемую пластинку, но влияние его сказывается косвенно, так как он меняет циркуляцию по главному контуру, окружающему пластинку. Изменение может быть довольно значительно. На опыте, сколько мне известно, таких изменений не наблюдалось; по всей вероятности, сопутствующий вихрь вследствие своей неустойчивости не может оставаться около пластинки.

Последним вопросом, который я затронул своим исследованием, является вопрос о величине вращающего момента, действующего на крыло. Получив общую его формулу, я подробно исследовал ее для одной простой формы сечения крыла, именно формы, получаемой путем инверсии параболы. Оказалось, что при значительных величинах угла β момент положителен, еще больше поднимает крыло. При малых углах β он уменьшается, переходит через нуль и при критическом угле имеет уже довольно значительную отрицательную величину. При дальнейшем наклоне крыла вперед он, оставаясь отрицательным, все увеличивается по абсолютной величине, т. е. еще больше наклоняет крыло.

При этом подъемная сила переходит через нуль, начинает давить на крыло сверху вниз. Проведя вычисления для формы, по размерам подходящей к крылу аэроплана Фармана, я нашел следующий результат: при критическом угле величина момента равна 10 кгм на каждый метр длины крыла, если скорость равна 14 м/сек, а ширина крыла 1 м. При возрастании скорости и ширины момент растет пропорционально произведению их квадратов. Таким образом может получиться очень значительный момент, стремящийся опрокинуть аппарат. Это поясняет, насколько опасно наклонение аэроплана вперед при полете.

§ 1. Общие формулы поддерживающей силы и вращающего момента. В предлагаемой работе мы устанавливаем некоторые общие теоремы, имеющие место независимо от очертаний крыла, исходя из следующих обычных теоретических предположений о потоке. Поток в относительном движении представляем себе плоскопараллельным, а крыло — бесконечно длинным цилиндром, нормальное сечение которого лежит в направляющей плоскости потока. Сжимаемость воздуха и вязкость его во внимание не принимаем. Наконец, рассматриваем такое невихревое течение, при котором весь контур крыла омывается одной из линий тока, имеющей на этом контуре две точки раздела, в одной из которых поток набегаёт, а в другой стекает с крыла. Если эти точки — обыкновенные точки кривой контура, то скорость в них будет нулем; если же какая-нибудь из них представляет точку возврата, то поток может обладать в ней и конечной скоростью. Наконец, на крыле могут существовать точки заострения и в иных местах; в таких пунктах скорость течения будет иметь величину бесконечно большую. Предположим, сверх того, что поток покидает крыло всегда в одной и той же точке независимо от угла встречи.

Область комплексного переменного z , область течения, как известно, всегда возможно конформно изобразить на верхней полуплоскости комплексного переменного u так, что действительная ось полуплоскости будет соответствовать контуру крыла. Бесконечно удаленная точка области z при этом будет отображаться в некотором определенном пункте $u = \alpha$ на полуплоскости; значение $u = \alpha$ представляет простой полюс функции z , так как при обходе вокруг этой точки z должно вернуться к исходной величине. Если так, то вблизи полюса мы должны иметь

$$\begin{aligned} \frac{z}{a} &= \frac{A}{u - \alpha} + f(u - \alpha), \\ \frac{1}{a} \frac{dz}{du} &= - \frac{A}{(u - \alpha)^2} + f'(u - \alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

где a — линейная величина, A — некоторое комплексное число, а f — голоморфная функция своего аргумента. Коэффициенты A , α , равно как

¹ Впервые напечатано отдельной брошюрой Высшим военным редакционным советом в 1922 г.

и вид функции f , определяются исключительно формой крыла, нисколько не завися от рассматриваемого течения.

Обозначим через φ и ψ соответственно потенциал скоростей и функцию тока. Так как на действительной оси области u

$$\psi = \text{const} = 0,$$

то производная функции

$$w = \varphi + i\psi,$$

характеризующей поток, должна быть на указанной оси всюду реальна; в точке $u = \alpha$ она должна иметь полюс второго порядка, так как функция

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta},$$

определяющая собой скорость v и угол ее θ с осью OX в области течения, должна в указанной точке иметь заданное конечное значение $v_0 e^{-i\theta_0}$. С полюсом $u = \alpha$ совпадает логарифмическая точка функции w , причем циркуляция вокруг этой точки должна быть вещественным количеством.

Всем указанным требованиям мы удовлетворим, положив

$$\frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = -\frac{Ae^{-i\theta_0}}{(u-\alpha)^2} - \frac{A_1 e^{i\theta_0}}{(u-\alpha_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\alpha_1} \right), \quad (2)$$

где α_1 и A_1 — комплексные числа, сопряженные соответственно α и A . Реальное количество C может быть изображено в виде

$$C = Be^{-i\theta_0} + B_1 e^{i\theta_0}, \quad (3)$$

причем B и B_1 — сопряженные комплексные числа.

Положив

$$B = -\frac{iA}{\alpha - \alpha_1}, \quad B_1 = -\frac{iA_1}{\alpha - \alpha_1}, \quad (4)$$

мы достигаем того, чтобы производная w обладала только одним конечным корнем, и приводим равенство (2) к виду

$$\frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = (\alpha_1 - \alpha) \frac{Ae^{-i\theta_0}(u - \alpha_1) - A_1 e^{i\theta_0}(u - \alpha)}{(u - \alpha)^2(u - \alpha_1)^2}. \quad (5)$$

Эта функция обращается в нуль в точке $u = \infty$, которую можно в области z сделать соответствующей неизменной точке схода потока с крыла, и, сверх того, имеет, как и требовалось, один конечный реальный корень

$$u = \frac{\alpha_1 A e^{-i\theta_0} - \alpha A_1 e^{i\theta_0}}{A e^{-i\theta_0} - A_1 e^{i\theta_0}},$$

который определяет на крыле критическую точку разделения линии тока в месте набегания текущего воздуха.

Весьма важно отметить, что при принятом изображении течения направление потока в его далеких точках, характеризующее углом Θ_0 , совершенно не фигурирует в функции, изображающей область течения z на полуплоскости комплексного переменного u . Это-то обстоятельство и позволяет разрешить в любом предположении о форме крыла вопрос о характере зависимости от направления потока как поддерживающей силы давления, так и вращающего момента.

Что касается поддерживающей силы, то, как было показано в нашей работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана)»², она определяется по формуле Н. Е. Жуковского и имеет величину

$$P = av_0^2 K \sin \alpha. \quad (6)$$

В самом деле, положим

$$A = \lambda e^{i\mu}, \quad A_1 = \lambda e^{-i\mu}, \quad \alpha - \alpha_1 = i\beta, \quad (7)$$

$$\beta > 0, \quad \lambda > 0;$$

тогда по формулам (3) и (4)

$$C = -\frac{2\lambda}{\beta} \cos(\Theta_0 - \mu),$$

$$P = -\frac{4\pi av_0^2 \lambda}{\beta} \cos(\Theta_0 - \mu),$$

и если мы примем

$$\sigma = 3\frac{\pi}{2} - \Theta_0 + \mu, \quad (8)$$

то P будет иметь как раз вид (6), причем

$$K = \frac{4\pi\rho\lambda}{\beta}. \quad (9)$$

Так как при $\sigma = 0$ поддерживающая сила обращается в нуль, то σ есть не что иное, как угол, образуемый потоком вдали от крыла с критическим направлением. Так как $3\frac{\pi}{2} - \Theta_0$ есть угол потока с отрицательным направлением оси OY , то из формулы (8) следует, что μ равно углу критического направления с осью OY ; с осью OX это направление образует угол $\pi/2 + \mu$.

Обратимся, далее, к вычислению вращающего момента M . По формуле, данной мной в цитированной выше статье, величина M равна действительной части выражения

$$J = -\frac{\rho}{2} \int z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 du,$$

² Математический сборник, т. XXVIII, 1910 [стр. 97—130 настоящего издания].

где интеграция совершается по контуру, охватывающему полюс, в направлении от оси OY к оси OX на полуплоскости u .

Обозначив через Q коэффициент при $\frac{1}{u-\alpha}$ в разложении функции

$$F(u) = z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2,$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} J &= \pi i Q, \\ M &= \operatorname{Re}(\pi i Q). \end{aligned}$$

Из уравнений (1) и (5) получаем

$$\begin{aligned} -F(u) &= \frac{v_0^2 a^2}{(u-\alpha)^3} \frac{1 + m(u-\alpha) + m_1(u-\alpha)^2 + \dots}{1 - m_1(u-\alpha)^2 + \dots} \times \\ &\times \left\{ A e^{-i\theta_0} - iC(u-\alpha) + \left[C - \frac{A_1 e^{i\theta_0}}{\beta} \right] \frac{(u-\alpha)^2}{\beta} + \dots \right\}^2. \end{aligned}$$

Здесь C по-прежнему обозначает коэффициент, определяемый формулами (3) и (4),

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha_1}{i}, \quad m = \frac{f(0)}{A}, \quad m_1 = \frac{f'(0)}{A}.$$

Составляя на основании приведенного разложения $F(u)$ коэффициент Q , находим

$$-\frac{1}{v_0^2 a^2} Q = 2m_1 A^2 e^{-2i\theta_0} + 2A e^{-i\theta_0} \left(C - \frac{A_1 e^{i\theta_0}}{\beta} \right) \frac{1}{\beta} - C^2 - 2miCA e^{-i\theta_0},$$

откуда, раскрыв комплексные числа

$$m = l + ik, \quad m_1 = l_1 + ik_1$$

и воспользовавшись формулами (3), (4) и обозначениями (7), имеем для реальной части H от iQ следующее выражение:

$$\frac{H}{2v_0^2 a^2 \lambda^2} = \left(-l_1 + \frac{k}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) \sin 2(\Theta_0 - \mu) + \left(k_1 + \frac{l}{\beta} \right) \cos 2(\Theta_0 - \mu) + \frac{l}{\beta};$$

откуда, вводя по формуле (8) угол σ , найдем для момента

$$M = \pi r H = 2\pi r v_0^2 a^2 \frac{\lambda^2}{\beta} \left\{ -\left(l + k_1 \beta \right) \cos 2\sigma + \left(k - l_1 \beta + \frac{1}{\beta} \right) \sin 2\sigma + l \right\}. \quad (10)$$

Опрокидывающий момент M_0 , соответствующий критическому направлению потока, получается из формулы (10), если положить в ней $\sigma = 0$; таким образом

$$M_0 = -2\pi r v_0^2 a^2 \lambda^2 k_1. \quad (11)$$

Положив

$$\lambda(l + k_1\beta) = g, \quad \lambda\left(k - l_1\beta + \frac{1}{\beta}\right) = h, \quad \lambda k_1\beta = q \quad (12)$$

и пользуясь (9), приводим засим формулу (10) к окончательному виду

$$2M = a^2 v_0^2 K (-g \cos 2\sigma + h \sin 2\sigma - q + g). \quad (13)$$

Отметим то важное обстоятельство, что как коэффициент K формулы (6), определяющей поддерживающую силу, так и коэффициенты формулы вращающего момента зависят исключительно от очертаний крыла; в состав K входит множителем лишь один посторонний элемент — плотность воздуха.

§ 2. Парабола устойчивости. Перейдем теперь к определению геометрического места метacentра в крыле и покажем, что при любом его сечении таким местом будет парабола. Ось OY в области z направим по критическому направлению, так что угол потока с ее отрицательным направлением будет σ . Обозначая через x и y координаты метacentра и имея в виду, что он определится как пересечение перпендикулярной к направлению потока линии действия поддерживающей силы с таковой же линией при бесконечно малом отклонении течения, легко находим для интересующих нас координат следующие два уравнения:

$$\Phi(\sigma) = M - P(x \sin \sigma + y \cos \sigma) = 0,$$

$$\Phi'(\sigma) = 0.$$

По упрощении с помощью формул (6) и (13) эти уравнения обращаются в следующие:

$$(x - ag) \cos 2\sigma - (y - ah) \sin 2\sigma = x + aq - ag,$$

$$(x - ag) \sin 2\sigma + (y - ah) \cos 2\sigma = 0,$$

откуда имеем уравнение искомого геометрического места

$$(x - ag)^2 + (y - ah)^2 = (x + aq - ag)^2. \quad (14)$$

Оно представляет собою параболу с фокусом в точке, координаты которой суть

$$x_1 = ag, \quad y_1 = ah, \quad (14')$$

и директрисой

$$x = a(g - q),$$

параллельной критическому направлению потока. Расстояние директрисы от начала координат, очевидно, равно числовой величине количества $a(g - q)$, а параметр параболы равен aq .

Ясно, что большая или меньшая устойчивость моноплана, снабженного крыльями данного очертания, зависит от вида и расположения найденной нами параболы; чем она острее, т. е. чем меньше ее параметр, тем

аппарат устойчивее, так как тем ближе к крылу будет расположен метациентр. Естественно поэтому назвать место метациентров *параболой устойчивости*.

Обратимся теперь к выяснению связи этой кривой с величиной подерживающей силы, ее вращающим моментом и положением линии действия силы. Что касается линии действия, то она будет касательной параболы в соответственном метациентре. Так как перпендикуляр из фокуса на касательную встречает ее на прямой, прикасающейся к параболе в вершине ее, то мы приходим к следующему правилу: пусть даны фокус и директриса параболы устойчивости; через середину перпендикуляра из фокуса на директрису проводим параллель этой прямой; тогда та точка, где проведенное из фокуса направление потока встречает указанную параллель, будет принадлежать линии действия, которая по свойству течения перпендикулярна к направлению потока.

Вычислим теперь вращающий момент M_1 по отношению к фокусу. Очевидно,

$$M_1 = -Pd,$$

если d есть расстояние от фокуса до той касательной параболы, по которой направлена сила. Подставляя сюда величину силы из формулы (6) и замечая, что $d \sin \sigma$ есть проекция d на ось параболы, равная по указанному выше свойству параболы половине ее параметра, мы приходим к следующему выражению для M_1 :

$$2M_1 = -Ka^2v_0^2q, \quad (15)$$

которое на основании формул (9), (11) и (12) приводится к еще более простому виду:

$$M_1 = M_0. \quad (16)$$

Таким образом, силы давления воздуха на крыло приводятся к силе P , проходящей через фокус, и постоянной паре, момент которой равен опрокидывающему моменту и которую можно назвать опрокидывающей парой.

Наконец, величина силы определяется следующим простым построением: проведем через фокус окружность, прикасающуюся к оси параболы и расположенную по ту сторону оси, где находится задний конец крыла; диаметр окружности

$$D = av_0^2K;$$

тогда эта окружность представляет собою геометрическое место конца проведенного из фокуса вектора силы P .

В заключение этого параграфа отметим один важный особый вид профиля. Возможно подобрать такое очертание его, что коэффициент q формул (12) окажется нулем; для этого достаточно, чтобы k_1 равнялось нулю. Тогда параметр параболы устойчивости также обратится в нуль; опрокидывающий момент в свою очередь будет равен нулю.

В таком случае поддерживающая сила будет всегда проходить через неизменную точку в крыле, представляющую собою фокус выродившейся в двойной прямолинейный отрезок параболы устойчивости.

Координаты этой точки определяются поэтому по-прежнему формулами (14') и имеют величину ag , ah .

Отмечаемые особые формы профиля выгодны для рулей аэроплана.

§ 3. Изображающие дуги и главная дуга. Применим указанный выше прием к простейшему случаю, когда сечением крыла будет дуга круга. Приняв за начало центр дуги и направив ось OY параллельно ее хорде, мы можем положить

$$z = -a \frac{(u + ie^{-\tau i})(u - ie^{-\tau i})}{(u - ie^{\tau i})(u + ie^{\tau i})} e^{si},$$

где s подлежит определению. Ясно, что при реальном u модуль правой части равен a , и, следовательно, все точки, соответствующие таким u , находятся на окружности радиуса a . Заметим, с другой стороны, что при замене u на $-u$ функция z не меняет величины; поэтому крайними точками дуги будут те, для которых u принимает значения 0 и ∞ . Для них соответственно имеем

$$z = -ae^{(s-4\tau)i}, \quad z = -ae^{si}$$

и, положив $s = 2\tau$, видим, что точки эти расположатся симметрично относительно оси OY . Вся дуга лежит со стороны отрицательных x , причем точка $u = \infty$ имеет отрицательную ординату. Угол τ есть четверть угла, стягиваемого дугой. Таким образом,

$$z = -a \frac{u^2 + e^{-2\tau i}}{u^2 + e^{2\tau i}} e^{2\tau i} = -ae^{2\tau i} + \frac{2ai \sin 2\tau \cdot e^{2\tau i}}{(u - ie^{\tau i})(u + ie^{\tau i})}. \quad (17)$$

В данном случае имеем $\alpha = ie^{\tau i}$, и разложение z в области этого полюса имеет вид

$$z = a \sin 2\tau e^{\tau i} \left\{ \frac{1}{u - \alpha} - \frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau} - \frac{i \sin^2 \tau}{2 \cos \tau} - \frac{e^{-2\tau i}}{4} (u - \bar{\alpha}) + \dots \right\}.$$

Сравнив это выражение с общим разложением, приведенным в § 1, и приняв обозначения (7), (8) и (9) этого параграфа, получаем для данного случая

$$\lambda e^{\mu i} = A = \sin 2\tau e^{\tau i}, \quad m = -\frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau} - \frac{i \sin^2 \tau}{2 \cos \tau}, \quad m_1 = -\frac{e^{-2\tau i}}{4},$$

$$\tau = \mu, \quad \lambda = \sin 2\mu, \quad \beta = 2 \cos \mu, \quad l = -\frac{\cos^2 \mu}{2 \sin \mu},$$

$$k = -\frac{\sin^2 \mu}{2 \cos \mu}, \quad l_1 = -\frac{\cos 2\mu}{4}, \quad k_1 = \frac{\sin 2\mu}{4}.$$

Далее по формулам (12) имеем

$$\begin{aligned} g &= -\cos^3 \mu \cos 2\mu, \\ h &= \cos^3 \mu \sin 2\mu, \\ q &= 2 \sin^2 \mu \cos^3 \mu, \\ g - q &= -\cos^3 \mu, \end{aligned} \quad (18)$$

а по формулам (6) и (13) для силы и ее момента находим

$$\begin{aligned} P &= 4\pi \rho a v_0^2 \sin \mu \sin \sigma, \\ M &= -4\pi \rho a^2 v_0^2 \sin \mu \cos^3 \mu \sin^2 (\sigma - \mu). \end{aligned} \quad (19)$$

Опрокидывающий момент

$$M_0 = -4\pi \rho a^2 v_0^2 \sin^3 \mu \cos^3 \mu.$$

Так как угол потока с отрицательным направлением оси OY есть $\sigma - \mu$, как это следует из формулы (8), то мы приходим к известному правилу для нахождения критического направления в рассматриваемом случае: оно совпадает для крыла, опирающегося на дугу круга, с прямой, соединяющей задний конец крыла с его средней точкой.

Если мы теперь изменим направление осей, сделав ось OY параллельной критическому направлению, то формулы (14) § 2 определяют соответственную параболу устойчивости. Именно, координаты ее фокуса получатся умножением на радиус a первых двух коэффициентов g и h ; aq будет параметр, $a \cos^3 \mu$ — расстояние от центра до директрисы. Так как таково же расстояние от центра до фокуса, то центр лежит на параболе устойчивости. Эта точка будет, очевидно, метacentром для потока, направленного параллельно хорде дуги, так как ввиду симметрии течения вращающий момент по отношению к центру для такого направления будет нулем. Таким образом, парабола устойчивости дуги круга касается среднего радиуса в центре дуги.

Самое построение директрисы и фокуса крайне просто: директриса проходит через середину стрелки параллельно критическому направлению, а фокус лежит на пересечении прямой, проведенной через ту же точку параллельно линии, соединяющей середину дуги с передним концом крыла, и биссектора угла, под которым передняя половина крыла видна из центра. Указанными элементами парабола устойчивости вполне определяется.

Покажем теперь, что если имеется крыло с произвольным очертанием, то всегда возможно найти семейство дуг круга, которые имеют ту же самую параболу устойчивости, что и данное крыло; поддерживающая сила крыла и его вращающий момент в таком случае будут пропорциональны соответственной силе и моменту для дуги. Такие дуги будем называть *изображающими дугами*.

Прежде всего посмотрим, как преобразуется выражение (13) для момента, если, не изменяя направлений осей координат, мы переместим

начало их в точку с координатами (b, c) . Так как при избранных нами осях, когда ось ординат имеет критическое направление, коэффициенты ag и ah формулы (13) равны координатам фокуса параболы устойчивости, имеющей совершенно определенное расположение относительно крыла, то новые значения этих коэффициентов должны иметь то же значение при новом начале. Обозначая поэтому новые g и h через g' и h' , мы должны иметь

$$\begin{aligned} ag' &= ag - b, \\ ah' &= ah - c. \end{aligned}$$

Что касается коэффициента q , то он не изменяется с переменной начала, ибо aq есть параметр параболы устойчивости. Таким образом, с перенесением начала формула момента будет

$$2M = av_0^2 K [(b - ag) \cos 2\sigma + (ah - c) \sin 2\sigma - aq + ag - b].$$

При этом подъемная сила

$$P = av_0^2 K \sin \sigma.$$

Подберем новое начало так, чтобы оно было центром изображающей дуги. Обозначим радиус этой дуги через r ; тогда по формулам (19) имеем соответственные силу P' и момент M' :

$$P' = 4\pi r v_0^2 \sin \mu \sin \sigma,$$

$$2M' = 4\pi r v_0^2 \sin \mu [r \cos^3 \mu \cos 2\mu \cos 2\sigma + r \cos^3 \mu \sin 2\mu \sin 2\sigma - r \cos^3 \mu].$$

Из условия

$$\frac{M}{M'} = \frac{P}{P'} = T$$

имеем

$$\begin{aligned} b - ag &= r \cos^3 \mu \cos 2\mu, \\ ah - c &= r \cos^3 \mu \sin 2\mu, \\ b - ag + aq &= r \cos^3 \mu. \end{aligned} \tag{20}$$

Эти формулы показывают, что новое начало, как и следовало ожидать, лежит на параболе устойчивости, ибо координаты b, c удовлетворяют ее уравнению (14).

Если мы произвольно выберем за центр изображающей дуги такую точку параболы, для которой

$$b - ag > 0, \quad ah - c > 0,$$

то формулами

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{b - ag}{ah - c},$$

$$r \cos^3 \mu = b - ag + aq$$

определяются ее центральный угол и радиус, а расположение ее в крыле фиксируется тем, что ее средний радиус прикасается к параболе устойчивости.

Коэффициент T , определяющий отношение подъемной силы и момента крыла к соответственным величинам для изображающей дуги, будет меняться с изменением изображающей дуги. Возможно определить такую дугу, для которой наступают равенства

$$T = 1, \quad P = P', \quad M = M'.$$

Эту дугу будем называть главной дугой крыла. Ее центр, хорду и стрелку естественно называть центром, хордой и стрелкой крыла.

Из приведенных выше формул имеем для главной дуги два соотношения:

$$2r \sin^2 \mu \cos^3 \mu = aq,$$

$$4\pi r \sin \mu = aK.$$

Отсюда для определения ее центрального угла получаем уравнение

$$\sin \mu \cos^3 \mu = \frac{2\pi r q}{K} = n.$$

Разделив это уравнение на

$$(\cos^2 \mu + \sin^2 \mu)^2 = 1,$$

приведем его к виду

$$\frac{t}{(1+t^2)^2} = n, \tag{21}$$

где

$$t = \operatorname{tg} \mu.$$

Кривая

$$y = \frac{x}{(1+x^2)^2},$$

проходя через начало координат, в положительном координатном угле всеми точками лежит выше оси абсцисс, асимптотически к ней приближаясь в бесконечной дали. Ее высшая точка имеет ординату

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Очевидно, что при

$$n < \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

мы будем иметь два возможных значения t и соответственно две различные главные дуги. Из них мы выберем ту, которой соответствует меньший центральный угол, и₂ именно для нее сохраним принятое наименование.

Это уравнение изображает параболу с параметром $p = 2d\varepsilon^2$ и фокусом в точке F с координатами

$$\xi_1 = d \sin 2\tau, \quad \eta_1 = d \cos 2\tau.$$

Таким образом, d есть расстояние фокуса F от центра инверсии C . Фокус соответствует в плоскости u точке $u = -i\varepsilon$, лежащей в нижней полуплоскости. Координаты фокуса после инверсии будут определяться формулой (22), если в ней положим $u = -i\varepsilon$. Таким образом, получаем

$$x = \xi = -a \cos 4\tau, \quad y = \eta = a \sin 4\tau.$$

Фокальный отрезок оси параболы $F\infty$ превращается в осевую дугу EC исследуемого крыла (см. рис. 1).

Составляя затем разложение z , выраженного формулой (22), в области полюса

$$u = \alpha = -i\varepsilon + i\varepsilon^{\tau i},$$

находим

$$a + z = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left(\frac{1}{u_1 - \alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_1} + \frac{u_1 - \alpha_1}{4\alpha_1^2} + \dots \right), \quad (24)$$

где

$$u_1 = u + i\varepsilon, \quad \alpha_1 = \alpha + i\varepsilon = i\varepsilon^{\tau i}.$$

Сравнив эту формулу с формулой (1) и имея в виду последующие обозначения

$$m = l + ik = \frac{f(0)}{A}, \quad m_1 = l_1 + ik_1 = \frac{f'(0)}{A},$$

получим для A выражение

$$A = \sin 2\tau e^{-\tau i} = \lambda e^{i\mu},$$

откуда

$$\lambda = \sin 2\tau, \quad \mu = -\tau.$$

Для прочих коэффициентов получим те же выражения, как и в случае дуги круга:

$$\begin{aligned} l &= -\frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau}, & k &= -\frac{\sin^2 \tau}{2 \cos \tau}, \\ l_1 &= -\frac{\cos 2\tau}{4}, & k_1 &= \frac{\sin 2\tau}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Наконец,

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha_1}{i} = 2 \cos \tau - 2\varepsilon.$$

По формулам (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} K &= 4\pi\rho \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon}, \\ P &= 4\pi\rho a v_0^2 \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \sin \sigma. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнив эту формулу с первой из формул (19) и приняв во внимание формулу (8), усматриваем, во-первых, что критическое направление составляет с осью OY угол τ , равный одной четверти угла, стягиваемого осевой дужкой, и совпадает с критическим направлением, построенным для этой дужки; во-вторых, *подъемная сила исследуемого крыла будет более подъемной силы его осевой дужки, ибо она равна результату умножения силы осевой дужки на неправильную дробь*

$$n = \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon}.$$

Биссектор угла между хордой осевой дужки и осью CY , прикасающейся к ней в заднем конце, служащем центром инверсии, совпадает с биссектором угла касательных к параболе из того же центра; поэтому *критическое направление инверсии параболы делит пополам угол между касательными к контуру крыла из его заднего конца.*

Так как фокальный радиус-вектор параболы R , направленный к центру инверсии, имеет величину

$$R = \frac{p}{2 \cos^2 \tau} = \frac{d\varepsilon^2}{\cos^2 \tau}$$

и будет непременно менее расстояния d центра инверсии от фокуса, то

$$\varepsilon < \cos \tau,$$

и потому n есть величина существенно положительная.

Чтобы найти выражение момента относительно начала координат, находящегося, как явствует из предшествующего изложения, в центре осевой дужки, составляем по формулам (12) коэффициенты g , h и q , определяющие момент и параболу устойчивости. Воспользовавшись выражениями (25), имеем

$$\begin{aligned} g &= -\cos^3 \tau \cos 2\tau - \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2}, \\ h &= \cos^3 \tau \sin 2\tau - \frac{\varepsilon \sin 2\tau \cos 2\tau}{2} + \frac{\varepsilon \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon}, \\ q &= 2 \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon) = 2 \sin^2 \tau \cos^3 \tau - \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2}, \\ g - q &= -\cos^3 \tau. \end{aligned} \tag{27}$$

Если в этих равенствах положим $\varepsilon = 0$, то они совпадут при $\tau = \mu$ с равенствами (18), а потому фокус, параметр и директриса параболы устойчивости рассматриваемого крыла определяются по его осевой дуге следующим образом: *директриса крыла прямо совпадает с директрисой указанной дуги; параметр меньше соответственного параметра сравниваемой дужки; следовательно, утолщенное крыло будет более устойчиво, так как метacentр будет ближе к его оси, чем в сравниваемом случае.*

Что касается опрокидывающего момента, то он в точности равен соответственной величине для крыла, опирающегося на осевую дугу, ибо по формулам (15), (16), (26) и (27) имеем момент относительно фокуса, равный опрокидывающему моменту:

$$M_1 = M_0 = -\frac{1}{2} K a^2 v_0^2 q = -4\pi \rho a^2 v_0^2 \sin^3 \tau \cos^3 \tau$$

— выражение, совпадающее с последним из помеченных номером (19).

Для нахождения изображающих дуг мы должны воспользоваться приведенными выше уравнениями (20). Разыщем при их помощи изображающую дугу под тем условием, чтобы ее центральный угол был равен 4τ , т. е. центральному углу осевой дужки.

Прежде всего имеем

$$aq = 2a \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon) = 2r \cos^3 \tau \sin^2 \tau;$$

отсюда находим радиус окружности, на которой лежит искомая изображающая дуга,

$$r = a \frac{\cos \tau - \varepsilon}{\cos \tau}.$$

Тогда прочие два уравнения из группы (20) дают для координат b , c центра указанной окружности значения

$$b = -a\varepsilon \cos^3 \tau = -r\varepsilon \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon),$$

$$c = a\varepsilon \sin \tau \cos \tau + \frac{a\varepsilon \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon} = r\varepsilon \sin \tau \left(\cos \tau + \frac{1}{\cos \tau} - \varepsilon \right).$$

Отношение между силами P , P' и вращающими моментами M , M' исследуемого крыла и отмеченной изображающей дуги

$$T = \left(\frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \right)^2.$$

Для отыскания главной дуги нужно составить число

$$n = \frac{2\pi\rho q}{K};$$

в нашем случае по формулам (26) и (27) имеем

$$n = \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2.$$

Число это удовлетворяет неравенству $n < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ ввиду незначительности угла τ , и потому мы получаем реальную главную дугу.

Написав уравнение (21) в первоначальной форме

$$F(\mu) = \sin \mu \cos^3 \mu - \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2 = 0$$

и подставляя значения $\mu = 0$ и $\mu = \tau$, легко убедимся, что на этом про-

межутке изменения аргумента μ функция $F(\mu)$ меняет знак, откуда явствует, что меньший из реальных корней удовлетворяет неравенству $\mu < \tau$.

Когда дуга довольно толстая, что соответствует более значительным величинам числа ε , то μ будет значительно менее τ : таким образом, чем толще крыло, тем более плоской оказывается его главная изображающая дуга и тем более устойчив снабженный такими крыльями аэроплан. Разумеется, здесь будет существовать предел, не учитываемый теорией, вследствие возможности неполного обтекания крыла и значительного развития вихревого хвоста.

Чтобы яснее выставить на вид преимущество толстых крыльев, рассмотрим числовой пример. Пусть

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{9}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \cos \tau.$$

Тогда центральный угол осевой дужки будет

$$4\tau = 25^\circ 22'.$$

Выигрыш в подъемной силе P крыла по сравнению его с осевой дужкой, подъемную силу которой обозначим через P' , определяется отношением

$$\frac{P}{P'} = \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, выигрыш достигает 50%.

Размеры крыла проще всего характеризуются углом $4v$, под которым оно видно из центра O его осевой дужки. Угол с осью CY_1 радиуса-вектора, направленного из центра инверсии $[C]$ к вершине $[A]$ инвертируемой параболы, как нетрудно усмотреть, равен $2v$; в самом деле, отрезок оси от вершины до бесконечно удаленной точки после инверсии обращается в часть осевой окружности, лежащую внутри крыла; так как эта окружность касается в начале координат оси CY_1 , то угол, образуемый ее касательной в конце интересующей нас дуги с хордой, будет измеряться половиной дуги и, следовательно, равен $2v$; но, по свойству инверсии, тот же угол с направлением указанного выше радиуса-вектора, направленного по хорде, должна образовать ось параболы ввиду того, что элемент этой оси, прилегающий к вершине, превращается в соответственный элемент дуги окружности. Из треугольника CAF имеем поэтому

$$\frac{\sin(2v - 2\tau)}{\sin 2v} = \frac{AF}{CF} = \frac{p}{2d} = \varepsilon^2;$$

отсюда

$$\operatorname{tg}(2v - \tau) = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} \tau.$$

В нашем числовом примере

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{9}, \quad \varepsilon = \frac{\cos \tau}{3};$$

поэтому

$$\operatorname{tg}(2\nu - \tau) = \frac{10 + 9 \operatorname{tg}^2 \tau}{8 + 9 \operatorname{tg}^2 \tau} \operatorname{tg} \tau = \frac{91}{9.73},$$

откуда

$$2\nu - \tau = 7^\circ 53' 9'',$$

что при

$$\tau = 6^\circ 20' 30''$$

дает

$$4\nu = 28^\circ 27' 18''.$$

Таким образом, угол раскрытия стягиваемого крыла превышает угол, стягиваемый его осевой дужкой, всего на $3^\circ 5' 18''$, т. е. немного более чем на 12%, а теоретический выигрыш в подъемной силе для толстого крыла, как выше было сказано, равен 50%.

Для вычисления размеров и положения главной изображающей дуги, иначе говоря, эквивалентной дуги, мы должны вычислить прежде всего ее центральный угол, четверть которого определяется уравнением (21)

$$t = n(1 + t^2)^2,$$

где

$$t = \operatorname{tg} \mu.$$

В нашем случае

$$n = \frac{\operatorname{tg} \tau}{(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\cos \tau}\right)^2 = \frac{81}{41^2} = \gamma,$$

$$\frac{t}{\gamma} = s = 1 + \eta s^2 + \frac{\eta^2}{4} s^4,$$

$$\eta = 2\gamma^2 = 0,0046547.$$

Пренебрегая ввиду малости степенями η выше второй, найдем

$$s = 1 + \eta + \frac{9}{4} \eta^2 = 1,00470,$$

$$t = \operatorname{tg} \mu = \gamma \cdot 1,00470, \quad \mu = 2^\circ 46' 15'', \quad 4\mu = 11^\circ 5'.$$

Так как равенство (21) может быть записано в виде

$$\sin \mu \cos^3 \mu = \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2,$$

а по третьему из уравнений (27) параметр параболы устойчивости, который для главной дуги выражается формулой

$$2r \sin^2 \mu \cos^3 \mu,$$

должен быть равен

$$aq = 2a \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon),$$

то

$$r \sin \mu = \frac{a \sin \tau \cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon},$$

и в нашем случае

$$\frac{r}{a} = \frac{3}{2\sqrt{82} \sin \mu} = \frac{3}{2\sqrt{82} \sin 2^\circ 46' 15''} = 3,427.$$

Центр главной дуги определяется формулами (20); что касается среднего радиуса главной дуги, то его направление образует с отрицательным направлением оси OX угол μ , так как директриса параболы устойчивости параллельна прямой, соединяющей задний конец главной дуги с ее серединой.

Итак, главная, или эквивалентная крылу, дуга оказывается гораздо более плоской, чем можно было ожидать; в этом, мне думается, лежит ключ теоретического истолкования высокого качества толстых дуг; отсюда же еще более выясняется их лучшая устойчивость по сравнению с тонкими крыльями.

§ 5. Крыло нового теоретического типа с закругленным задним концом. Инверсия параболы имеет ту невыгоду, что крыло, сечение которого имеет такое очертание, заканчивается чрезвычайно тонким хвостиком, которого нет никакой возможности практически осуществить. Поэтому ввиду обнаруживающейся теоретической выгоды таких крыльев естественно искать близких форм, свободных от указанной особенности. Вопрос аналитически разрешается путем преобразования выражения (22), связывающего комплексные переменные z и u . Соотношение (22), которому можно придать вид

$$z + a = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{1}{u + i\varepsilon - i e^{\tau i}} - \frac{1}{u + i\varepsilon + i e^{\tau i}} \right\},$$

слегка изменим, положив

$$z + a = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{(1+H)^2}{u + i\varepsilon - i e^{\tau i}} - \frac{(1-H)^2}{u + i\varepsilon + i e^{\tau i}} \right\}, \quad (28)$$

где H — некоторое комплексное число с малым модулем:

$$H = \gamma e^{\delta i}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{du} = -4a \sin 2\tau e^{-\tau i} \frac{(u + i\varepsilon + H i e^{\tau i}) (Hu + H i\varepsilon + i e^{\tau i})}{(u + i\varepsilon - i e^{\tau i})^2 (u + i\varepsilon + i e^{\tau i})^2}.$$

Если модуль и амплитуда числа H подобраны так, что

$$\varepsilon + \gamma \cos(\tau + \delta) > 0, \quad \varepsilon + \frac{\gamma \cos(\tau - \delta)}{\gamma_1} > 0,$$

то две единственные особые точки функции z лежат в нижней полуплоскости переменного u ; поэтому область течения, изображаемая на верхней полуплоскости, если, как и в ранее разобранным случае, мы предположим, что действительная ось u соответствует контуру крыла, никаких особых точек не имеет.

Что касается обтекаемого контура, то он представляет плавную алгебраическую кривую без точек возврата. Покажем, что число H можно определить таким образом, чтобы в точке $u = \infty$ профиль крыла обладал наибольшей кривизной; тогда будет естественно принять соответствующую точку контура за точку схода разветвляющейся на нем линии тока.

Формулу для радиуса кривизны R мы можем написать в виде

$$R = \left| \frac{\left(\frac{dz}{du} \frac{dz_1}{du} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dz}{du} \frac{d^2 z_1}{du^2} - \frac{dz_1}{du} \frac{d^2 z}{du^2}} \right|,$$

$$z = x + iy, \quad z_1 = x - iy.$$

Обозначая для краткости корни знаменателя выражения (28) через α и β и условившись сопряженные комплексные количества изображать теми же буквами, что и данные, с индексом 1 внизу, мы представим z_1 в виде

$$z_1 + a = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{(1 + H_1)^2}{u - \alpha_1} - \frac{(1 - H_1)^2}{u - \beta_1} \right\}.$$

Совершив затем дифференцирование, мы в результате простых, хотя и довольно длинных вычислений приходим к следующему выражению для R при больших u :

$$R = \left| \frac{A}{B} \right|,$$

где

$$A = \gamma a \sin 2\tau \left\{ \gamma - \frac{3}{u} [\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)] + \dots \right\},$$

$$B = \cos \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) + \sin \tau \sin \delta (1 - \gamma^2) - 2\epsilon \gamma - \\ - \frac{6}{u} [\gamma \sin 2\tau - \epsilon \sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) + \epsilon \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)] + \dots;$$

многоточия соответствуют членам порядка $1/u^2$, $1/u^3$, ...

Если мы подберем δ так, чтобы в разложении R в области $u = \infty$ отсутствовал член порядка $1/u$, то в соседних с ней точках кривизна будет изменяться в одном и том же направлении, т. е. возрастать или убывать по обе стороны от этого пункта. А так как при $\gamma = 0$ наш контур обращается в инверсию параболы и при $u = \infty$ мы найдем точку заострения, то ясно, что при достаточно малых γ здесь будет именно максимум кривизны. Условие отсутствия $1/u$ в разложении R сводится к пропорциональности двух первых коэффициентов в числителе и знаменателе приведенной

выше дроби. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \cos \tau \cos \delta \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) + \sin \tau \sin \delta \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) - 2\varepsilon = \\ = 2 \frac{\gamma \sin 2\tau - \varepsilon [\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)]}{\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)}, \end{aligned}$$

отсюда по упрощении находим

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta \sin 2\tau \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2 - \sin^2 \delta \sin 2\tau \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right)^2 - \\ - 2 \sin \delta \cos \delta \left(\frac{1}{\gamma^2} - \gamma^2 \right) \cos 2\tau = 4 \sin 2\tau. \end{aligned}$$

Разрешая это уравнение, имеем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \operatorname{tg} \tau. \quad (29)$$

Радиус кривизны в заднем конце крыла приобретает значение

$$R = \frac{\gamma^2 a \sin 2\tau}{V 1 + \gamma^4 + 2\gamma^2 \cos 2\tau - 2\gamma\varepsilon},$$

стремящееся к нулю вместе с γ [2].

Составляя, далее, разложения dx/du и dy/du в той же точке, находим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -4a\gamma \sin 2\tau \cos(\tau - \delta) \frac{1}{u^2} + \dots, \\ \frac{dy}{du} &= +4a\gamma \sin 2\tau \sin(\tau - \delta) \frac{1}{u^2} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда усматриваем, что $\tau - \delta$ есть угол, образуемый нормалью к профилю крыла в интересующей нас точке с положительным направлением оси OY ; нормаль отклонена от оси ординат в направлении к оси OX ; на основании формулы (29)

$$\operatorname{tg}(\tau - \delta) = \frac{\gamma^2 \sin 2\tau}{1 + \gamma^2 \cos 2\tau}.$$

Разлагая z в области полюса, мы, следуя приему, развитому подробно в предшествующем параграфе для инверсии параболы, легко получим все необходимые коэффициенты, по которым затем отыскиваем подъемную силу, вращающий момент и параболу устойчивости. Следует заметить, однако, что при сделанном нами предположении о точке схода формулы оказываются довольно сложными и не поддаются ясному геометрическому истолкованию. По этой причине мы оставим в стороне требование, чтобы точка $u = \infty$, где по-прежнему будем предполагать схождение струи с крыла, соответствовала наибольшей кривизне профиля, и все последующие вычисления проведем при упрощенном предположении, считая H

в формуле (28) вещественным положительным числом, так что

$$\delta = 0, \quad \gamma = H.$$

Формулу для радиуса кривизны профиля вблизи точки схода можно в таком случае написать в виде

$$R = \frac{H^2 a \sin 2\tau}{(1 + H^2) \cos \tau - 2H\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{3 \sin \tau \cos \tau (1 - H^2)}{Hu [(1 + H^2) \cos \tau - 2H\varepsilon]} + \dots \right\}. \quad (30)$$

При небольших H контур крыла будет близок по расположению относительно координатных осей к разобранной выше инверсии параболы; его выпуклая сторона будет отображаться на отрицательной, а вогнутая — на положительной части действительной оси полуплоскости u . Найденная для R формула показывает, что вблизи точки схода, когда u весьма велико, меньшим искривлением обладает та прилегающая к означенной точке часть контура, которая лежит со стороны выпуклости крыла, ибо R будет больше при отрицательных значениях переменного u .

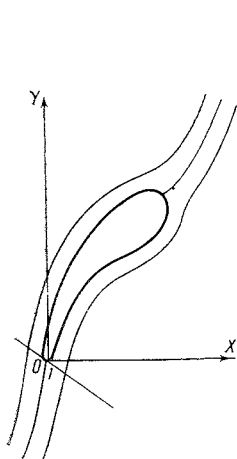


Рис. 2

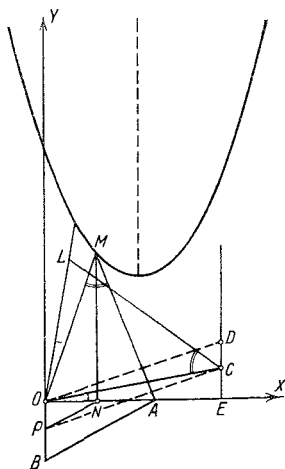


Рис. 3

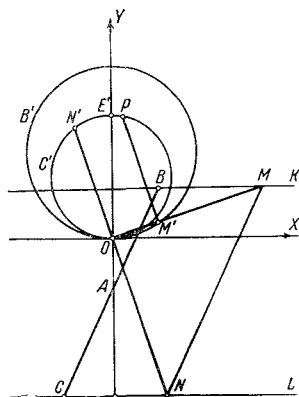


Рис. 4

Поэтому вычисленная при упрощающем предположении подъемная сила будет менее теоретической величины силы, которая получится, если мы вторую критическую точку, точку схода, переместим в пункт наибольшей кривизны; в самом деле, эта точка, очевидно, будет лежать в некотором месте контура, соответствующем большой положительной величине параметра u ; на рис. 2 мы отмечаем ее цифрой 1; O обозначает точку схода, соответствующую сделанному нами предположению. Легко непосредственно усмотреть, что мы переместим точку схода из O в (1) путем внесения

добавочного течения, циркулирующего в том же направлении, как и основной поток, а добавочная циркуляция повлечет прирост подъемной силы.

Обратимся теперь к подробному обследованию формы профиля. В заднем конце крыла мы имеем по формуле (30)

$$R = \frac{H^2 a \sin 2\tau}{(1 + H^2) \cos \tau - 2H\varepsilon}.$$

Нормаль в этой точке образует с осью OY угол τ , ибо в ее соседстве мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= -4aH \sin 2\tau \cos \tau \frac{1}{u^2} + \frac{L}{u^3}, \\ \frac{dy}{du} &= +4aH \sin 2\tau \sin \tau \frac{1}{u^2} + \frac{L'}{u^3}\end{aligned}$$

с конечными L и L' . Чтобы поставить исследуемый контур в связь с некоторой параболой, представим выражение (28) в виде

$$z + a = 2ai \sin 2\tau \frac{1 + H^2 - 2iHe^{-\tau i}(u + i\varepsilon)}{(u + i\varepsilon)^2 + e^{2\tau i}}. \quad (31)$$

Полагая, как в предыдущем параграфе,

$$(u + i\varepsilon)^2 + e^{2\tau i} = \frac{ix_1 + y_1}{d},$$

мы действительную ось полуплоскости u приводим в соответствие с точками параболы; и тогда координаты изучаемого контура будут связаны с координатами соответственных точек на параболе, выражаемой уравнением (23), следующим соотношением:

$$z + a = x + iy + a = 2a \sin 2\tau e^{-\tau i} \frac{p' + ip'' - \frac{iHx_1}{\varepsilon}}{x_1 - iy_1}, \quad (32)$$

где для сокращения введены обозначения

$$\begin{aligned}p' &= \left(1 + H^2 + 2H \frac{\varepsilon}{\cos \tau}\right) d \cos \tau, \\ p'' &= \left(1 + H^2 + 2H \frac{\cos \tau}{\varepsilon}\right) d \sin \tau.\end{aligned}$$

Соотношение (32) позволяет по заданной параболе построить контур крыла исследуемого типа. Для этого поступаем так: в плоскости комплексного переменного z отметим точку с координатами $(-a, 0)$, которую примем за новое начало координат, оставляя направление осей без изменения (рис. 3). На новых осях строим параболу, выраженную уравнением (22). Далее, отмечаем точку D , аффикс количества $p' + ip''$; через нее проводим прямую DE параллельно OY . На оси OX откладываем от начала длину $2a \sin 2\tau$, а на отрицательном направлении оси OY —

длину $\frac{2}{\varepsilon} aH \sin 2\tau$ и соединяем концы этих отрезков прямой AB . Выбрав на параболе произвольную точку M , по ней строим точку контура крыла следующим образом: через основание ординаты MN избранной точки проводим прямую NP параллельно AB до встречи с осью OY , а через P — прямую PC параллельно OD до встречи с прямой DE в точке C . Соединив затем точки M и A и проведя прямую OL так, чтобы угол MOL был равен углу XOC , строим угол OCL , равный углу OMA ; повернув прямую OL на угол τ по направлению движения стрелки часов, переведем точку L на надлежащее место в точку Q искомого контура крыла.

При $H = 0$, как и должно быть, процесс построения обращается в простую инверсию. Приведенное построение, которое можно охарактеризовать как осложненную известным образом инверсию параболы, представляется не вполне ясным и несколько громоздким. Поэтому даем еще иной, на наш взгляд, более простой способ вычерчивания искомого контура по точкам. Для сего, обратившись к формуле (28), напомним ее в виде

$$\begin{aligned} z + a &= (z_1 - z_2)e^{\tau i}, \\ z_1 = x_1 + iy_1 &= D_1 \frac{\cos \tau - \varepsilon}{u + \sin \tau - i(\cos \tau - \varepsilon)}, \quad D_1 = \frac{a \sin 2\tau (1 + H)^2}{\cos \tau - \varepsilon}, \\ z_2 = x_2 + iy_2 &= D_2 \frac{\cos \tau + \varepsilon}{u - \sin \tau + i(\cos \tau + \varepsilon)}, \quad D_2 = \frac{a \sin 2\tau (1 - H)^2}{\cos \tau + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

Построим в плоскости z две прямые, параллельные оси OX , следующим образом (рис. 4): через точку A с координатами $(0, -\varepsilon)$ проведем под углом τ к оси OY отрезок CB так, что

$$AB = AC = 1;$$

через точки B и C проводим упомянутые параллели BK и CL действительной оси. Их уравнения будут

$$y' = \cos \tau - \varepsilon, \quad y'' = -\cos \tau - \varepsilon,$$

и мы можем положить

$$\begin{aligned} x' - iy' &= u + \sin \tau - i(\cos \tau - \varepsilon), \\ x'' - iy'' &= u - \sin \tau + i(\cos \tau + \varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда первое из соотношений (33) дает инверсию прямой BK в прикасающуюся к оси OX окружность $OB'D'$ с диаметром D_1 , а второе — определяет окружность $OC'E'$ с диаметром D_2 , результат инверсии второй прямой CL . Отсюда вытекает интересное нас построение.

Строим прикасающиеся к оси OX окружности с диаметрами D_1 и D_2 и центрами на положительном направлении оси OY . Затем проводим указанным выше путем отрезок BC и две прямые BK и CL . Точке M первой прямой, определяемой параметром $u = BM$, на второй соответ-

ствуется точка N с тем же значением u , которое изображается отрезком CN . Чтобы найти точку контура, соответствующую M , проводим прямую MN параллельно BC и соединяем точки M и N с началом координат; отметим, далее, точки M' и N' , в которых прямые OM и ON пересекают окружности. Координаты точки M' тогда будут x_1, y_1 , а координаты точки N' будут $-x_2, -y_2$. Следовательно, если мы через точку M' проведем отрезок $M'P$, равный и параллельный отрезку ON' , то точка P будет точкой искомого контура. Геометрическое место точек P представит нам в плоскости z контур крыла, если за начало координат мы примем его задний конец и направим ось OY по нормали в этой точке к контуру. Ч

Заметим, что если бы диаметры окружностей, при помощи которых мы строим профиль, были обратно пропорциональны расстояниям точки O от соответственных параллелей KM и CN , то место P было бы инверсией параболы, а в том частном случае, когда $D_1 = D_2$, оно оказалось бы дугой окружности.

Примечание. В указанном построении есть одно неудобство, именно: для больших значений параметра u мы можем выйти за пределы чертежа. Это неудобство устраняется следующим образом. Пусть OQ есть направление, идущее из точки O в далекую точку прямой KM . Отметим точку пересечения прямой OQ с произвольно проведенной параллельно CB прямой GH . Эту точку соединяем с точкой B , в которой прямая CB , параллельная прямой GH , пересекает прямую KM , и продолжаем эту прямую до встречи с общей касательной OD окружностей. Если последнюю точку мы соединим прямой линией с точкой C , то найдем в пересечении с прямой GH точку искомого направления OR второго радиуса-вектора, необходимого нам для построения профиля. Ввиду простоты опускаю доказательство правильности этого приема.

Что касается функции течения $w = \varphi + i\psi$, то она в исследуемом теперь случае определяется той же формулой (5) § 1. В отличие от разобранных ранее примеров, когда поток сбежал с крыла, имея в заднем его конце конечную скорость, на этот раз мы встретим здесь вторую критическую точку с нулевой скоростью.

Чтобы определить подъемную силу крыла и его вращающий момент, пишем разложение функции (28) в области полюса. Обозначая, как в предшествующем параграфе, $u + iz$ через u' и $ie^{i\tau}$ через α' , получим аналогично формуле (24) этого параграфа

$$z + \alpha' = a'' \sin 2\tau e^{-i\tau} \left\{ \frac{1}{u - \alpha'} - \frac{G}{2\alpha'} + G \frac{u' - \alpha'}{4x'^2} + \dots \right\},$$

где

$$a'' = a(1 + H)^2, \quad G = \left(\frac{1 - H}{1 + H} \right)^2.$$

Выбрав

$$\alpha' = a(1 - H)^2 = Ga'',$$

будем иметь для коэффициентов k, l, k_1, l_1 те же выражения (25) как

в предшествующем параграфе, но только с множителем G . Таким образом,

$$l = -G \frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau}, \quad k = -G \frac{\sin^2 \tau}{2 \cos \tau},$$

$$l_1 = -G \frac{\cos 2\tau}{4}, \quad k_1 = G \frac{\sin 2\tau}{4},$$

причем по-прежнему

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha_1}{i} = 2 \cos \tau - 2\varepsilon, \quad \mu = -\tau, \quad \lambda = a'' \sin 2\tau.$$

В дальнейшем мы можем опустить значок " при букве a , не упуская, однако, из виду, что ей теперь придается новое значение.

Формулы (6) и (9) § 1 определяют нам подъемную силу

$$P = 4\pi\rho av_0^2 \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \sin \sigma,$$

имеющую буквально то же выражение, как и в случае инверсии параболы: по формуле (8) мы находим критическое направление потока; оно образует угол τ с осью OY и лежит в положительном координатном угле; как было выяснено выше, это будет нормаль крыла в его заднем конце, где его покидает разветвляющаяся линия тока.

Направив ось OY навстречу критическому направлению потока, мы по формулам (12) определяем координаты фокуса параболы устойчивости ag , ah , параметр ее aq и расстояние директрисы от начала $aq - ag$. Получим

$$ag = -aG \left(\cos^3 \tau \cos 2\tau + \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2} \right),$$

$$ah = aG \left(\cos^3 \tau \sin 2\tau - \frac{\varepsilon \sin 2\tau \cos 2\tau}{2} + \frac{1}{G} \frac{\varepsilon \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \right),$$

$$aq = 2aG \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon) = 2aG \sin^2 \tau \cos^3 \tau - Ga\varepsilon \frac{\sin^2 2\tau}{2},$$

$$aq - ag = aG \cos^3 \tau.$$

Директриса отстоит от заднего конца крыла на расстояние

$$\Delta = a' - aq + ag = aG (1 - \cos^3 \tau).$$

Сравнивая приведенные формулы с соответственными им для инверсии параболы, убеждаемся, что при одном и том же определяющем линейные размеры коэффициенте крылья будут давать одну и ту же подъемную силу. Но парабола устойчивости в новом крыле будет острее и ближе приближается к крылу, а потому последнее крыло отличается большей устойчивостью.

Выгода этого крыла выступает еще яснее, если мы заметим, что при одном и том же a его ширина оказывается меньшей, чем для сравниваемого с ним и имеющего очертание инверсии параболы. В самом деле,

легко видеть, что радиус-вектор OP точки контура будет всегда менее суммы диаметров:

$$OP < D_1 + D_2 = a \sin 2\tau \left(\frac{1}{\cos \tau - \varepsilon} + \frac{G}{\cos \tau + \varepsilon} \right);$$

при этом радиусы-векторы точек, соответствующих значениям u , близким к нулю, могут быть несколько более того радиуса OP_1 , который наклонен к оси OY под углом τ и, соответствуя значению $u = -\varepsilon \operatorname{tg} \tau$, имеет величину

$$OP_1 = (D_1 + D_2) \cos \tau,$$

весьма близкую к указанному пределу $D_1 + D_2$ ввиду малости угла τ .

Те же замечания справедливы для инверсии параболы, когда $G = 1$. У профиля этого крыла также будут существовать радиусы-векторы, большие соответственного [радиуса OP'_1 , определяемого равенством]

$$OP'_1 = (D'_1 + D'_2) \cos \tau = a \sin 2\tau \left(\frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} + \frac{\cos \tau}{\cos \tau + \varepsilon} \right).$$

Но при достаточно малом

$$G = \left(\frac{1-H}{1+H} \right)^2$$

и небольшом τ будет иметь место неравенство

$$OP'_1 > D_1 + D_2.$$

Положим, например, как в § 4,

$$\varepsilon = \frac{\cos \tau}{3},$$

и пусть

$$H = \frac{1}{9}.$$

Тогда

$$OP'_1 = \frac{9}{4} a \sin 2\tau, \quad D_1 + D_2 = \frac{99}{50} a \cos \tau \sin 2\tau,$$

$$\frac{OP'_1}{D_1 + D_2} = \frac{25}{22} \cos \tau > \frac{25}{22} \left(1 - \frac{1}{162} \right),$$

если $\operatorname{tg} \tau = 1/9$, как в числовом примере к § 4.

§ 6. Крыло, опиравшееся на инверсию эллипса. Рассмотренные в двух предшествующих параграфах крылья принадлежат к довольно широкому классу, который характеризуется функцией

$$z = d \frac{Lu^2 + L'u + L''}{Hu^2 + H'u + H''},$$

где d — некоторая линейная величина, а прочие коэффициенты — комп-

лексные числа, выбор которых стеснен лишь некоторыми неравенствами. Кривая, соответствующая действительной оси в плоскости вспомогательного комплексного переменного u и дающая, как и прежде, профиль крыла, будет сомкнутой, если H имеет модуль, отличный от нуля. В области течения, отображающейся на верхней полуплоскости u , будет существовать лишь один простой полюс, если лишь один из корней знаменателя обладает положительным коэффициентом при мнимой единице. Наконец, оба корня производной функции z должны располагаться в нижней полуплоскости u . Вот все те условия, из которых вытекают упомянутые выше неравенства.

Заметим, что путем надлежащего выбора осей в плоскости z мы можем уничтожить коэффициент при квадрате в числителе формулы (33) и привести к единице коэффициенты H и L' . А выбором начала на действительной оси переменного u и подбором масштаба достигаем того, чтобы коэффициент H' был равен мнимой единице. Таким образом, в формуле (33) останется кроме линейного множителя, характеризующего размеры кривой, четыре числа, определяющих ее тип. Принимая во внимание приведенные замечания, мы всегда можем вместо формулы (33) изобразить функцию z формулой

$$z = d \left(\frac{1}{u - \alpha} - \frac{G^2}{u - \alpha'} \right), \quad (34)$$

где

$$\alpha = b + ci, \quad \alpha' = b' - c'i, \quad G = b'' + c''i.$$

Коэффициенты c и c' должны быть положительными числами, что же касается G , то, так как корни $\frac{dz}{du}$ суть, очевидно,

$$b + ci + \frac{b' - b - i(c + c')}{1 - b'' - c''i},$$

$$b + ci + \frac{b' - b - i(c + c')}{1 + b'' + c''i},$$

мы должны потребовать, чтобы эти два выражения имели отрицательные коэффициенты при мнимой единице; а это налагает условия

$$c - \frac{(c + c')(1 - b'') + (b - b')c''}{(1 - b'')^2 + c''^2} < 0,$$

$$c - \frac{(c + c')(1 + b'') - (b - b')c''}{(1 + b'')^2 + c''^2} < 0.$$

При этом мы можем на основании высказанных выше замечаний положить $b = 0$, $c = 1$.

Найденные неравенства не заключают в себе противоречия, ибо их можно выполнить при произвольно заданных прочих коэффициентах, если примем c' достаточно большим. Исключение представляется при $b'' = \pm 1$; но в этом случае при малых c'' , имеющих надлежащий знак,

опять-таки можно удовлетворить оба неравенства, придавая достаточную величину тому же коэффициенту c' .

Кривые рассматриваемого типа могут быть построены при помощи циркуля и линейки путем, вполне аналогичным указанному в § 5. Так же, как и там, мы будем иметь две параллельные прямые, на которых от надлежащих точек будут откладываться равные отрезки, характеризующие значение переменного параметра u , и две прикасающиеся окружности, инверсии указанных прямых; эти окружности определяют векторы, сложение которых позволит отметить точки искомого профиля. Разница будет лишь в том, что прежде сложения один из векторов необходимо поворачивать в должном направлении на угол, равный двойному аргументу комплексного числа G . Вместо этого, очевидно, можно повернуть соответственную прямую и полученную при помощи ее инверсии окружность на тот же угол и затем уже складывать получаемые векторы без изменения их направлений.

Класс кривых, определяемых формулой (34), охватывает, между прочим, инверсии кривых второго порядка, а из этих последних — все эллипсы. Что касается формулы (34), то она включает также параболы и гиперболы, если мы отбросим условие конечности модуля коэффициента H .

В дальнейшем остановимся исключительно на крыле, очертание которого определяется инверсией эллипса. Прежде чем перейти к отысканию соответствующей функции z , ввиду интереса, представляемого таким профилем, дадим его характеристику, исходя из чисто геометрических соображений, опирающихся на свойства эллипса. Чтобы получить крыловидную форму путем инверсии эллипса, мы, очевидно, должны, во-первых, брать эллипсы с большим эксцентриситетом и располагать центр инверсии вблизи большой оси вне эллипса. При этом будет получаться изогнутое крыло с осевой дужкой в виде дуги круга, которая служит инверсией фокального отрезка. Осевая дужка при ее продолжении проходит через центр инверсии, имея здесь касательную, параллельную большой оси эллипса. Если мы соединим середину осевой дужки с центром инверсии, то получим прямую, которая разделит пополам угол между касательными, проведенными из центра инверсии к исследуемому контуру; это следует из известного свойства эллипса, по которому биссектор угла его касательных, проведенных из какой-либо точки, делит в то же время пополам угол, имеющий в этой точке вершину и опирающийся на фокальный отрезок.

Еще более ясное представление об исследуемом профиле мы получим, если обратимся к его двойным касательным, как я назову для краткости касательные, имеющие две точки прикосновения к контуру. Пара таких касательных будет существовать в том случае, если центр инверсии расположен внутри общей площади двух кругов кривизны эллипса в вершинах его малой оси: ибо в этом случае можно провести две реальные окружности двойного прикосновения, которые проходят через центр

инверсии и которые после инверсии и обратятся в двойные касательные. Любопытно отметить, что равноделящая угла между этими прямыми параллельна упоминавшемуся выше биссектору угла касательных из центра инверсии. Докажем это. Уравнению охватывающей окружности двойного прикосновения к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

очевидно, можно придать вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (y - \lambda)^2 = 0;$$

параметр λ определится из условия прохождения этой окружности через центр инверсии и, следовательно, представляется каждым из корней квадратного уравнения

$$m^2 + n^2 - a^2 + 2 \frac{c^2}{b^2} n\lambda - \frac{c^2}{b^2} \lambda^2 = 0,$$

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

если через m , n мы обозначим координаты центра инверсии. Углы касательных к окружностям в точке (m, n) с осью OX определяются формулой

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{m}{n + \frac{c^2}{b^2} \lambda},$$

в которую важно вставить поочередно два корня λ_1 , λ_2 приведенного уравнения. Угол равноделящей

$$\delta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2},$$

а следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\delta = - \frac{m \left[2n + \frac{c^2}{b^2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right]}{n^2 + \frac{c^4}{b^4} \lambda_1 \lambda_2 + n \frac{c^2}{b^2} (\lambda_1 + \lambda_2) - m^2},$$

откуда по замене λ имеем

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2mn}{m^2 - n^2 - c^2}. \quad (35)$$

Та же формула определяет биссектор угла между векторами, направленными из центра инверсии к фокусам эллипса.

Между точками прикосновения двойных касательных на каждой стороне профиля располагаются по две точки перегиба, соответствующие тем точкам на эллипсе, круги кривизны для которых проходят через центр инверсии. Если этот центр окажется на круге кривизны в одной из вершин малой оси, то две точки касания соответственной двойной касатель-

ной сливаются между собой, и в таком случае эта прямая будет иметь с профилем прикосновение третьего порядка.

Если, далее, центр инверсии будет представлять внутреннюю точку лишь для одного из кругов кривизны в вершинах малой оси, то у инверсии эллипса останется лишь одна двойная касательная. Наконец, таких касательных вовсе не будет, и профиль окажется всюду выпуклым, если инверсия совершается из центра, лежащего вне обоих упомянутых кругов. Заметим еще, что двойные касательные пересекаются на прямой, проведенной через центр инверсии параллельно большой оси эллипса.

Чтобы охарактеризовать до некоторой степени размеры профиля, определим диаметр D его осевой дужки, стягиваемый ею угол $2L$ и угол $2N$, под которым крыло видно из центра упомянутой дужки. Что касается диаметра, то он, очевидно, будет

$$D = \pm \frac{\partial^2}{n},$$

если ∂ — коэффициент инверсии, знак надлежит подобрать так, чтобы D было положительно. Далее

$$N = \lambda' - \lambda'', \quad L = \mu' - \mu'',$$

если буквами λ и μ соответственно обозначим углы, образуемые с осью OX векторами, идущими из центра инверсии к вершинам большой оси и фокусам эллипса. Из этого соображения легко получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} N &= \pm \frac{2na}{m^2 + n^2 - a^2}, \\ \operatorname{tg} L &= \pm \frac{2nc}{m^2 + n^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Хорда осевой дужки, очевидно, равна $D \sin L$, а дуга, в которую превращается большая ось, стягивается хордой длины $D \sin N$. Наконец, угол 2δ , определяемый формулой (35), представляет вместе с тем угол наклона к оси эллипса хорды осевой дуги его инверсии.

Обратимся к изысканию функции z , относящейся к поставленной задаче. Чтобы изобразить на верхней полуплоскости u область s , лежащую вне данного эллипса, достаточно положить

$$s = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{u+i}{u-i} + k \frac{u-i}{u+i} \right), \quad (37)$$

где k — некоторая вещественная дробь. Тогда действительная ось области u соответствует контуру эллипса с полуосями

$$a = c \frac{1+k^2}{2k}, \quad b = c \frac{1-k^2}{2k};$$

вершинам большой оси соответствуют значения

$$u = 0, \quad u = \infty,$$

концам малой оси —

$$u = \pm 1,$$

фокусы же эллипса отображаются в точках]

$$u = -i \frac{1+k}{1-k}, \quad u = -i \frac{1-k}{1+k}$$

нижней полуплоскости u .

Определим z формулой

$$z - N' = \frac{N''cd}{s - s_0},$$

в которой N' есть комплексная величина с линейным модулем, N'' — комплексное число, d — вещественное количество линейного размера, а s_0 — результат замены в выражении (37) аргумента u его частным значением u_0 с положительным коэффициентом у мнимой единицы.

Контур, полученный нами, очевидно, принадлежит к классу, определяемому формулой (33). Подставив вместо s и s_0 их значения, мы придадим функции z форму

$$\frac{z - N'}{d} = \frac{iN''E(1 - u_0u_1)(1 + u^2)}{2(u - u_0)(u - u_1)}, \quad (38)$$

где E есть эксцентриситет преобразуемого эллипса, а корни знаменателя u_0 и u_1 связаны соотношением

$$\left(1 - i \frac{b}{a} u_0\right) \left(1 - i \frac{b}{a} u_1\right) = E^2, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - E^2}. \quad (39)$$

Положив в формуле (38)

$$N'' = \frac{2}{E(1 - u_0u_1)}, \quad N' = -id,$$

мы преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$\frac{z}{d} = i \frac{(1 - u_0u_1) \left(1 - i \frac{b}{a} u\right)}{(u - u_0)(u - u_1)} = i \frac{1 - u_0u_1}{u_0 - u_1} \left\{ \frac{1 - i \frac{b}{a} u_0}{u - u_0} - \frac{1 - i \frac{b}{a} u_1}{u - u_1} \right\}. \quad (40)$$

Так как

$$\begin{aligned} z &= 0 & \text{при } u &= \infty, \\ z &= -id & \text{при } u &= i, \end{aligned}$$

то началом координат в плоскости z является точка, служащая инверсией дальней вершины эллипса, а ось Y проходит через центр инверсии, который лежит на расстоянии d от начала.

Соответственные точки эллипса и его инверсии определяются формулами (37) и (40) по замене u одним и тем же реальным значением. Когда в этих формулах u придается какое-либо иное значение, чисто мнимое

или комплексное, то мы имеем соответствующие друг другу точки областей s и z . В частности, чисто мнимые значения u в области s определяют действительную ось, по которой направлена большая ось эллипса и которая в результате инверсии обращается в окружность, содержащую осевую дужку профиля крыла. Значения

$$u = 0, \quad u = -i \frac{1+k}{1-k}, \quad u = -i \frac{1-k}{1+k}$$

по подстановке их в равенство (40) определяют координаты точки, в которую инвертируется ближайшая к центру инверсии вершина эллипса и соответствующие его фокусам концы осевой дужки в области z .

Заметим для ясности, что мнимая ось плоскости u отображает лишь лежащую вне фокального отрезка часть действительной оси области s и соответствующую ей часть упомянутой выше окружности. Что касается самого фокального отрезка и осевой дужки, то они в области u изображаются окружностью C , диаметром которой служит прямая, соединяющая аффиксы фокусов. Плоскости переменных s и z целиком однозначно изображаются в плоскости u , с одной стороны, на части этой плоскости, лежащей вне круга C , а другой — на самой его площади; причем всякой точке областей z и s , таким образом, соответствуют по две точки плоскости u .

Чтобы удобнее вести дальнейшие вычисления, введем вместо u новое вспомогательное переменное t , а вместо эксцентриситета — число H , положив

$$u = i \operatorname{th} t, \quad \sqrt{1-E^2} = \operatorname{th} H, \quad E = \frac{1}{\operatorname{ch} H};$$

тогда

$$u_0 = i \operatorname{th} t_0, \quad u_1 = i \operatorname{th} t_1;$$

соотношение (39) дает

$$t_1 + t_0 = -H, \quad t_1 = -H - t_0,$$

а формула (40) приводится к виду

$$\frac{z}{d} = -i \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} (t+H)}{\operatorname{sh} (t-t_0) \operatorname{sh} (t+t_0+H)},$$

или

$$\frac{z}{d} = \frac{1}{\operatorname{sh} (2t_0+H)} \left\{ \frac{\operatorname{ch} (t_0+H)}{\operatorname{ch} t_0 (u-u_0)} - \frac{\operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch} (t_0+H) (u-u_1)} \right\}. \quad (44)$$

Последнюю формулу для выражения функции z мы сохранили ввиду того, что по ней очень просто вычисляются необходимые для дальнейших выкладок коэффициенты. В самом деле, сравнив это выражение с формулой (1) § 1 и имея в виду, что линейная величина a заменена в формуле

(41) через d и $\alpha = u_0$, мы находим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\operatorname{ch}(t_0 + H)}{\operatorname{ch} t_0 \operatorname{sh}(2t_0 + H)}, \\ l + ik &= \frac{f(0)}{A} = i \frac{\operatorname{ch}^3 t_0}{\operatorname{ch}(t_0 + H) \operatorname{sh}(2t_0 + H)}, \\ l_1 + ik_1 &= \frac{f'(0)}{A} = - \frac{\operatorname{ch}^4 t_0}{\operatorname{sh}^2(2t_0 + H)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Значение комплексной величины t_0 определится, если мы заменим в формуле (37) для комплексного переменного s переменное u через t и примем во внимание, что частное значение $u = u_0$ с соответствующим ему $t = t_0$ определяет в плоскости эллипса центр инверсии. Таким образом, получаем

$$s = -c \operatorname{ch}(2t + H), \quad s_0 = m + in = -c \operatorname{ch}(2t_0 + H).$$

Фокусам эллипса, для которых производная s обращается в нуль, соответствуют значения параметра t

$$t' = -\frac{H}{2}, \quad t'' = \frac{\pi i}{2} - \frac{H}{2}$$

и величины z

$$z' = id \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{H}{2}}{\operatorname{sh}^2 \left(t_0 + \frac{H}{2} \right)}, \quad z'' = id \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{H}{2}}{\operatorname{ch}^2 \left(t_0 + \frac{H}{2} \right)},$$

откуда

$$\frac{z'' - z'}{d} = 4i \frac{\operatorname{ch} t_0 \operatorname{ch}(t_0 + H)}{\operatorname{sh}^2(2t_0 + H)}. \quad (43)$$

Вершине эллипса, находящейся в точке $s = -a$, где $u = t = 0$, соответствует в области течения точка профиля крыла

$$z_1 = id \frac{\operatorname{ch} H}{\operatorname{sh} t_0 \operatorname{sh}(t_0 + H)}. \quad (44)$$

Для определения подъемной силы P воспользуемся нашими общими формулами (6), (7), (8) и (9) § 1. Фигурирующая в них величина β будет иметь в нашем случае выражение

$$\beta = \frac{u_0 - u'_0}{i} = \frac{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0)}{\operatorname{ch} t_0 \operatorname{ch} t'_0},$$

если мы на этот раз условимся через u'_0 и t'_0 обозначать комплексные числа, сопряженные u_0 и t_0 . Коэффициент K подъемной силы на основании указанных формул определится равенством

$$aK = \frac{4\pi\rho d}{\beta} |A| = 4\pi\rho d \left| \frac{\operatorname{ch}(t_0 + H) \operatorname{ch} t'_0}{\operatorname{sh}(2t_0 + H) \operatorname{sh}(t_0 + t'_0)} \right|.$$

Так как формула (43), связывающая линейную величину d с хордой S осевой дужки, дает

$$d = \frac{S}{4} \left| \frac{\operatorname{sh}^2(2t_0 + H)}{\operatorname{ch} t_0 \operatorname{ch}(t_0 + H)} \right|,$$

причем

$$\left| \frac{\operatorname{ch} t'_0}{\operatorname{ch} t_0} \right| = 1,$$

то

$$aK = \pi \rho S \left| \frac{\operatorname{sh}(2t_0 + H)}{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0)} \right|. \quad (45)$$

Так как область u есть верхняя полуплоскость, то из формулы

$$u = i \operatorname{th} t$$

легко заключаем, что областью t будет бесконечная полулента с положительными ординатами, ограниченная действительной осью, ее параллелью на расстоянии π и осью ординат, причем полулента простирается в сторону положительных абсцисс. Ввиду того, что центр инверсии должен лежать вблизи вершины, которой соответствуют значения $u = 0$, $t = 0$, действительная часть и коэффициент при мнимой единице у числа t_0 будут небольшими положительными числами. По ним приведенной выше формулой

$$m + in = -c \operatorname{ch}(2t_0 + H)$$

определяются координаты центра инверсии; обе они отрицательны. Приняв все это во внимание, последовательно получаем

$$|\operatorname{sh}(2t_0 + H)| = \left| \frac{\sqrt{(m + in)^2 - c^2}}{c} \right| = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c},$$

если через r_1 и r_2 обозначим радиусы-векторы, направленные из центра инверсии соответственно к дальнему и ближнему фокусам; далее

$$-\frac{m + in}{c} = \operatorname{ch}(2t_0 + H) =$$

$$= \operatorname{ch}(t_0 + t'_0 + H) \operatorname{ch}(t_0 - t'_0) + \operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H) \operatorname{sh}(t_0 - t'_0);$$

$$\frac{m^2 + n^2 - c^2}{c^2} = |\operatorname{ch}(2t_0 + H)|^2 - 1 = \operatorname{sh}^2(t_0 + t'_0 + H) + \operatorname{sh}^2(t_0 - t'_0);$$

$$\sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - c^2)^2 + 4n^2 c^2}{c^4}} = \frac{r_1 r_2}{c^2} = \operatorname{sh}^2(t_0 + t'_0 + H) - \operatorname{sh}^2(t_0 - t'_0);$$

$$-\frac{2in}{c} = \operatorname{ch}(2t_0 + H) - \operatorname{ch}(2t'_0 + H) = 2\operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H) \operatorname{sh}(t_0 - t'_0);$$

а затем, введя при помощи соотношения (36) угол L , под которым

Фокусное расстояние и осевая дужка видны из центра инверсии, имеем

$$\operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \frac{L}{2}, \quad (46)$$

после чего формула (45) обращается в

$$aK = \pi r \frac{S}{\cos \frac{L}{2}} Q = 4\pi r \sin \frac{L}{2} Q, \quad (47)$$

если через r мы обозначим радиус осевой дужки, а через Q — число

$$Q = \frac{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H)}{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0)}. \quad (48)$$

Формула для подъемной силы может быть теперь изображена в виде

$$aK v_0^2 \sin \sigma = P = 4\pi r v_0^2 \sin \frac{L}{2} \sin \sigma Q = P_0 Q, \quad (49)$$

где P_0 — подъемная сила тонкого крыла, сечением которого является осевая дужка. Величина Q характеризует тот выигрыш, который возникает от утолщения и удлинения крыла при переходе к инверсии эллипса. Чтобы яснее выставить на вид этот выигрыш, преобразуем Q , пользуясь найденным выше соотношением (46), из которого выводим

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H)}{\operatorname{sh}(t_0 + t'_0 + H) \operatorname{ch} H - \operatorname{ch}(t_0 + t'_0 + H) \operatorname{sh} H} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} H - \sqrt{1 + \frac{c^2}{r_1 r_2 \cos^2 \frac{L}{2}} \operatorname{sh} H}}, \quad (50) \\ r_1 r_2 \cos^2 \frac{L}{2} &= r_1 r_2 \frac{1 + \cos L}{2} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4}, \end{aligned}$$

как это следует из соотношения между сторонами и углами треугольника с вершинами в фокусах и центре инверсии. Так как $r_1 + r_2$ есть большая ось софокусного с преобразуемым эллипса, проходящего через центр инверсии, то, обозначив эту ось через $2a_1 = \frac{2c}{E_1}$ и припомнив, что $\operatorname{ch} H$ равен обратной величине эксцентриситета основного эллипса, мы найдем следующую удобную форму для коэффициента Q :

$$Q = \frac{E}{1 - \sqrt{\frac{1 - E^2}{1 - E_1^2}}}.$$

Чтобы удобнее было сравнивать между собой силы крыльев с неизменной осевой дужкой, видимых из центра этой дужки под одним и тем же

углом N , который определяется первой из формул (36), преобразуем коэффициент Q , введя в него этот угол. Формулы (36) дают

$$-\frac{2n}{c} = \frac{1-E^2}{E} \frac{1}{E \operatorname{ctg} L - \operatorname{ctg} N} = \frac{r_1 r_2 \sin L}{c^2},$$

после чего из (47) имеем

$$Q = \frac{E}{1 - \sqrt{\frac{\sin N \left(\cos^2 \frac{L}{2} - E^2 \sin^2 \frac{L}{2} \right) - E \cos N \sin L}{\sin N \cos^2 \frac{L}{2}}}}. \quad (51)$$

Эта формула позволяет сопоставить между собой подъемные силы, которые развиваются крыльями и которые получаются в результате инверсии из одного и того же центра семейства эллипсов, нанизанных на одну и ту же ось; семейство характеризуется тем, что фокальные отрезки и большие оси всех эллипсов видны из центра инверсии под неизменными углами L и N .

Обозначив через ξ обратную величину эксцентриситета, из равенства (51) определим

$$\frac{d\left(\frac{1}{Q}\right)}{d\xi} = 1 - q,$$

где q будет положительная неправильная дробь, в чем легко убедиться, так как разность между квадратами ее числителя и знаменателя легко приводится [3] к простому выражению

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}}{\sin^2 N}.$$

Таким образом, Q увеличивается с уменьшением эксцентриситета E . Теоретически наименее выгодным очертанием является инверсия параболы, а наиболее выгодным — инверсия эллипса, фокусы которого равно удалены от центра инверсии. Этому эллипсу, как легко усмотреть, соответствует эксцентриситет

$$E = \operatorname{tg} \frac{L}{2} / \operatorname{tg} \frac{N}{2}$$

и величина

$$Q = Q_{\max} = \frac{\sin L \cos \frac{N}{2}}{2 \left(\sin \frac{N}{2} \cos^2 \frac{L}{2} - \sqrt{\sin \frac{N-L}{2} \sin \frac{N+L}{2}} \right)};$$

для инверсии параболы $E = 1$ и

$$Q = Q_{\min} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\sin(N-L)}{\sin N \cos^2 \frac{L}{2}}}}.$$

Эти два предела довольно значительно разнятся при большем изгибе крыльев. Так, если $2N = 30^\circ$, $2L = 27^\circ$, то подсчет дает

$$Q_{\max} = 1,608, \quad Q_{\min} = 1,471;$$

следовательно, симметричная инверсия эллипса теоретически должна развивать на 9% большую подъемную силу, чем опирающаяся на те же круговые дуги инверсия параболы. Возможно, что на практике влияние вязкости, ведущее к образованию вихревого хвоста позади крыла, хвоста, тем более широкого, чем задний конец тупее, сгладит эту выгоду. Вероятно, и лобовое сопротивление при значительном притуплении кормовой части профиля возрастет в такой мере, что оценка еще более повысится в пользу крыла с менее притупленным задним краем. Однако в известных пределах преимущество профиля в виде инверсии эллипса может все же существовать и на деле. Вопрос этот может быть разрешен лишь экспериментальным путем.

Все изложенные соображения о подъемной силе исследуемого крыла опирались на формулу (6), в которой угол σ отсчитывается от критического направления. Чтобы ясно представить себе роль данного очертания, необходимо определить, как ориентировано по отношению к нему это направление. Для этого воспользуемся указаниями, сопровождающими формулы (7) и (8) § 1: угол, образуемый критическим направлением с осью OX , равен $\pi/2$ плюс аргумент коэффициента A , определяемого первой из формул (42). Отыщем, каков будет угол μ между тем же направлением и хордой осевой дужки; очевидно, μ равно разности аргументов комплексных чисел iA и $\frac{z'' - z'}{d}$, из которых последнее дано формулой (43).

Таким образом,

$$\mu = \arg \frac{\operatorname{sh}(2t_0 + H)}{\operatorname{ch}^2 t_0}.$$

Но

$$\begin{aligned} c \operatorname{sh}(2t_0 + H) &= \sqrt{(m + in - c)(m + in + c)} = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{s_1 + s_2}{2} i}, \\ \operatorname{ch} t_0 &= \operatorname{ch}\left(t_0 + \frac{H}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{H}{2} - \operatorname{sh}\left(t_0 + \frac{H}{2}\right) \operatorname{sh} \frac{H}{2} = \\ &= \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2t_0 + H) + 1}{2}} - \operatorname{sh} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2t_0 + H) - 1}{2}} = \\ &= \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{-m - in + c}{2c}} - \operatorname{sh} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{-m - in - c}{2c}} = \\ &= \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{r_1}{2c}} e^{\frac{s_1 i}{2}} - \operatorname{sh} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{r_2}{2c}} e^{\frac{s_2 i}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь r_1 есть радиус-вектор, направленный из центра инверсии в удаленный от него фокус, r_2 направляется к ближайшему фокусу. Легко усмотреть, что так как координаты центра инверсии отрицательны, то

$$L = s_2 - s_1.$$

Приняв это в соображение, найдем из приведенных формул для искомого угла уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \operatorname{tg} \frac{L}{4} \frac{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + \operatorname{th} \frac{H}{2}}{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} - \operatorname{th} \frac{H}{2}}.$$

Из приведенного соотношения вытекает, что критическое направление дальше отклонено от хорды осевой дужки, чем в случае инверсии параболы, когда $r_1 = \infty$ и $\mu = L/2$, т. е. когда критические направления самой дужки и сравниваемого с нею профиля совпадают. Указанное обстоятельство еще более подчеркивает выгодность профилей с притупленным задним краем, так как при одном и том же угле встречи потока с хордой осевой дужки образуемый им угол σ с критическим направлением окажется больше для инверсии эллипса с меньшим эксцентриситетом.

Чтобы не загромождать изложения излишними формулами, я не стану останавливаться на подсчете элементов параболы устойчивости и изображающих дуг для рассматриваемого крыла; в случае надобности этот подсчет легко сделать, воспользовавшись присущими крылу коэффициентами (42) и данными в своем месте общими формулами (18). Отмечу лишь более простой частный случай, в котором все вычисления особенно упрощаются: я имею в виду симметричную форму профиля, получающуюся в предположении, что центр инверсии лежит на большой оси. В этом случае u_0 и u_1 суть количества чисто мнимые, t_0 и t_1 вещественны. Формулы (42) дают тогда

$$l = k_1 = 0,$$

а по формулам (18)

$$g = q = 0.$$

Параметр параболы устойчивости и опрокидывающий момент равны нулю. Изображающие дуги и главная дуга обращаются в прямолинейные отрезки, лежащие на оси профиля.

Мы встречаем, таким образом, форму профиля, отмеченную в конце § 2; ее удобно принять для устройства рулей. Нетрудно для этого случая выразить все характерные для крыла величины через длину его осевой хорды S и полную длину оси профиля D . В самом деле, из формул (43) и (44) имеем

$$\frac{S}{D} = \frac{\operatorname{ch}^2(2t_0 + H) - \operatorname{ch}^2 H}{\{\operatorname{ch}^2(2t_0 + H) - 1\} \operatorname{ch} H},$$

но здесь

$$\operatorname{ch}(2t_0 + H) = -\frac{m}{c} = \frac{a_1}{c} = \frac{1}{E_1},$$

если через a_1 и E_1 по-прежнему обозначим большую полуось и эксцентриситет софокусного основному эллипса, проведенного через центр инверсии. Так как

$$\operatorname{ch} H = \frac{1}{E},$$

то мы получим

$$\frac{1 - E^2}{1 - E_1^2} = 1 - E \frac{S}{D},$$

вследствие которого формула поддерживающей силы на основании соотношений (47), (49) и (50) принимает вид

$$P = \pi \rho D v_0^2 \sin \sigma \left(1 + \sqrt{1 - E \frac{S}{D}} \right). \quad (52)$$

Если в этой формуле $E = 1$, то очертание руля будет симметрической инверсией параболы.

Положение центра давления, т. е. той неизменной точки, через которую постоянно проходит равнодействующая, легко получится при помощи второй из формул (18), в которую надлежит вставить значения l_1 и k из равенства (42), λ заменить через A , данное теми же формулами, положить

$$\beta = \frac{u_0 - u'_0}{i} = 2 \operatorname{th} t_0$$

и линейную величину a заменить через d , которое можно затем выразить через элементы профиля при помощи равенств (44) и (43). Произведя все указанные операции, мы, таким образом, последовательно получим для расстояния R центра давлений от заднего конца руля

$$R = hd = \lambda d \left(k - l_1 \beta + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{S}{4} \left\{ \frac{\operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch}(t_0 + H)} + \frac{\operatorname{sh}(2t_0 + H)}{\operatorname{sh} 2t_0} + \frac{\operatorname{sh} 2t_0}{\operatorname{sh}(2t_0 + H)} \right\};$$

отсюда, имея в виду (48), где $t'_0 = t_0$, а также (51) и (52),

$$R = \frac{D}{4} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{E} + \sqrt{1 - \frac{S}{ED}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{ES}{D}} \right) \right\}.$$

При $E = 1$ (инверсия параболы)

$$R = \frac{D}{4} \left\{ 2 + \frac{S}{D} - \sqrt{1 - \frac{S}{D}} \right\}$$

будет больше, чем для инверсии эллипса.

§ 7. Заключение. Рассмотренный доселе тип крыльев, для профилей которых нами дан прием построения при помощи циркуля и линейки, не является единственным в своем роде. Если бы мы задали функцию z формулой

$$\frac{z}{a} = A \left\{ \frac{1}{u - \alpha} + \frac{a'}{u - \alpha'} + \frac{a''}{u - \alpha''} + \dots \right\},$$

то, выбрав комплексные числа α так, чтобы первое из них обладало положительным коэффициентом при мнимой единице, а у остальных эти коэффициенты были отрицательны, мы всегда можем надлежащим подбором чисел a' , a'' , ... выполнить и второе необходимое условие, чтобы все корни производной от z находились в нижней полуплоскости переменного u . Тогда, приняв за контур крыла кривую, соответствующую реальным значениям u , мы по-прежнему изобразим область течения в верхней полуплоскости этого переменного. Все течение и все элементы, характеризующие крыло, определяются указанным в § 1 общим приемом. Построение контура будет отличаться от указанного в двух предшествующих параграфах лишь тем, что на этот раз придется для нахождения его точек складывать большее число векторов, так как параллельных прямых и окружностей при их инверсии будет столько, сколько дробей в формуле z .

Условия выбора чисел a' , a'' , ... поведут к некоторым неравенствам. К ним можно добавить также некоторые уравнения, благодаря которым крыло будет снабжено острым задним краем в форме точки заострения первого или второго рода. Для этого достаточно потребовать, чтобы старший или два старших члена в числителе мерзморфной функции, выражающей dz/du , выпадали. Если, например, мы положим

$$\frac{z}{a} = \frac{\alpha' - \alpha''}{u - \alpha} + \frac{\alpha'' - \alpha}{u - \alpha'} + \frac{\alpha - \alpha'}{u - \alpha''},$$

то контур будет иметь клювообразное окончание. Коэффициенты α должны быть таковы, чтобы корни уравнения

$$3u^2 - 2(\alpha + \alpha' + \alpha'')u + \alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha = 0$$

имели отрицательную мнимую часть³.

Суммируя полученные нами выводы, отметим, что при сделанных предположениях об отсутствии вязкости и о пренебрежении сжимаемостью воздуха для крыла любой формы должно иметь место правильное обтекание,

³ Пример:

$$\alpha' = -i, \alpha = -\alpha'' = \frac{2+i}{3},$$

корни приведенного квадратного уравнения будут

$$\frac{1}{3} \left[-i \pm \sqrt{\frac{2}{3}(1+i)} \right].$$

причем если точка схода не меняет своего места, то поддерживающая сила и вращающий момент имеют выражения

$$P = K\alpha v_0^2 \sin \sigma, \quad M = \rho \alpha^2 v_0^2 (G \cos 2\sigma + N \sin 2\sigma + Q),$$

где α — угол встречи, отсчитываемый от критического направления. Крыло характеризуется свойственной ему параболой устойчивости, облегающей линии действия поддерживающей силы при различных углах встречи. Момент относительно фокуса этой параболы имеет величину, не зависящую от угла атаки и равную опрокидывающему моменту, который будет иметь место при критическом направлении потока, когда сила обращается в нуль. Наконец, всякой форме профиля соответствует определенная, неизменно с ним связанная дуга окружности, которая представляет собой сечение идеально тонкого крыла, имеющего все количественные свойства данного.

Конечно, вязкость вносит существенные искажения в нарисованную нами картину; в несравненно меньшей степени дело будет меняться от упругости воздуха. Тем не менее при тех довольно узких пределах, в которых меняется угол атаки в реальных случаях полета, мне думается, можно ожидать довольно хорошего практического согласия между выводами развитой нами теории и опытными данными. Было бы благодарной темой для экспериментального исследования сравнение теоретических построений и вычислений с результатами непосредственного измерения сил по моделям, изготовленным на основании указанной теории.

О ВЛИЯНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА ВОЗДУХА НА ДВИЖУЩЕЕСЯ В НЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ КРЫЛО¹

Предисловие. В предлагаемой работе автор устанавливает основы, на которые должно опираться теоретическое исследование продольной устойчивости самолета. Для этого необходимо иметь формулы, определяющие прежде всего подъемную силу и момент давлений воздуха на крыло, движущееся каким угодно переменным движением. Указанный вопрос и разрешается автором для случая плоского потока при условии постоянства циркуляции. Конечная величина размаха внесет некоторое индуктивное сопротивление, которое придется подсчитывать по методу Прандтля, хотя она, правда, и не вполне приложима при неустановившемся движении.

§ 1. Введение. В статьях «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела»² и «К общей теории крыла моноплана»³ мною развита теория, позволяющая определить силы давления и их момент в случае равномерного прямолинейного движения цилиндрического крыла, опирающегося на данную дужку, или, что все равно, воздействие потока на неподвижное крыло.

В предлагаемой работе я устанавливаю формулы, дающие равнодействующую и момент давлений на бесконечное крыло, движущегося переменным движением и имеющее кроме поступательной скорости любое вращательное движение. При этом мы, во-первых, оставляем в стороне силы вязкости и, во-вторых, разрешаем задачу так, как будто имеем дело с несжимаемой идеальной жидкостью. Последнее предположение, как оно ни кажется далеким от представления о газе, вполне рационально для случая равномерного движения крыла, как это мною в свое время было показано в работе «О газовых струях»⁴. Что касается первого, то оно является источником существенного расхождения с действительностью, так как ведет к уничтожению силы лобового сопротивления в случае невихревого движения.

¹ Впервые напечатано в Трудах Центрального аэрогидродинамического института, 1926, вып. 19. Премировано Центральной комиссией улучшения быта ученых.

² Математический сборник, 1910, т. XXVIII [стр. 97—130 настоящего издания].

³ Издание Высшего военного редакционного совета, 1922 [стр. 142—181 настоящего издания].

⁴ Ученые записки Отделения физико-математических наук Московского университета, 1902 [стр. 11—96 настоящего издания].

Однако, как показывает эксперимент, получающиеся при такой гипотезе величины подъемной силы и момента при равномерном движении достаточно хорошо согласуются с наблюдаемыми. Поэтому можно ожидать, что и результаты выводов, предлагаемых мною здесь, дадут довольно хорошее согласие с опытом. Указанные ограничительные условия во всяком случае неизбежно должны быть поставлены, так как охватить теоретически влияние реального газа не представляется возможным. Экспериментальная проверка установит затем необходимые поправочные коэффициенты.

§ 2. Основные уравнения и формулы.

Итак, представим себе бесконечно длинное цилиндрическое крыло, опирающееся на дужку $AEBD$ данного вида (рис. 1). Отнесем его к некоторой связанной с ним неизменно системе координат OXY . Оси $O\bar{X}$, $O\bar{Y}$ имеют неизменное направление в пространстве, причем ось $O\bar{X}$ совпадает с направлением равномерного прямолинейного движения крыла — движения, которое мы будем называть *основным, или нормальным, режимом*. Сверх того, крыло обладает поступательным движением с переменными скоростями m по направлению оси $O\bar{X}$ и n по направлению оси $O\bar{Y}$, а также вращением около связанного с ним (неизменного для всякой задачи) центра C с угловой скоростью ω , также изменяющейся со временем. Эта величина положительна, если крыло вращается в направлении часовой стрелки. Координаты C в системе осей OXY будем обозначать через s и b . Будем рассматривать исключительно *невихревое движение* жидкости. Так как мы рассматриваем несжимаемую жидкость, то члены, зависящие от вязкости, не войдут в гидродинамические уравнения, чем и объясняется удовлетворительный результат такого рода исследований.

Составим теперь уравнения Эйлера для относительного движения жидкости в координатах OXY . Обозначим через u , v слагающие относительной скорости жидкости в какой-либо точке по этим осям. Вследствие принятых условий будем иметь

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ , потенциал скоростей, есть гармоническая функция x , y .

Проекции скорости начала координат на оси OX , OY обозначим через f и g , а угол наклона оси $O\bar{X}$ к неизменному направлению оси $O\bar{X}$ —

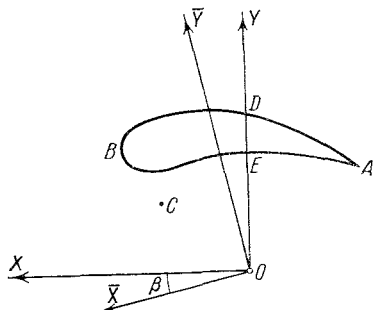


Рис. 1

через β ; тогда

$$\begin{aligned} f &= (v_0 + m) \cos \beta + n \sin \beta + \omega b, \\ g &= -(v_0 + m) \sin \beta + n \cos \beta - \omega c, \quad \omega = \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ускорение подвижного начала по тем же направлениям имеет компоненты h и k , причем

$$h = \dot{f} - \omega g, \quad k = \dot{g} + \omega f, \quad (3)$$

если точкой вверху мы обозначим дифференцирование по времени.

Если бы воздух двигался порывами со скоростью $v_1 + m_1$ в направлении, противоположном оси $O\bar{X}$, и скоростью n_1 противоположно оси $O\bar{Y}$, где v_1 — средняя скорость ветра, то во всех последующих формулах, в которых приходится учитывать относительную скорость воздуха по отношению к осям, связанным с крылом, вместо f и g , следует подставить $f_1 + f_1$ и $g_1 + g_1$, положив

$$\begin{aligned} f_1 &= (v_1 + m_1) \cos \beta + n_1 \sin \beta, \\ g_1 &= -(v_1 + m_1) \sin \beta + n_1 \cos \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы (3), определяющие абсолютное ускорение начала координат, при этом остаются неизменными.

Легко усмотреть, что гидродинамические уравнения напишутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega v + h - \dot{\omega} y - \omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\omega u + k + \dot{\omega} x - \omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \end{aligned} \quad (5)$$

здесь p — давление, а ρ — плотность воздуха. В этих уравнениях первые три члена левых частей представляют собою слагающие относительного ускорения жидкой частицы, четвертый член в каждом из них определяет компонент поворотного, а прочие члены — компоненты переносного ускорения.

Согласно формулам (4) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \dot{\omega} y, & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{\omega} x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} + 2\omega, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega, \end{aligned}$$

поэтому уравнения (5) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + h - \omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + k - \omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

откуда по интегриации получим основную формулу

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2}{2} + hx + ky - \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{const.} \quad (6)$$

Обратимся к определению равнодействующей силы давления и вращающего момента.

§ 3. Подъемная сила. Представим себе, что область течения, изображенная на рис. 1, всей беспредельной плоскостью вне контура дужки $AEBD$ конформно отображена на площади круга радиуса, равного единице, или, еще удобнее, — на верхней полуплоскости комплексного переменного $\bar{u}$ так, что действительной оси соответствует контур дужки. Тогда комплексное переменное

$$z = x + iy$$

представится как определенная функция $\bar{u}$ (над буквой u здесь поставлена черточка, чтобы отличить эту величину от величины u , обозначающей выше компонент скорости по оси OX). В то же время на контуре сопряженная z величина

$$z_1 = x - iy$$

также определится через $\bar{u}$; при этом для нахождения значений z_1 на контуре по известному виду функции

$$z = f(\bar{u})$$

достаточно в функции f заменить мнимую единицу i на $-i$, т. е. составить сопряженную функцию f_1 . Таким образом,

$$z_1 = f_1(\bar{u}).$$

Приняв во внимание сказанное, перейдем к разрешению поставленного вопроса. Обозначим через ds элемент контура дужки, отсчитываемый со знаком плюс при обходе контура по часовой стрелке. Косинусы углов внутренней нормали контура с осями OX и OY , очевидно, будут выражаться формулами

$$\cos \widehat{(n, x)} = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos \widehat{(n, y)} = \frac{dx}{ds}. \quad (7)$$

Поэтому, обозначив через X и Y компоненты равнодействующей силы давления на оси, получим для них

$$X = \int p \cos \widehat{(n, x)} ds = - \int p dy, \quad Y = \int p \cos \widehat{(n, y)} ds = \int p dx, \quad (8)$$

$$Y + iX = \int p (dx - idy) = \int p dz_1,$$

где интеграция совершается по контуру крыла в направлении от оси OX к оси OY , или, иначе, в направлении часовой стрелки при принятом нами взаимном расположении осей; это направление короче будем в дальнейшем называть *положительным*.

Если область течения изображена на полуплоскости $\bar{u}$, то для вычисления равнодействующей по формуле (8) достаточно заменить под интегралом p его выражением из формулы (6) и dz_1 через $\frac{df_1}{d\bar{u}} d\bar{u}$; при этом интеграл по контуру заменится определенным интегралом по $\bar{u}$ от $-\infty$ до $+\infty$. Однако для удобства и простоты вычисления мы сначала преобразуем выражение давления на контуре крыла. Для этого прежде всего заметим, что здесь относительная скорость по нормали есть нуль, а потому

$$u dy - v dx = 0. \quad (9)$$

Введя в исследование *функцию течения*

$$W = \varphi + i\psi,$$

где ψ — сопряженная потенциалу скоростей гармоническая *функция тока*, найдем по известным формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega y, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \omega x, \quad (10)$$

и, подставив в вышеприведенную формулу (9) эти выражения u и v , получим поле интеграции

$$\psi + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{const}$$

во всех точках контура дужки. Это произвольное постоянное ничто не мешает нам принять равным нулю. Таким образом, на контуре крыла

$$\psi = -\omega \frac{x^2 + y^2}{2} = -\omega \frac{zz_1}{2}. \quad (11)$$

Так как это соотношение справедливо во все время движения, то, дифференцируя его по времени, будем иметь на контуре

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\dot{\omega} \frac{zz_1}{2}.$$

По этой причине формулу для давления на контуре мы можем преобразовать, положив в ней

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \dot{\omega} \frac{zz_1}{2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \dot{\omega} \frac{zz_1}{2}. \quad (12)$$

Член $\frac{u^2 + v^2}{2} dz_1$, входящий в выражение $p dz_1$, также преобразуем, имея в виду следующее:

$$dz_1 (u^2 + v^2) = (u + iv)(u - iv) dz_1,$$

$$u - iv = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y + i \omega x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \omega z_1 = \frac{dw}{dz} + i \omega z_1,$$

$$(u + iv) dz_1 = (u + iv) (dx - i dy) = u dx + v dy + i (v dx - u dy).$$

Так как по формуле (9) последний член есть нуль, то у него можно переменить знак на обратный, и мы будем иметь

$$(u + iv) dz_1 = u dx + v dy - i (v dx - u dy);$$

отсюда, заменяя u и v по формулам (10), получим

$$\begin{aligned} (u + iv) dz_1 = & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x \right) dy + \\ & + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega x \right) dx + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega y \right) dy = dw + i \omega z_1 dz. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем на контуре

$$\begin{aligned} u - iv &= \frac{dw}{dz} + i \omega z_1, \\ (u + iv) dz_1 &= \left(\frac{dw}{dz} + i \omega z_1 \right) dz, \\ (u^2 + v^2) dz_1 &= \left(\frac{dw}{dz} + i \omega z_1 \right)^2 dz. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме рассмотренных членов в состав $p dz_1$ входят еще выражения

$$- (hx + ky) dz_1 = - h (x dx - i x dy) - k (y dx - i y dy)$$

и

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) dz_1 = \omega^2 \frac{z z_1}{2} dz_1;$$

первое из этих выражений упрощается, так как при интеграции по замкнутому контуру члены $h x dx$ и $k y dy$ дают в результате нули. Так как интегралы

$$- \int y dx, \quad \int x dy$$

по контуру дужки определяют ее площадь, то рассматриваемый член формулы для давления дает в конце концов следующее

$$- \int (hx + ky) dz_1 = (k + ih) q,$$

если через q мы обозначим упомянутую площадь.

Сопоставляя все сказанное, получим

$$\begin{aligned} Y + iX = & - \rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz} + i \omega z_1 \right)^2 dz - \\ & - \frac{i \dot{\omega} \rho}{2} \int z z_1 dz_1 + (k + ih) q \rho + \rho \frac{\omega^2}{2} \int z z_1 dz_1. \end{aligned}$$

Эту формулу еще слегка преобразуем, развернув подынтегральное выражение во втором члене и принимая во внимание соотношение

$$\int z_1^2 dz + \int z z_1 dz_1 = \int d(z_1^2 z) - \int z z_1 dz_1 = - \int z z_1 dz_1$$

[оно справедливо], так как функция $z_1^2 z$ однозначна и поэтому при обходе контура возвращается к своему первоначальному значению. Таким образом, приходим к формуле

$$Y + iX = -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw - \rho \omega i \int z_1 dw - \frac{\rho}{2} (i\dot{\omega} + \omega^2) \int z z_1 dz_1 + \rho q (k + ih). \quad (14)$$

Заметим, что входящий в эту формулу интеграл $\int z z_1 dz_1$ имеет весьма простой механический смысл. Он может быть выражен независимо от потока. В самом деле,

$$\int z z_1 dz_1 = \int (x^2 + y^2) (dx - i dy) = \int x^2 dx - i \int y^2 dy + \int y^2 dx - i \int x^2 dy;$$

первые два слагаемых уничтожаются, что касается остальных, то, если мы обозначим координаты центра тяжести площади q дужки через $\bar{x}$ и $\bar{y}$, эти интегралы могут быть представлены так:

$$\int y^2 dx = -2\bar{y}q; \quad \int x^2 dy = 2\bar{x}q;$$

знаки в этих формулах следует выбирать, имея в виду, что мы здесь имеем дело с интегралами по контуру; при обходе его в положительном направлении, т. е. по часовой стрелке (от оси OX к оси OY), мы будем иметь на верхней границе площади (при больших y) dx со знаком минус, тогда как на нижней эта величина положительна; обратное будет иметь место по отношению к знаку dy . Что касается коэффициента 2, то его появление будет ясно, если мы представим элемент интеграла $\int y^2 dx$ в виде

$$y^2 dx = (-y_1^2 + y_2^2) \varepsilon = 2 \frac{y_1 + y_2}{2} (-y_1 \varepsilon + y_2 \varepsilon) = -2 \frac{y_1 + y_2}{2} d\varepsilon,$$

где ε — основание бесконечно узкого прямоугольника $d\sigma$, вырезанного из дужки двумя соседними ординатами; точно так же преобразуется и второй интеграл.

Формула (14) после замены преобразованного члена переписется в окончательной форме так:

$$Y + iX = -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw - \rho \omega i \int z_1 dw + \rho (i\dot{\omega} + \omega^2) q (\bar{y} + i\bar{x}) + \rho q (k + ih). \quad (15)$$

Если мы перейдем к нормальному режиму полета с постоянной скоростью v_0 по неизменному направлению оси $O\bar{X}$, то все члены, кроме второго, исчезают, и мы приходим к выражению сил давления, данному впервые в нашей работе «О давлении плоскопараллельного потока».

Чтобы получить проекции равнодействующей по неизменным направлениям осей $O\bar{X}$ и $O\bar{Y}$, т. е. лобовое сопротивление и подъемную силу, остается лишь добавить еще одно соотношение, а именно легко усматриваемую связь

$$\bar{Y} + i\bar{X} = (Y + iX)e^{-i\beta}, \quad (16)$$

где, напомним, β обозначает угол между направлениями осей OX и $O\bar{X}$.

§ 4. Вращающий момент. Центральная точка и центр давления. Обозначим вращающий момент сил давления через M и координаты точки приложения равнодействующей сил давления через ξ и η .

Так как слагающие давления на элемент дужки ds по осям OX и OY выражаются, соответственно, произведениями $-pdy$, pdx , то для вращающего момента, т. е. момента равнодействующей давлений относительно принятого начала координат, мы имеем следующее выражение:

$$M = \int p(x dy - y dx) = \xi Y - \eta X. \quad (17)$$

В этом соотношении на место ξ , η мы можем подставить координаты любой точки прямой, по которой направлена равнодействующая, так что оно является уравнением этой прямой. Если мы выберем за точку приложения указанной силы точку встречи упомянутой прямой с перпендикулярной к ней прямой

$$\xi X + \eta Y = \int p(y dx - x dy),$$

то ξ и η можем определить из формулы

$$(\xi + i\eta)(Y + iX) = \int p dz_1. \quad (18)$$

Во всех этих соотношениях интегралы берутся в положительном направлении по замкнутому контуру дужки крыла.

Зная из формул § 3 величину $Y + iX$, мы при помощи формулы (18) находим координаты ξ и η . Что касается вращающего момента, то формула (17), его определяющая, может быть переписана в виде

$$M = \operatorname{Re} \int p dz_1, \quad (19)$$

если знаком Re мы условимся обозначать реальную часть стоящего при нем комплексного количества. Таким образом все сводится к нахождению интеграла, входящего в формулу (18).

Этот интеграл мы преобразуем аналогично тому, как было сделано в предшествующем параграфе. Но, прежде чем приступить к этому преобразованию, отметим некоторую особенность той точки приложения равнодействующей, которую определяет формула (18). Легко показать, что точка эта не зависит от системы координат. В самом деле, если мы переместим начало в точку с координатами λ и μ , то новые координаты ξ_1 , η_1 определятся формулой

$$(\xi_1 + i\eta_1)(Y + iX) = \int p(z - \lambda - i\mu) dz_1,$$

которую на основании отношения (8) можно переписать в виде

$$(\xi_1 + \lambda + i\eta_1 + i\mu)(Y + iX) = \int pz dz_1 = (\xi + i\eta)(Y + iX),$$

откуда получаем

$$\xi_1 = \xi - \lambda, \quad \eta_1 = \eta - \mu;$$

таким образом, рассматриваемая точка не смещается от переноса начала. Покажем, что она не сместится и при изменении направления осей. Представим себе, что оси повернуты на угол α по часовой стрелке, и обозначим через ξ_2 и η_2 координаты той точки равнодействующей в новой системе координат, которая определится формулой (18), составленной в этой новой системе. Так как при указанном преобразовании новые z и z_1 , которые мы обозначим через Z и Z_1 , связаны с прежними соотношениями

$$Z = ze^{-i\alpha}, \quad Z_1 = z_1e^{-i\alpha},$$

то правая часть формулы (18) не изменит своей величины:

$$\int pzd z_1 = \int pZd Z_1.$$

Что касается новых значений X и Y , пусть они будут X_2 и Y_2 , то

$$Y_2 + iX_2 = (Y + iX)e^{i\alpha};$$

следовательно, мы приходим к соотношению

$$(\xi_2 + i\eta_2)(Y + iX)e^{i\alpha} = (\xi + i\eta)(Y + iX),$$

и, стало быть,

$$\xi_2 + i\eta_2 = (\xi + i\eta)e^{-i\alpha},$$

т. е. получаем соотношение, которое указывает, что координаты точки изменились лишь вследствие преобразования [системы координат], точка же не сместилась в крыле.

Указанная точка, однако, может переместиться по равнодействующей при одном и том же течении, если мы изменим функцию течения, прибавив к ней реальную функцию времени, что не меняет потока. Обозначим такую функцию через λ . Легко усмотреть, что от этой прибавки

слагающие сил давления и их момент не изменятся. Но выражение

$$S = \int \bar{p} dz_1,$$

где через $\bar{p}$ обозначено новое давление в жидкости, приобретает приращение

$$\delta S = -\rho \int \dot{\lambda} z dz_1 = i\rho \dot{\lambda} \int (x dy - y dx) = 2i\rho \dot{\lambda} q;$$

здесь q — по-прежнему площадь дужки, а $\dot{\lambda}$ — производная прибавленной произвольной функции. Таким образом, S изменяется, а следовательно, исследуемая точка переместится. Указанный прибавок возможно сделать, не нарушая условий задачи, если давление в удаленных точках не задано. В противном случае задача становится совершенно определенной, так как прибавление функции $\dot{\lambda}$ изменило бы давление в бесконечности прибавочным членом — $\rho \dot{\lambda}$.

Отмеченную таким образом и определяемую формулой (18) особую точку равнодействующей мы будем называть *центральной точкой*. Если эта точка известна, то, проведя через нее прямую по направлению равнодействующей давлений до встречи с нижней поверхностью крыла, мы отметим на его поверхности *центр давления*.

Обратимся теперь к преобразованию интеграла, входящего в формулу (19) момента. Прежде всего преобразуем входящий в нее по формуле (6) член

$$I_1 = -\rho \int (hx + ky) z dz_1,$$

который по раскрытии комплексных количеств сводится к виду

$$I_1 = -\rho \int (hx + ky) \{x dx + y dy + i(y dx - x dy)\}.$$

Отбросив уничтожающиеся при обходе по контуру интегралы $\int x^2 dx$, $\int y^2 dy$, получим

$$I_1 = -\rho (h - ik) \int xy (dy + i dx) - \rho \int (-hix^2 dy + kiy^2 dx),$$

а так как

$$\int xy dy = -\frac{1}{2} \int y^2 dx = \bar{y}q,$$

$$\int xy dx = -\frac{1}{2} \int x^2 dy = -\bar{x}q,$$

где по-прежнему через q обозначена площадь дужки, а через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — координаты центра тяжести этой площади, то окончательно получим

$$I_1 = \rho (k + ih) (\bar{x} + i\bar{y}) q + 2i\rho q (h\bar{x} + k\bar{y}). \quad (20)$$

Приняв затем во внимание формулу (6) и соотношения (12) и (13), мы придаем интегралу

$$S = \int p z dz_1$$

вид

$$S = -\rho \int \frac{dw}{dt} z dz_1 - \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dt} + i\omega z_1 \right)^2 z dz - \\ - \frac{\rho i \dot{\omega}}{2} \int z^2 z_1 dz_1 + I_1 + \frac{\rho \omega^2}{2} \int z^2 z_1 dz_1.$$

По раскрытии квадрата во втором интеграле мы выделяем из него член $\frac{\rho \omega^2}{2} \int z_1^2 z dz$, который, сложившись с последним из интегралов, входящих в состав S , дает нуль, ибо

$$\int z_1^2 z dz + \int z^2 z_1 dz_1 = \frac{1}{2} \int d(z^2 z_1^2) = 0.$$

Далее заметим, что

$$I_2 = \int z^2 z_1 dz_1 = \int (x^2 + y^2) \{x dx + y dy + i(y dx - x dy)\}.$$

Прежде всего имеем

$$\int (x^2 + y^2) (x dx + y dy) = \frac{1}{2} \int d(x^2 + y^2)^2 = 0;$$

далее ввиду формулы (7) пишем

$$\int (x^2 + y^2) (y dx - x dy) = \int (x^2 + y^2) (y \cos \widehat{(n, y)} + x \cos \widehat{(n, x)}) ds$$

и, преобразуя эти соотношения по формулам Грина

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = - \int F \cos \widehat{(n, x)} ds,$$

$$\iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = - \int F \cos \widehat{(n, y)} ds,$$

находим

$$I_2 = -i \iint (3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2) dx dy = -4i \iint (x^2 + y^2) dx dy,$$

или окончательно

$$I_2 = -4iA,$$

где A — момент инерции площади дужки относительно начала координат. Припомним формулу (20), мы приводим, наконец, формулу для

интеграла S к желаемому виду

$$S = \int p z dz_1 = -\rho \int \frac{dw}{dt} z dz_1 - \frac{\rho}{2} \int z \frac{dw}{dz} dw - \rho i \omega \int z_1 z dw - \\ - 2\rho \dot{\omega} A + q\rho (k + ih)(\bar{x} + i\bar{y}) + 2i\rho q (h\bar{x} + k\bar{y}). \quad (21)$$

Реальная часть этого выражения определяет собой вращающий момент сил давления на крыло, а результат давления его на правую часть уравнения (14) дает нам $\xi + i\eta$, и мы найдем, таким образом, центральную точку

$$M = \operatorname{Re} S,$$

$$\xi + i\eta = \frac{S}{Y + iX}.$$

Чтобы использовать полученные формулы, мы должны во всяком частном случае отыскать соответственную функцию течения w . К этой задаче мы теперь и обращаемся.

§ 5. Определение функции течения. Чтобы разрешить любую частную задачу, надлежит, во-первых, найти конформное изображение бесконечной области потока, ограниченной изнутри контуром дужки крыла, на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного $\bar{u}$, которое мы в дальнейшем будем обозначать буквой u без значка сверху, так как нам уже не придется пользоваться этим символом для обозначения компонента скорости; во-вторых, потребуется определить самое функцию течения.

Этот последний вопрос разбивается на две отдельные задачи, соответственно которым мы будем отыскивать две функции течения w_1 и w_2 . Первая из них определяет поток в случае поступательного движения крыла, а вторая — в случае его вращения. Полная функция течения будет

$$w = w_1 + w_2.$$

Что касается вопроса о конформном изображении области течения, то общего приема, позволяющего решать задачу при всяком как-либо заданном контуре крыла, дать нельзя. Однако легко усмотреть, как это было указано в цитированном § 1 сочинения «К общей теории крыла моноплана», что отображающая функция может быть вообще приведена к такому виду:

$$z = a \left[\frac{H}{u - \alpha} + \Phi(u) \right],$$

где H и α суть некоторые комплексные числа, из которых α имеет положительную мнимую часть, a — некоторая линейная величина, пропорциональная линейным размерам крыла, $\Phi(u)$ — всюду конечная голоморфная функция u на верхней полуплоскости этого переменного.

Изменив направления осей OX, OY , а также меняя масштаб и начало координат на действительной оси в области u , мы можем еще упростить выражение z , сведя его к следующему виду:

$$z = \frac{a}{u-i} + a\Phi(u). \quad (22)$$

Причина такой простоты формулы (22) состоит в том, что функция z не может иметь в рассматриваемой области никаких особых точек, кроме простого полюса, который находится в точке $u = i$.

Задача изыскания функции течения w_1 , как показано в упомянутом моем сочинении, легко разрешается. Достаточно положить, в самом деле,

$$\frac{1}{a} \frac{dw_1}{du} = \frac{f-ig}{(u-i)^2} + \frac{f+ig}{(u+i)^2} + Ci \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right), \quad (23)$$

где f и g определяются формулами (2) § 1, чтобы удовлетворить всем ее условиям. При таком виде производной эта функция, а стало быть, и сама функция течения всюду в его области будут конечны и непрерывны, за исключением точки $u = i$, соответствующей бесконечно далеким точкам потока. Всюду на действительной оси, соответствующей контуру дужки, w_1 , равно $\varphi_1 + i\psi_1$, реально, а стало быть, дужка входит в состав линии тока $\psi_1 = 0$. Наконец, в бесконечно удаленной точке имеем

$$\frac{dw_1}{dz} = \lim_{u \rightarrow i} \frac{dw_1}{du} : \frac{dz}{du} = -f + ig,$$

где f есть компонент относительной скорости потока по оси OX , g — компонент той же скорости по оси OY . При обходе контура дужки мы имеем определенную циркуляцию скорости J . Она равняется приросту потенциала скорости при таком обходе и определится, если мы проинтегрируем функцию (23) по бесконечно малому контуру, охватывающему полюс, в обратном направлении; таким образом,

$$J = 2\pi aC.$$

При рассмотрении колебания потока в зависимости от колебания крыла мы будем предполагать периоды колебаний настолько короткими, что циркуляция при этом не меняется. Это предположение необходимо сделать, ибо в противном случае присутствие в формуле для давления члена $\partial\varphi/\partial t$ привело бы к неоднозначной функции, что невозможно.

Коэффициент C во всякой частной задаче находим из того условия, что при нормальном режиме, когда в формулах (2)

$$m = n = \omega = 0,$$

$$f - ig = v_0 e^{i\beta_0},$$

точка схода с крыла имеет определенное положение на крыле.

Обратимся к отысканию функции w_2 течения, соответствующего вращению пластинки. Входящая в состав w_2 гармоническая функция тока ψ_2 , как было выше найдено (формула (11)), должна на границе крыла удовлетворять условию

$$\psi_2 = -\omega \frac{x^2 + y^2}{2} = -\omega \frac{zz_1}{2}.$$

Представим себе сначала, что область течения отображена на площади

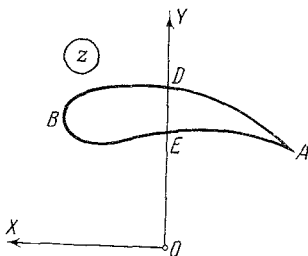


Рис. 2

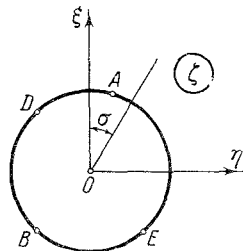


Рис. 3

круга радиуса единицы и что его окружности соответствует контур крыла. Для полной ясности мы изображаем на рис. 2 и 3 установленное таким образом соответствие областей z и ζ ; соответственные точки обозначены в этих областях одинаковыми буквами.

Раз преобразующая функция

$$z = F(\zeta)$$

известна, то на границе контура мы имеем

$$x^2 + y^2 = zz_1 = F(\zeta) F_1(\zeta_1) = F(e^{i\sigma}) F_1(e^{-i\sigma}) = \Phi(\sigma),$$

т. е. выражаем $x^2 + y^2$ как определенную функцию от угла σ . Поставленная задача сводится к отысканию на плоскости круга всюду конечной и непрерывной гармонической функции, имеющей на его окружности заданные значения:

$$\psi_2 = -\frac{\omega}{2} \Phi(\sigma).$$

Эта задача, как известно, разрешается вполне определенно. Мы имеем для нахождения ψ_2 формулу

$$\psi_2 = -\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\sigma) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(s-\sigma)} d\sigma,$$

при помощи которой ψ_2 на площади круга выражается в полярных

координатах ⁵ r и s . Приняв во внимание, что при

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta_1 = \xi - i\eta$$

мы имеем

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 = \zeta \zeta_1,$$

$1 + r^2 - 2r \cos(s - \sigma) = (\xi - \cos \sigma)^2 + (\eta - \sin \sigma)^2 = (\zeta - e^{i\sigma})(\zeta_1 - e^{i\sigma})$,
формуле для ψ_2 можно придать вид

$$-\frac{4\pi}{\omega} \psi_2 = \int_0^{2\pi} \Phi(\sigma) \frac{1 - \zeta \zeta_1}{(\zeta - \tau)(\zeta_1 - \tau_1)} d\sigma, \quad (24)$$

где $\tau = e^{i\sigma}$, $\tau_1 = e^{-i\sigma}$.

Найдем теперь полную функцию течения

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2.$$

Для этого воспользуемся известными дифференциальными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} &= i \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta_1} \right) = \\ &= \frac{i\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\zeta_1 - \zeta}{(\zeta - \tau)(\zeta_1 - \tau_1)} - \frac{1 - \zeta \zeta_1}{(\zeta - \tau)(\zeta_1 - \tau_1)^2} + \frac{1 - \zeta \zeta_1}{(\zeta - \tau)^2(\zeta_1 - \tau_1)} \right\} \Phi(\sigma) d\sigma, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta_1} = \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\zeta + \zeta_1}{(\zeta - \tau)(\zeta_1 - \tau_1)} + \frac{1 - \zeta \zeta_1}{(\zeta - \tau)(\zeta_1 - \tau_1)^2} + \frac{1 - \zeta \zeta_1}{(\zeta - \tau)^2(\zeta_1 - \tau_1)} \right\} \Phi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, так как

$$\frac{dw_2}{d\zeta} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi},$$

получаем после приведения

$$\frac{dw_2}{d\zeta} = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\sigma) \tau}{(\zeta - \tau)^2} d\sigma,$$

а по интеграции по ζ имеем

$$w_2 = \frac{i\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tau}{\zeta - \tau} + \delta \right) \Phi(\sigma) d\sigma, \quad (25)$$

где δ — подлежащая определению функция σ .

⁵ См. E. Picard. Cours d'analyse, T. I. Gauthier-Villars. Paris.

Чтобы ее отыскать, рассуждаем следующим образом: так как $\Phi(\sigma)$ представляет на окружности величину $x^2 + y^2$ на контуре крыла, то это функция реальная; с другой стороны, на той же окружности нам вполне известна функция ψ_2 , иными словами, мнимая часть w_2 ; ввиду того, что на величину ψ_2 влияет только реальная часть искомой функции δ , а ее мнимая часть добавляет постоянное лишь к ψ_2 , мы можем удовольствоваться предположением реальности функции δ . Приняв во внимание сказанное, составим сопряженную

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

функцию

$$\varphi_2 - i\psi_2 = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tau_1}{\xi_1 - \tau_1} + \delta \right) \Phi(\sigma) d\sigma.$$

Вычитая это равенство из равенства (25), находим

$$\psi_2 = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tau}{\xi - \tau} + \frac{\tau_1}{\xi_1 - \tau_1} + 2\delta \right) \Phi(\sigma) d\sigma,$$

или по приведении

$$\psi_2 = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\delta(\xi\xi_1 + 1) - 2 + (\xi\tau_1 + \xi_1\tau)(1 - 2\delta)}{(\xi - \tau)(\xi_1 - \tau_1)} \Phi(\sigma) d\sigma.$$

Сравнивая это выражение с соотношением (24), убеждаемся, что $\delta = 1/2$.

Таким образом, формула (25) приобретает окончательный вид

$$w_2 = \frac{i\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tau}{\xi - \tau} + \frac{1}{2} \right) \Phi(\sigma) d\sigma, \quad (26)$$

где $\tau = e^{i\sigma}$.

Так как в большинстве случаев бывает удобнее отображать область течения не на круге, а на полуплоскости, то преобразуем нашу формулу в этом предположении. Прежде всего формулу (26) можно переписать в новом виде, а именно изобразить ее так:

$$w_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int \overline{\Phi}(\tau) \left(\frac{d\tau}{\xi - \tau} + \frac{d\tau}{2\tau} \right),$$

и считать, что интеграция совершается по контуру круга. Положив затем

$$\xi = \frac{u - i}{u + i}, \quad \tau = \frac{v - i}{v + i},$$

мы конформно отображаем наш круг на верхней полуплоскости комплекс-

ного переменного u ; при этом величина v , определяемая равенствами

$$v = i \frac{1 + \tau}{1 - \tau} = i \frac{e^{-\frac{i\sigma}{2}} + e^{\frac{i\sigma}{2}}}{e^{-\frac{i\sigma}{2}} - e^{\frac{i\sigma}{2}}} = -\operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2},$$

всюду на окружности реальна, как и должно быть; окружность, стало быть, отображается на реальной оси в плоскости u .

Подставляя в интеграл выражения

$$d\tau = \frac{2i dv}{(v+i)^2}, \quad \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dv}{v-i} - \frac{dv}{v+i}, \quad \zeta - \tau = \frac{2i(u-v)}{(u+i)(v+i)},$$

взамен формулы (26) получим следующее уравнение для определения w_2 на верхней полуплоскости комплексного переменного u :

$$w_2 = -\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u+i}{v+i} \frac{F(v) dv}{v-u} + \frac{\omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) \left(\frac{dv}{v-i} - \frac{dv}{v+i} \right). \quad (27)$$

Здесь функция $F(v)$ есть результат преобразования $\Phi(\sigma)$ к новому переменному v , и, следовательно, на реальной оси области u мы имеем

$$F(v) = x^2 + y^2.$$

Таким образом, для определения w_2 надлежит поступать следующим образом: изобразить на полуплоскости u область течения так, чтобы контуру крыла соответствовала действительная ось полуплоскости; при этом получится соотношение вида (22)

$$z = \frac{\alpha}{u-i} + \psi(u) = f(u);$$

как было в свое время указано, сопряженное переменное будет иметь на контуре выражение

$$z_1 = f_1(u);$$

при помощи этих функций по замене u на v составляется [выражение]

$$x^2 + y^2 = zz_1 = f(v) f_1(v) = F(v),$$

которое и следует подставить в формулу (27).

В нашем случае, когда функция F дается аналитически вдоль всей действительной оси, вычисление w_2 по формуле (27) может быть совершено весьма просто. Прежде всего заметим, что благодаря конечности функции F при весьма больших значениях аргумента мы имеем возможность заменить интеграцию по действительной оси интегрированием (в положительном направлении) по контуру бесконечно большого полуокруга, диаметром которого служит эта ось, а полуокружность охватывает весьма удаленные точки полуплоскости. Далее, так как подынтегральная

функция будет иметь особые точки на площади указанного полукруга лишь в виде отдельных полюсов, то величина интеграла выразится как сумма слагаемых, каждое из которых представляет интеграл по бесконечно малому контуру, охватывающему полюс. Таким образом, окажется, что искомое выражение равно произведению $2\pi i$ на сумму интегральных вычетов функции, стоящей под знаком интеграла (под интегральным

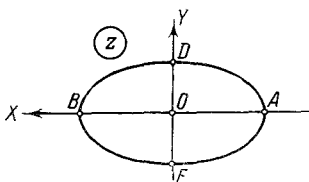


Рис. 4

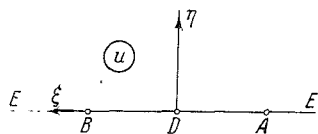


Рис. 5

вычетом функции $f(u)$ мы разумеем коэффициент при $\frac{1}{u-\alpha}$ в разложении функции по степеням $u - \alpha$ около полюса $u = \alpha$).

§ 6. Дужка в виде эллипса. Обратимся теперь к приложениям изложенного общего метода к дужкам различного частного вида и начнем с того случая, когда дужка ограничена вытянутым эллипсом, который в предположении бесконечно уменьшающейся малой оси в пределе дает простую бесконечно тонкую пластинку (рис. 4). Положив

$$x = \frac{2au}{1+u^2}, \quad y = b \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

мы для реального u имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Значения $u = 0$ и $u = \infty$ определяют вершины эллипса в концах его малой оси (рис. 5); оконечностям большой оси соответствуют значения

$$u = \pm 1;$$

функция z при этом выразится так:

$$z = x + iy = \frac{a+b}{u-i} + \frac{a-b}{u+i} - bi, \quad (28)$$

а сопряженная ей функция

$$z_1 = x - iy = \frac{a+b}{u+i} + \frac{a-b}{u-i} + bi. \quad (29)$$

По формуле (23) для определения функции течения w_1 , соответствующей поступательному движению дужки, получаем выражение

$$\frac{1}{a+b} \frac{dw_1}{du} = \frac{f-ig}{(u-i)^2} + \frac{f+ig}{(u+i)^2} + Ci \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right). \quad (30)$$

Определим постоянную величину C , предположив, что при нормальном режиме точка схода находится в конце A большой оси, где $u = -1$. В таком случае скорость в этой точке должна обращаться в нуль, а стало быть, $u = -1$ должно быть корнем выражения (30); заметим, что при этом по формулам (2), как было сказано выше,

$$f - ig = v_0 e^{i\beta_0}.$$

Таким образом, получаем

$$C = v_0 \sin \beta_0.$$

Проинтегрировав уравнение (30), найдем

$$\frac{w_1}{a+b} = -\frac{f-ig}{u-i} - \frac{f+ig}{u+i} + Ci \ln \frac{u-i}{u+i}. \quad (31)$$

Определим теперь функцию w_2 , соответствующую вращательному движению пластинки. По формулам (28) и (29), заменив в них u на v , имеем на контуре дужки

$$x^2 + y^2 = zz_1 = F(v) = c^2 \left\{ \frac{1}{(v-i)^2} + \frac{1}{(v+i)^2} + \frac{i}{v+i} - \frac{i}{v-i} \right\} + b^2,$$

где

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Затем по формуле (27) получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi w_2}{\omega} = & - \int \frac{u+i}{v+i} \left\{ b^2 + \frac{c^2}{(v-i)^2} + \frac{c^2}{(v+i)^2} + \frac{c^2 i}{v+i} - \frac{c^2 i}{v-i} \right\} \frac{dv}{v-u} + \\ & + \frac{1}{2} \int \left\{ b^2 + \frac{c^2}{(v-i)^2} + \frac{c^2}{(v+i)^2} + \frac{c^2 i}{v+i} - \frac{c^2 i}{v-i} \right\} \left(\frac{dv}{v-i} - \frac{dv}{v+i} \right). \end{aligned}$$

Вследствие замечания, высказанного в конце предшествующего параграфа, мы должны теперь составить интегральные вычеты полюсов $v = i$ и $v = u$ подынтегральной функции; обозначим их соответственно через N_1 и N_2 . Легко находим для второго вычета выражение

$$-N_2 = F(u) = b^2 + \frac{c^2}{(u-i)^2} + \frac{c^2}{(u+i)^2} + \frac{c^2 i}{u+i} - \frac{c^2 i}{u-i}.$$

Для отыскания N_1 заменим v через $i + \varepsilon$ и разложим подынтегральную функцию по степеням ε , сохранив в сомножителях члены степеней -2 , -1 , 0 и $+1$; в витых скобках достаточно сохранить лишь первые три степени. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{v+i} &= \frac{1}{2i} + \frac{\varepsilon}{4}, \\ \frac{1}{v-u} &= \frac{1}{i-u} - \frac{\varepsilon}{(u-i)^2}, \\ b^2 + \frac{c^2}{(v-i)^2} + \frac{c^2}{(v+i)^2} + \frac{c^2 i}{v+i} - \frac{c^2 i}{v-i} &= \frac{c^2}{\varepsilon^2} - \frac{c^2 i}{\varepsilon} + b^2 + \frac{c^2}{4}, \\ \frac{1}{v-i} - \frac{1}{v+i} &= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2i} - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Для составления вычета первого интеграла перемножаем первые три из этих функций и берем со знаком минус коэффициент при $1/\varepsilon$, умноженный на $u + i$; получим

$$-\frac{c^2(u+i)}{4(i-u)} + \frac{c^2(u+i)}{2i(u-i)^2} + \frac{c^2(u+i)}{2(i-u)} = -\frac{ic^2(u+i)}{2(u-i)^2} - \frac{c^2(u+i)}{4(u-i)} = \\ = \frac{c^2}{(u-i)^2} - \frac{c^2i}{u-i} - \frac{c^2}{4}.$$

Вычет второго интеграла равен половине коэффициента при $1/\varepsilon$ [в выражении, полученном] в результате перемножения двух последних из вышеприведенных функций. Он, очевидно, будет равен

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} + b^2 + \frac{c^2}{4} \right) = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{4}.$$

Сложив две полученные величины, найдем искомый вычет

$$N_1 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{(u-i)^2} - \frac{c^2i}{u-i}$$

и затем сумму вычетов

$$N_1 + N_2 = -\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{(u+i)^2} - \frac{c^2i}{u+i}.$$

Результат умножения этого количества на $2\pi i$, как сказано было в конце § 5, и будет представлять величину интересующего нас интеграла. Таким образом, находим

$$\frac{fw_2}{\omega} = \frac{c^2}{u+i} - \frac{c^2i}{(u+i)^2} - \frac{b^2i}{2}. \quad (32)$$

Полная функция течения w найдется из равенств (31) и (32) в виде

$$w = -\frac{(a+b)(f-ig)}{u-i} - \frac{(a+b)(f+ig)}{u+i} - \frac{i\omega b^2}{2} + \frac{\omega c^2}{u+i} - \frac{i\omega c^2}{(u+i)^2} + \\ + iC(a+b) \ln \frac{u-i}{u+i}, \quad (33)$$

где

$$C = v_0 \sin \beta_0. \quad (34)$$

Обратимся к вычислению сил давления на рассматриваемое крыло. Для этого нужно составить три интеграла

$$I = \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1, \quad I_1 = \int z_1 dw, \\ I_2 = \int \frac{\partial w}{\partial z} dw = \int \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du.$$

Будем рассматривать только такие переменные движения крыла, при которых циркуляция, а стало быть, и коэффициент C не изменяются.

В таком случае

$$I = \int \left\{ \frac{a+b}{u-i} (f - i\dot{g}) + \frac{a+b}{u+i} (f + i\dot{g}) + i\dot{\omega} \frac{b^2}{2} - \frac{\dot{\omega}c^2}{u+i} + \right. \\ \left. + \frac{i\dot{\omega}c^2}{(u+i)^2} \right\} \left\{ \frac{a+b}{(u+i)^2} + \frac{a-b}{(u-i)^2} \right\} du.$$

Обозначая по-прежнему $u - i$ через ε , имеем

$$\frac{1}{u-i} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{(u-i)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \\ \frac{1}{u+i} = \frac{1}{2i} + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{1}{(u+i)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon i}{4}.$$

Интегральный вычет R легко находится в виде

$$R = -\frac{(a+b)^2}{4} (f - i\dot{g}) + c^2 \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{4},$$

а затем имеем

$$I = \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 = -2\pi i R = \frac{\pi i}{2} \{ (a+b)^2 (f - i\dot{g}) - c^2 (\dot{f} + i\dot{g}) \}.$$

Переходим к составлению второго интеграла:

$$I_1 = \int z_1 dw = \int \left(\frac{a+b}{u+i} + \frac{a-b}{u-i} + bi \right) \left\{ \frac{a+b}{(u-i)^2} (f - i\dot{g}) - \frac{\omega c^2}{(u+i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2i\omega c^2}{(u+i)^3} + \frac{a+b}{(u+i)^2} (f + i\dot{g}) + iC(a+b) \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) \right\} du.$$

Подобно предыдущему, составляем интегральный вычет

$$R_1 = -\frac{c^2}{4} (f + i\dot{g}) - \frac{Cc^2}{2} + \frac{Cc^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} (f - i\dot{g}),$$

или по приведении

$$R_1 = \frac{(a+b)^2}{4} (f - i\dot{g}) - \frac{c^2}{4} (f + i\dot{g}).$$

Затем имеем

$$I_1 = -2\pi i R_1 = -\frac{\pi i}{2} \{ (a+b)^2 (f - i\dot{g}) - c^2 (f + i\dot{g}) \}.$$

Наконец, последний интеграл выразится так:

$$I_2 = \int \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du = \\ = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{a+b}{(u-i)^2} (f - i\dot{g}) + \frac{a+b}{(u+i)^2} (f + i\dot{g}) - \frac{\omega c^2}{(u+i)^2} + \frac{2i\omega c^2}{(u+i)^3} + \right. \\ \left. + iC(a+b) \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) \right\}^2 \frac{(u-i)^2 (u+i)^2}{a(u^2-1) + 2ibu} du;$$

здесь принято во внимание равенство

$$\frac{dz}{du} = -\frac{a+b}{(u-i)^2} - \frac{a-b}{(u+i)^2} = -2 \frac{a(u^2-1)+2biu}{(u-i)^2(u+i)^2}.$$

Интегральный вычет R_2 получится лишь из одного члена подынтегральной функции; в самом деле, так как функция, стоящая вне витых скобок, имеет множитель

$$(u-i)^2 = \varepsilon^2$$

и ее разложение вблизи полюса может быть представлено в виде

$$\frac{2\varepsilon^2}{a+b} (1 + L\varepsilon^2),$$

то из разложения функции, заключенной в витой скобке, надлежит принять во внимание лишь член вида $1/\varepsilon^3$; это будет удвоенное произведение первого и пятого слагаемых. Таким образом, получаем

$$R_2 = -iC(a+b)^2(f-ig) \frac{(2i)^2}{-2a-2b} = -2iC(a+b)(f-ig),$$

$$I_2 = -2\pi i R_2 = -4\pi C(a+b)(f-ig).$$

Теперь мы имеем все необходимые элементы для определения равнодействующей сил давления и легко получаем по формуле (15), в которой заменяем q через πab :

$$\begin{aligned} Y + iX &= -\frac{\rho}{2} I_2 - \rho i \omega I_1 - \rho I + \pi ab(k + ih) = \\ &= J\rho(f-ig) - \frac{\pi \rho i}{2} \{(a+b)^2[\dot{f} - i\dot{g} - i\omega(f-ig)] - \\ &\quad - c^2[\dot{f} + i\dot{g} - i\omega(f+ig)]\} + \pi ab(k + ih); \end{aligned} \quad (35)$$

$$J = 2\pi(a+b)C$$

есть циркуляция скорости по контуру дужки. По формулам (3) компоненты h и k ускорения подвижного начала координат могут быть выражены так:

$$h - ik = \dot{f} - i\dot{g} - i\omega(f-ig),$$

$$h + ik = \dot{f} + i\dot{g} + i\omega(f+ig),$$

а потому найденное выражение можно изобразить в следующей форме:

$$Y + iX = J\rho(f-ig) - \frac{\pi \rho}{2} (a^2 + b^2)(k + ih) - \frac{i\pi \rho}{2} c^2(k - ih) + \pi \rho \omega c^2(f + ig).$$

Направим переменную ось OX горизонтально, а ось OY — вертикально вверх; тогда согласно формуле (16)

$$\bar{Y} + i\bar{X} = e^{-i\beta}(Y + iX),$$

и после приведения, воспользовавшись уравнениями (2), получим

$$\bar{Y} + i\bar{X} = J\rho \{ (v_0 + m - ni) e^{-i\beta} + \omega (\bar{b} + i\bar{c}) \} - \pi a^2 k - \pi i b^2 h + \\ + \pi \rho \omega (a^2 - b^2) \{ (v_0 + m + ni) e^{-2i\beta} + \omega (\bar{b} - i\bar{c}) e^{-i\beta} \}. \quad (36)$$

Здесь через $\bar{c}$, $\bar{b}$ обозначаем координаты полюса вращения в плоскости дужки. Формула (36) вполне определяет подъемную силу $\bar{Y}$ и силу лобового сопротивления $-\bar{X}$.

Первый член формулы (36) при основном движении, или нормальном режиме, когда $m = n = \omega = 0$, приобретает обычный вид формулы Н. Е. Жуковского. При отсутствии вращения выражение (36) приводится к виду

$$\bar{Y} + i\bar{X} = J\rho (v_0 + m - ni) - \pi a^2 k - \pi i b^2 h. \quad (37)$$

Если бы воздух не был спокоен, то в силу замечания, сделанного в § 1, в формуле (35) надлежало бы, не изменяя h и k , вместо f и g подставить $f + f_1$, $g + g_1$, причем f_1 и g_1 определились бы формулами (4) § 1. Любопытно отметить, что в частном случае отсутствия вращения мы получили бы вместо формулы (37) следующее выражение:

$$\bar{Y} + i\bar{X} = J\rho [v_0 + v_1 + m + m_1 - (n + n_1) i] - \pi a^2 k - \\ - \pi i b^2 h - \pi a (a + b) k_1 - \pi i b (a + b) h_1, \quad (38)$$

где

$$h_1 = \frac{dm_1}{dt} = \dot{m}_1, \quad k_1 = \frac{dn_1}{dt} = \dot{n}_1$$

суть ускорения ветра вдали от крыла. Таким образом, при ускоренном движении крыла развиваются меньшие силы, чем при ускоренном ветре. Попутный ветер дает значительную подгоняющую силу; положив в равенстве (38)

$$m = n = n_1 = 0, \quad h_1 = -H,$$

мы видим, что величина этой подгоняющей силы будет

$$\bar{X} = \pi \rho b (a + b) H.$$

Перейдем теперь к определению вращающего момента и центра давления. Для этой цели обратимся к формуле (24). Составляем интегралы

$$G = \int z \frac{\partial w}{\partial t} dz_1, \quad G_1 = \int z z_1 dw, \quad G_2 = \int z \frac{dw}{dz} dw;$$

$$G = \int \left\{ \frac{a+b}{u-i} + \frac{a-b}{u+i} - bi \right\} \left\{ \frac{a+b}{u-i} (\dot{f} - i\dot{g}) + \right. \\ \left. + \frac{a+b}{u+i} (\dot{f} + i\dot{g}) + i\dot{\omega} \frac{b^2}{2} - \frac{\dot{\omega} c^2}{u+i} + \frac{\dot{\omega} i c^2}{(u+i)^2} \right\} \left[\frac{a-b}{(u-i)^2} + \frac{a+b}{(u+i)^2} \right] du.$$

Для вычисления интегрального вычета P , соответствующего полюсу $u = i$, придется на этот раз в разложении функций, заключенных в витые скобки,

принимать во внимание члены порядка ε^2 , ибо произведение первого слагаемого каждой из этих функций на первый член последнего множителя будет порядка $1/\varepsilon^3$. Имеем

$$\frac{1}{u+i} = \frac{1}{2i+\varepsilon} = -\frac{i}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{i\varepsilon^2}{8},$$

$$\frac{1}{(u+i)^2} = \frac{1}{(2i+\varepsilon)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon i}{4} + \frac{3}{16}\varepsilon^2.$$

Подынтегральная функция представится после подстановки этих разложений в виде

$$\left(\frac{a+b}{2} - i\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}\varepsilon + i\varepsilon^2\frac{a-b}{8}\right)\left[\frac{B}{\varepsilon} - \frac{B_1i}{2} + \frac{B_1\varepsilon}{4} + \frac{B_1i\varepsilon^2}{8} + \right. \\ \left. + i\dot{\omega}\left(\frac{a^2+b^2}{4} + c^2\frac{\varepsilon^2}{16}\right)\right]\left(\frac{a-b}{\varepsilon^2} - \frac{a+b}{4} - i\varepsilon\frac{a+b}{4}\right),$$

где для краткости положено

$$B = (a+b)(\dot{f} - i\dot{g}), \quad B_1 = (a+b)(\dot{f} + i\dot{g}).$$

Собирая коэффициенты при $1/\varepsilon$, получим искомый интегральный вычет

$$P = abi\frac{B_1-B}{2} - i\dot{\omega}\left[ab\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{c^4}{16}\right] = -a^i(a+i) \dot{g} - i\dot{\omega}\left[ab\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{c^4}{16}\right].$$

Искомый интеграл G определяется по найденному вычету и будет иметь величину

$$G = -2\pi i P = \pi ab(a+b)2i\dot{g} - \pi ab\frac{a^2+b^2}{2}\dot{\omega} + \pi\frac{c^4}{8}\dot{\omega}. \quad (39)$$

Далее переходим к вычислению интеграла

$$G_1 = \int zz_1 dw.$$

Нахождение этого интеграла может быть упрощено при помощи следующего соображения: так как на контуре крыла

$$\psi = -\frac{\omega zz_1}{2},$$

$$dw = d\varphi + i d\psi = d\varphi - i\omega d\frac{zz_1}{2},$$

то

$$\int zz_1 dw = \int zz_1 d\varphi - i\omega \int d\left(\frac{zz_1}{2}\right)^2 = \int zz_1 d\varphi.$$

Таким образом, G_1 есть количество реальное. Поэтому если мы вместо zz_1 подставим в выражение G_1 функцию комплексного переменного, имеющую на контуре действительную часть, равную zz_1 , то G_1 можно будет найти как реальную часть полученного таким способом значения интеграла. Но такую функцию мы знаем; она определяется формулой (32) и, очевидно,

равна

$$-2 \frac{\psi_2 - i\varphi_2}{\omega} = \frac{2w_2 i}{\omega} = \frac{2ic^2}{u+i} + 2 \frac{c^2}{(u+i)^2} + b^2.$$

Поэтому получаем

$$G_1 = \operatorname{Re} \int \left\{ \frac{2ic^2}{u+i} + \frac{2c^2}{(u+i)^2} + b^2 \right\} \left\{ \frac{(a+b)(f-ig)}{(u-i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(a+b)(f+ig)}{(u+i)^2} - \frac{\omega c^2}{(u+i)^2} + \frac{2i\omega c^2}{(u+i)^3} + iC(a+b) \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) \right\} du.$$

Интегральный вычет получится лишь из первого и пятого членов второго сомножителя подынтегральной функции, и будем иметь величину

$$P_1 = iC(a+b) \left(\frac{c^2}{2} + b^2 \right) = iC(a+b) \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Затем находим

$$G_1 = \operatorname{Re}(-2\pi i P_1) = \pi C(a+b) \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (40)$$

Обращаемся к вычислению G_2 :

$$G_2 = \int z \frac{dw}{dz} dw = \int z \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du = \\ = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{a+b}{u-i} + \frac{a-b}{u+i} - bi \right] \left\{ \frac{a+b}{(u-i)^2} (f-ig) + \frac{a+b}{(u+i)^2} (f+ig) - \right. \\ \left. - \frac{\omega c^2}{(u+i)^2} + \frac{2i\omega c^2}{(u+i)^3} + iC(a+b) \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) \right\}^2 \frac{(u-i)^2 (u+i)^2}{a(u^2-i) + 2ibu} du.$$

Прежде всего отметим, что функция, стоящая под интегралом в виде множителем после витых скобок, вблизи полюса $u = i$ имеет разложение по степеням $u - i = \varepsilon$ такого вида:

$$\frac{2\varepsilon^2}{a+b} \left(1 + \frac{a-b}{a+b} \frac{\varepsilon^2}{4} + k\varepsilon^3 \right).$$

По этой причине члены порядка $1/\varepsilon$ в подынтегральной функции получатся лишь из возникающих при перемножении квадратных и витых скобок членов порядка $1/\varepsilon^5$ и $1/\varepsilon^3$. При помощи этого соображения легко составляем интегральный вычет G_2 , который обозначим через P_2 . Он будет иметь величину

$$P_2 = \left(C^2 + \frac{f^2 + g^2}{2} \right) (a+b)^2 - \frac{c^2}{2} (f-ig)^2$$

и затем

$$G_2 = -2\pi i P_2 = \pi i c^2 (f-ig)^2 - 2\pi i (a+b)^2 \left(C^2 + \frac{f^2 + g^2}{2} \right). \quad (41)$$

Теперь, имея все элементы, необходимые для составления формулы (21), найдем

$$S = -\rho G - \rho i \omega G_1 - \frac{\rho}{2} G_2 - 2\rho \dot{\omega} A.$$

ибо центр тяжести площади эллипса совпадает с его центром, в котором мы поместили начало координат, следовательно, $\bar{x} = \bar{y} = 0$; что касается момента инерции эллипса около оси, перпендикулярной к нему и проходящей через начало, т. е. количества, обозначенного в формуле (21) чертой A , то

$$A = \pi ab \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Воспользовавшись формулами (39), (40) и (41), мы получим для S выражение

$$S = -\pi \rho \frac{c^4}{8} \dot{\omega} - 2\pi ab (a+b) i \dot{g} \rho - \pi i \rho \omega (a+b) \frac{a^2 + b^2}{2} C + \\ + \pi i \rho (a+b)^2 \left[C^2 + \frac{f^2 + g^2}{2} \right] - \frac{\pi i \rho c^2}{2} (f - ig)^2. \quad (42)$$

Вращающий момент сил давления определяется как действительная часть S :

$$M = \operatorname{Re} S = -\pi \rho \frac{c^4}{8} \dot{\omega} - \pi \rho c^2 fg. \quad (43)$$

Координаты ξ , η центральной точки определяются из формулы

$$\xi + i\eta = \frac{S}{Y + iX},$$

а по ней указанным выше способом отыскиваем центр давления. Найдем его для бесконечно тонкого эллипса, когда он обращается в пластинку. Положив в формуле (42) $b = 0$, находим для такого случая

$$S = -\pi i \rho \omega \frac{a^3}{2} C + \pi i \rho a^2 \left[C^2 + \frac{f^2 + g^2}{2} \right] - \frac{\pi i \rho a}{2} (f - ig)^2 - \\ - \pi \rho \frac{a^4}{8} \dot{\omega} = \pi i \rho a^2 \left[C^2 - \frac{C\omega a}{2} + g^2 + ifg + \frac{a^2}{8} \dot{\omega} i \right].$$

Формула (35) дает для этого случая

$$Y + iX = \pi a c [2C (f - ig) - ga + i\omega ga].$$

Центр давления мы можем на этот раз определить, не проходя через вычисление координат центральной точки. В самом деле, вращающий момент

$$M = \operatorname{Re} S = -\pi \rho a^2 fg - \frac{\pi \rho a^4}{8} \dot{\omega}.$$

Обозначив через l расстояние центра давления от середины пластинки, будем иметь

$$Yl = M,$$

а отсюда, приняв во внимание равенство (34)

$$C = v_0 \sin \beta_0,$$

получим

$$l = -a \frac{fg + \frac{a^2}{8} \dot{\omega}}{2v_0 f \sin \beta_0 - \dot{g}a}.$$

По формулам (2), предположив, что пластинка вращается около своего центра, будем иметь

$$f = (v_0 + m) \cos \beta + n \sin \beta, \quad g = -(v_0 + m) \sin \beta + n \cos \beta, \\ \dot{g} = -\omega f - \dot{m} \sin \beta + \dot{n} \cos \beta$$

и для l находим окончательную формулу

$$l = a \frac{(v_0 + m) \sin \beta - n \cos \beta + \frac{a^2}{8} \frac{\dot{\omega}}{f}}{2v_0 \sin \beta_0 + a\omega + \frac{\dot{m} \sin \beta - \dot{n} \cos \beta}{f}}.$$

При нормальном режиме, когда $m = n = 0$, $\omega = 0$, $\dot{m} = \dot{n} = 0$,

$$l = l_0 = \frac{a}{2}.$$

Так как полная длина пластинки есть $2a$, то, как и следовало, мы имеем при этом центр давления на расстоянии четверти длины от переднего края. Формула для l показывает, что при наклонении пластинки вперед центр давления отходит в отсутствии поступательных колебаний сначала ближе к переднему концу; но, когда угол β уменьшится до некоторого предела, может наступить обратное явление; при увеличении угла наклона движение центра протекает в обратном смысле. В случае же наличия поступательных колебаний движение центра давления по пластинке довольно сложно.

В заключение этого параграфа определяем полный добавочный импульс сил давления на крыло с эллиптическим очертанием за период колебания и среднюю величину равнодействующей за это время. Пусть период колебания есть T . Для слагающих импульса K и L сил давления по неподвижным осям имеем формулу

$$L + iK = \int_0^T (\bar{Y} + i\bar{X}) dt = \int_0^T (Y + Xi) e^{-i\beta} dt.$$

Воспользуемся соотношением (35) для определения подынтегральной функции. На основании формул (2) и (3), принимая во внимание равенство

$$\omega = \frac{d\beta}{dt}, \text{ получим}$$

$$(f - ig) e^{-i\beta} = v_0 + m - ni + \omega (\bar{f} + i\bar{c}) e^{-i\beta}, \\ (f - ig) e^{-i\beta} - (f - ig) e^{-i\beta} i\omega = \frac{d}{dt} (f - ig) e^{-i\beta},$$

$$(j + i\dot{g})e^{-i\beta} - (f + ig)e^{-i\beta}i\omega = \frac{d}{dt}(f + ig)e^{-i\beta},$$

$$(k + ih)e^{-i\beta} = e^{-i\beta}(\dot{g} + i\dot{f}) - i\omega e^{-i\beta}(g + if) = \frac{d}{dt}(g + if)e^{-i\beta}.$$

При помощи этих равенств из приведенной выше формулы и соотношения (33) находим

$$L + iK = J\rho v_0 T,$$

ибо прочие члены исчезнут ввиду их периодичности. Таким образом, средняя поддерживающая сила за период колебания определяется формулой Н. Е. Жуковского по нормальному режиму. Добавочный импульс уничтожается.

Обратимся к вычислению среднего момента за период. Формула (43) дает величину этого момента во всякое данное время, и мы имеем

$$M = -\frac{\pi\rho c^4}{8}\dot{\omega} - \pi\rho c^2 fg|.$$

Средний момент $\bar{M}$ определится из соотношения

$$\bar{M}T = \int_0^T M dt = -\pi\rho c^2 \int_0^T fg dt,$$

ибо

$$\int_0^T \dot{\omega} dt = \left| \omega \right|_0^T = 0$$

вследствие периодичности функции ω . Далее мы имеем

$$f = (v_0 + m)\cos\beta + n\sin\beta + \omega\bar{b},$$

$$g = -(v_0 + m)\sin\beta + n\cos\beta - \omega\bar{c},$$

$$-2fg = [(v_0 + m)^2 - n^2]\sin 2\beta - 2(v_0 + m)n\cos 2\beta +$$

$$+ 2\omega^2\bar{b}\bar{c} + 2\omega\{\bar{c}(v_0 + m) - \bar{b}n\}\cos\beta + [\bar{c}n + \bar{b}(v_0 + m)]\sin\beta\}.$$

Рассмотрим лишь такие колебания, при которых периоды вариации скоростей поступательного и вращательного движения одинаковы; случай, когда эти периоды различны, приводит, вообще говоря, к более сложным формулам; вычисление наше преследует главным образом ту цель, чтобы отыскать величину добавочного момента, зависящего от колебательного характера движения крыла, хотя бы в простейшем случае, и показать, что она не обращается в нуль. Будем рассматривать лишь гармонические колебания. Выбирая соответственным образом начало счета времени, мы можем положить

$$\beta = \beta_0 + A \sin \lambda t, \quad m = \mu_1 \cos \lambda t + \mu \sin \lambda t, \quad n = \nu_1 \cos \lambda t + \nu \sin \lambda t.$$

Для определения искомой величины нам необходимо вычислить два

основных интеграла:

$$L = \int_0^T \sin 2\beta \, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \sin(2\beta_0 + 2A \sin \sigma) \, d\sigma$$

II

$$L_1 = \int_0^T \cos 2\beta \, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \cos(2\beta_0 + 2A \sin \sigma) \, d\sigma,$$

которые в свою очередь выражаются через интегралы

$$K = \int_0^{2\pi} \cos(2A \sin \sigma) \, d\sigma, \quad K_1 = \int_0^{2\pi} \sin(2A \sin \sigma) \, d\sigma.$$

Последний интеграл обращается в нуль, так как в точках σ и $2\pi - \sigma$ подынтегральная функция имеет равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения. Что касается K , то, как известно из анализа,

$$K = 2\pi J_0(2A),$$

где $J_0(2A)$ — функция Бесселя нулевого порядка — выражается рядом

$$J_0(2A) = 1 - \frac{A^2}{1^2} + \frac{A^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{A^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

Воспользовавшись сказанным, имеем для искомых основных интегралов выражения

$$L = \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\beta_0 J_0(2A) = T \sin 2\beta_0 J_0(2A),$$

$$L_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\beta_0 J_0(2A) = T \cos 2\beta_0 J_0(2A).$$

Продифференцировав L и L_1 по A , найдем далее

$$2L_2 = \frac{dL}{dA} = -\frac{2}{\lambda} \int_0^{2\pi} \cos(2\beta_0 + 2A \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = 2 \int_0^T \cos 2\beta \sin \lambda t \, dt,$$

$$-2L_3 = \frac{dL_1}{dA} = -\frac{2}{\lambda} \int_0^{2\pi} \sin(2\beta_0 + 2A \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = -2 \int_0^T \sin 2\beta \sin \lambda t \, dt.$$

Принимая во внимание выражения L и L_1 , имеем отсюда

$$L_2 = \int_0^T \cos 2\beta \sin \lambda t \, dt = T \sin 2\beta_0 J'_0(2A) = -T \sin 2\beta_0 J_1(2A),$$

$$L_3 = \int_0^T \sin 2\beta \sin \lambda t \, dt = -T \cos 2\beta_0 J'_0(2A) = T \cos 2\beta_0 J_1(2A),$$

причем

$$J_1(2A) = A \left(1 - \frac{A^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right).$$

Легко убедиться, что интегралы

$$L_4 = \int_0^T \cos 2\beta \cos \lambda t \, dt, \quad L_5 = \int_0^T \sin 2\beta \cos \lambda t \, dt$$

суть нули, ибо

$$L_4 = \left| \frac{\sin(2\beta_0 + 2A \sin \lambda t)}{2A\lambda} \right|_0^T = 0,$$

$$L_5 = - \left| \frac{\cos(2\beta_0 + 2A \sin \lambda t)}{2A\lambda} \right|_0^T = 0.$$

Далее в выражении среднего вращающего момента мы встречаем интегралы

$$L_6 = \int_0^T \sin 2\beta \cos^2 \lambda t \, dt, \quad L_7 = \int_0^T \cos 2\beta \sin \lambda t \cos \lambda t \, dt,$$

$$L_8 = \int_0^T \cos 2\beta \cos^2 \lambda t \, dt, \quad L_9 = \int_0^T \sin 2\beta \sin \lambda t \cos \lambda t \, dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$L_6 = -\frac{L_2}{2A} = \frac{T \sin 2\beta_0}{2A} J_1(2A), \quad L_8 = -\frac{L_3}{2A} = -\frac{T \cos 2\beta_0}{2A} J_1(2A),$$

$$L_7 = L_9 = 0.$$

Наконец, заменяя 2β через β в L_6 и L_8 , получим

$$L_{10} = \int_0^T \sin \beta \cos^2 \lambda t \, dt = \frac{T}{A} \cos \beta_0 J_1(A),$$

$$L_{11} = \int_0^T \cos \beta \cos^2 \lambda t \, dt = \frac{T}{A} \sin \beta_0 J_1(A),$$

$$L_{12} = \int_0^T \sin \beta \sin \lambda t \cos \lambda t \, dt = \int_0^T \cos \beta \sin \lambda t \cos \lambda t \, dt = L_{13} = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\int_0^T \cos^2 \lambda t \, dt = \frac{T}{2}.$$

Воспользовавшись найденными величинами интегралов, мы находим после простых приведений следующую формулу для среднего момента:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\pi \rho c^2}{2} \left\{ [v_0^2 + \mu^2 - v^2] \sin 2\beta_0 - 2\mu v \cos 2\beta_0 \right\} J_0(2A) + \\ & + \left[2v_0 (v \sin 2\beta_0 - \mu \cos 2\beta_0) + \frac{\mu_1^2 + v^2 - \mu^2 - v_1^2}{2A} \sin 2\beta_0 - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_1 v_1 - \mu v}{A} \cos 2\beta_0 \right] J_1(2A) + \\ & + 2[(\bar{c}v_1 + \bar{b}\mu_1) \cos \beta_0 + (\bar{b}v_1 - \bar{c}\mu_1) \sin \beta_0] \lambda J_1(A) + A^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \lambda^2 \}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{b}$, $\bar{c}$ — по-прежнему координаты центра вращения крыла. При отсутствии вращения отпадают последняя строка и члены с первой степенью скорости v_0 , так как J_1 включает множителем обращающееся при таких условиях в нуль количество A , амплитуду колебания угла атаки; при этом

$$J_0(2A) = \frac{J_1(2A)}{A} = 1,$$

и мы получим

$$\bar{M} = \frac{\pi \rho c^2}{2} \left\{ \left(v_0^2 + \frac{\mu_1^2 + \mu^2 - v_1^2 - v^2}{2} \right) \sin 2\beta_0 - (\mu v + \mu_1 v_1) \cos 2\beta_0 \right\}.$$

Еще больше упрощается формула в случае отсутствия поступательных колебаний крыла; тогда она приводится к

$$\bar{M} = \frac{\pi \rho c^2}{2} \{ v_0^2 \sin 2\beta_0 J_0(2A) + A^2 \lambda^2 \bar{b}^2 \bar{c}^2 \};$$

при этом следует иметь в виду, что J_0 мало отличается от единицы, так как величина A , амплитуда колебания угла, вообще невелика в обычных случаях. Наконец, при нормальном режиме $A = 0$, и мы получаем для такого случая средний вращающий момент

$$\bar{M} = \bar{M}_0 = \frac{\pi \rho c^2}{2} v_0^2 \sin 2\beta_0,$$

совпадающий с постоянной во все время движения величиной момента

Отметим еще особый случай движения крыла, близкий к тому, который имеет место при петлении самолета. В отличие от предшествующего случая здесь мы имеем вращение все время в одном и том же направлении, и потому, останавливаясь на простейшем предположении, примем

$$\beta = \lambda t.$$

Все вычисления становятся совершенно элементарными; поэтому я не считаю нужным их здесь приводить и дам лишь окончательную формулу средней величины момента; она такова:

$$\bar{M} = \frac{\pi \rho c^2}{2} (\mu - v_1 + 2\lambda \bar{c}) (\mu_1 + v + 2\lambda \bar{b}),$$

если мы предположим, как это имеет место при петлях, период поступательных колебаний равным периоду полного поворота крыла.

§ 7. Крыло, опирающееся на дужку окружности. Обратимся к рассмотрению другой основной дужки, когда крыло представляет часть поверхности бесконечного кругового цилиндра, ограниченную двумя его образующими; сечение такого крыла, следовательно, имеет вид дуги окружно-

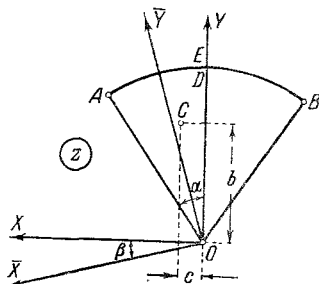


Рис. 6

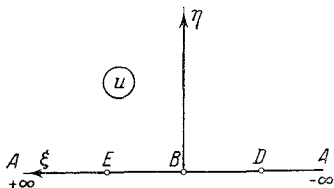


Рис. 7

сти (рис. 6). Назовем через a радиус, через 2α — центральный угол дуги; в точке C с координатами c, b находится центр вращения. За ось OY принимаем средний радиус и за начало координат — центр дуги. Ось $O\bar{X}$ неизменно направлена в пространстве и наклонена к оси OX под переменным углом β .

При нормальном режиме дуга движется с постоянной скоростью v_0 по направлению оси $O\bar{X}$. Ее переменное движение характеризуется поступательными скоростями

$$\begin{aligned} f &= (v_0 + m) \cos \beta + n \sin \beta + \omega b, \\ g &= -(v_0 + m) \sin \beta + n \cos \beta - \omega c \end{aligned} \quad (44)$$

соответственно по осям OX и OY и вращением с угловой скоростью ω около начала координат; m, n и ω суть функции времени, причем

$$\omega = \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}.$$

Ускорения начала координат по осям OX и OY суть

$$h = \dot{f} - \omega g, \quad k = \dot{g} + \omega f. \quad (45)$$

Если воздух находится в движении со скоростью $v_1 + m_1$ в направлении, противоположном оси $O\bar{X}$, и со скоростью n_1 против оси $O\bar{Y}$, то во всех последующих формулах, учитывая относительную скорость воздуха, придется заменить f и g соответственно через $f + f_1$ и $g + g_1$, оставив без изменения формулы (45), определяющие абсолютное ускорение

подвижного начала; как было указано в § 1, при этом

$$\begin{aligned} f_1 &= (v_1 + m_1) \cos \beta + n_1 \sin \beta, \\ g_1 &= -(v_1 + m_1) \sin \beta + n_1 \cos \beta. \end{aligned} \quad (46)$$

Область течения изображаем на полуплоскости u (рис. 7), положив

$$\begin{aligned} z = x + iy &= iae^{-\alpha i} \frac{u + ie^{\alpha i/2}}{u - ie^{-\alpha i/2}} \cdot \frac{u - ie^{\alpha i/2}}{u + ie^{-\alpha i/2}} = iae^{-\alpha i} \frac{u^2 + e^{\alpha i}}{u^2 + e^{-\alpha i}}, \\ \frac{dz}{du} &= 4ae^{-\alpha i} \frac{u \sin \alpha}{(u - ie^{-\alpha i/2})^2 (u + ie^{-\alpha i/2})^2} = 4ae^{-\alpha i} \frac{u \sin \alpha}{(u^2 + e^{-\alpha i})^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Концам дуги в плоскости u соответствуют точки $u = 0$ и $u = \infty$, первая — заднему, вторая — переднему концу; $u = 1$ определяет среднюю точку верхней поверхности крыла, $u = -1$ дает середину нижней. При вещественных значениях u числители и знаменатели дробей, входящих в состав выражения z в формуле (48), представляют собой сопряженные комплексные количества; таким образом, модули этих дробей будут равны единице, и, следовательно, модуль z для таких значений вспомогательного переменного сохраняет постоянную величину a ; а потому в области z соответствующие точки расположатся на дуге окружности радиуса a . Полюс в области u находится в точке

$$u = ie^{-\alpha i/2},$$

так как тогда $z = \infty$.

Чтобы придать выражению z типическую форму, указанную в наших общих рассуждениях, достаточно переместить на действительной оси u начало в точку $u = \sin \frac{\alpha}{2}$ и изменить масштаб; ввиду этого полагаем

$$u - \sin \frac{\alpha}{2} = \bar{u} \cos \frac{\alpha}{2};$$

тогда

$$\begin{aligned} u - ie^{-\alpha i/2} &= \cos \frac{\alpha}{2} (\bar{u} - i), \quad u + ie^{\alpha i/2} = \cos \frac{\alpha}{2} (\bar{u} + i), \\ u + ie^{-\alpha i/2} &= \cos \frac{\alpha}{2} \left(\bar{u} + i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \quad u - ie^{\alpha i/2} = \cos \frac{\alpha}{2} \left(\bar{u} - i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Такое преобразование дает новую формулу

$$z = iae^{-\alpha i} \frac{\bar{u} + 1}{\bar{u} - 1} \cdot \frac{\bar{u} - i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\bar{u} + i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

или

$$z = iae^{-\alpha i} + 2iae^{-\alpha i/2} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\bar{u} - i} - \frac{1}{\bar{u} + i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Перенеся затем в плоскости z начало координат в точку A , т. е. передний край дужки, и повернув оси на угол $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ по часовой стрелке, мы новое z , которое обозначим через $\bar{z}$, выразим через старое формулой

$$\bar{z} = (z - ia e^{-\alpha i}) e^{-i(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})}$$

и получим

$$\bar{z} = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{\bar{u} - i} - \frac{1}{\bar{u} + i + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right].$$

В дальнейшем изложении будем пользоваться формулами (47) как соответствующими более простому расположению осей по отношению к исследуемой дужке. Для простоты письма введем вспомогательные обозначения, положив

$$ie^{-\alpha i/2} = \delta, \quad -ie^{\alpha i/2} = \delta_1, \quad \delta \delta_1 = 1;$$

δ и δ_1 , очевидно, представляют собой сопряженные комплексные числа. Таким образом, переписываем формулы (47) в виде

$$z = -ia\delta^2 \frac{u - \delta_1}{u - \delta} \frac{u + \delta_1}{u + \delta} = -ia\delta^2 \frac{u^2 - \delta_1^2}{u^2 - \delta^2},$$

$$\frac{dz}{du} = -4a \sin \alpha \delta^2 \frac{u}{(u - \delta)^2 (u + \delta)^2} = -4a \sin \alpha \delta^2 \frac{u}{(u^2 - \delta^2)^2} \quad (48)$$

или, наконец,

$$z = -ia\delta^2 + a\delta \sin \alpha \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u + \delta} \right).$$

Затем имеем

$$z_1 = ia\delta_1^2 + a\delta_1 \sin \alpha \left(\frac{1}{u - \delta_1} - \frac{1}{u + \delta_1} \right). \quad (49)$$

На дуге имеем

$$z \dot{z}_1 = a^2.$$

Составляем выражение функции течения

$$w = \varphi + i\psi.$$

Ее производная будет определяться соотношением

$$\frac{1}{a \sin \alpha} \frac{dw}{du} = \delta \frac{f - ig}{(u - \delta)^2} + \delta_1 \frac{f + ig}{(u - \delta_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u - \delta_1} \right), \quad (50)$$

а самую функцию отсюда находим путем интегрирования; она будет такова:

$$w = -a\delta \sin \alpha \frac{f - ig}{u - \delta} - a\delta_1 \sin \alpha \frac{f + ig}{u - \delta_1} + iCa \sin \alpha \ln \frac{u - \delta}{u - \delta_1} - i\omega \frac{a^2}{2};$$

последний, зависящий от a член добавлен по той причине, что на дуге мы должны иметь

$$\psi + \omega \frac{zz_1}{2} = \psi + \omega \frac{a^2}{2} = \text{const};$$

это постоянное мы можем выбрать произвольно и принимаем его равным нулю.

В удаленных точках области течения имеем при указанном виде функции w

$$\begin{aligned} \lim \frac{w}{z} &= \frac{dw}{dz} = -f + ig = \\ &= -(v_0 + m - ni)e^{i\beta} - \omega(b + ic), \end{aligned}$$

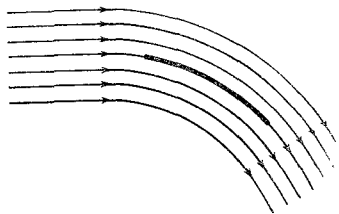


Рис. 8

как и должно быть ввиду формулы (44), ибо здесь относительная скорость воздуха равна по абсолютному значению и противоположна по направлению скорости центра дуги, принятого за подвижное начало координат.

При наличии ветра, как сказано было выше, надлежит f и g соответственно заменить через $f + f_1$ и $g + g_1$, воспользовавшись для добавочных слагаемых формулами (46).

Циркуляция скорости I определяется формулой

$$I = 2\pi a C \sin \alpha;$$

постоянному C мы дадим то значение, которое соответствует при нормальном режиме предположению, что воздух стекает с дужки на ее заднем конце (рис. 8). Таким образом, при $m = n = 0$, $\omega = 0$ мы должны иметь $\frac{dw}{du} = 0$ при $u = 0$. Отсюда

$$C = \frac{v_0 \sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$I = 4\pi a v_0 \sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \pi l v_0 \frac{\sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (51)$$

если через l обозначим длину хорды.

Будем, как было предположено в общем рассуждении, рассматривать лишь такие колебательные движения крыла, при которых циркуляция остается неизменной, и в этом предположении вычислим равнодействующую давлений по формуле (15). Для указанной цели составляем

выражения

$$j = \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1, \quad j_1 = \int z_1 dw, \quad j_2 = \int \frac{dw}{dz} dw,$$

воспользовавшись при этом соотношениями (49) и (50). Легко находим

$$j = -\delta_1 a^2 \sin^2 \alpha \int \left(\delta \frac{j - i\dot{g}}{u - \delta} + \delta_1 \frac{j + i\dot{g}}{u - \delta_1} + i\dot{w} \frac{a}{2} \right) \left\{ \frac{1}{(u + \delta_1)^2} - \frac{1}{(u - \delta_1)^2} \right\} du.$$

Полюсы подынтегральной функции в верхней полуплоскости u находятся в точках

$$u = \delta = ie^{-\frac{\alpha i}{2}}; \quad u = -\delta_1 = ie^{\frac{\alpha i}{2}}.$$

Составим N и N_1 — интегральные вычеты в этих точках. Первый из них получается умножением коэффициента $\frac{1}{u - \delta}$ на результат подстановки δ на место u в витые скобки и будет таков:

$$N = -a^2 \sin^2 \alpha (j - i\dot{g}) \left\{ \frac{1}{(\delta + \delta_1)^2} - \frac{1}{(\delta - \delta_1)^2} \right\}.$$

Для нахождения N_1 , положив $u + \delta_1 = \varepsilon$, имеем

$$\frac{1}{u - \delta} = -\frac{1}{\delta + \delta_1 - \varepsilon} = -\frac{1}{\delta + \delta_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta + \delta_1} + \dots \right),$$

$$\frac{1}{u - \delta_1} = \frac{1}{2\delta_1 - \varepsilon} = -\frac{1}{2\delta_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\delta_1} + \dots \right);$$

воспользовавшись этими разложениями, получим

$$N_1 = \delta_1 a^2 \sin^2 \alpha \left\{ \delta \frac{j - i\dot{g}}{(\delta + \delta_1)^2} + \delta_1 \frac{j + i\dot{g}}{4\delta_1^2} \right\}$$

и затем

$$\begin{aligned} N + N_1 &= a^2 \sin^2 \alpha \left\{ \frac{j - i\dot{g}}{(\delta - \delta_1)^2} + \frac{j + i\dot{g}}{4} \right\} = \\ &= a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ (j + i\dot{g}) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - j + i\dot{g} \right\} = \\ &= -a^2 j \sin^4 \frac{\alpha}{2} + ia^2 \dot{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right); \end{aligned}$$

$$j = -2\pi i (N + N_1) = 2\pi ia^2 j \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 2\pi a^2 \dot{g} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Переходим к вычислению j_1 . Подстановка значений z_1 и w в формулу для j_1 дает

$$\begin{aligned} j_1 = \int z_1 dw &= a^2 \delta_1 \sin^2 \alpha \int \left(\frac{i\delta_1}{\sin \alpha} + \frac{1}{u - \delta_1} - \frac{1}{u + \delta_1} \right) \times \\ &\times \left\{ \delta \frac{j - i\dot{g}}{(u - \delta)^2} + \delta_1 \frac{j + i\dot{g}}{(u - \delta_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u - \delta_1} \right) \right\} du. \end{aligned}$$

Первый множитель под знаком интеграла имеет простой полюс в точке $u = -\delta_1$; назовем соответственный интегральный вычет через N' ; он равен, очевидно, взятому со знаком минус произведению коэффициента, стоящего перед знаком интеграла, на результат подстановки $-\delta_1$ на место u в вите скобки. Таким образом, находим

$$N' = -a^2 \delta_1 \sin^2 \alpha \left\{ \delta \frac{f - ig}{(\delta_1 + \delta)^2} + \frac{f + ig}{4\delta_1} + iC \left(\frac{1}{2\delta_1} - \frac{1}{\delta + \delta_1} \right) \right\}.$$

Интегральный вычет N'_1 , соответствующий полюсу $u = \delta$, состоит из суммы двух слагаемых: одно из них представляет собою произведение $iCa^2 \delta_1 \sin^2 \alpha$ на результат подстановки в первый из множителей, входящих в состав подынтегральной функции, значения δ на место u ; второе слагаемое получится, если мы разложим указанный множитель по степеням $u - \delta$ и коэффициент при первой степени этого разложения умножим на $\delta_1 a^2 \sin^2 \alpha \delta (f - ig)$. Упомянутое разложение имеет вид

$$\frac{i\delta_1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\delta - \delta_1} - \frac{1}{\delta + \delta_1} - \frac{u - \delta}{(\delta - \delta_1)^2} + \frac{u - \delta}{(\delta + \delta_1)^2};$$

принимая во внимание вышесказанное, получим

$$N'_1 = a^2 \delta_1 \sin^2 \alpha \left(\frac{i\delta_1}{\sin \alpha} + \frac{2\delta_1}{\delta^2 - \delta_1^2} \right) iC + a^2 \sin^2 \alpha (f - ig) \left\{ \frac{1}{(\delta + \delta_1)^2} - \frac{1}{(\delta - \delta_1)^2} \right\}.$$

Подставив в N' и N'_1 значения $\delta = ie^{-\frac{iz}{2}}$, $\delta_1 = -ie^{\frac{iz}{2}}$, заметим, что первый член в выражении N'_1 есть нуль; затем, по приведении, получим

$$\begin{aligned} N' + N'_1 &= -a^2 \sin^2 \alpha \left\{ \frac{f - ig}{(\delta - \delta_1)^2} + \frac{f + ig}{4} \right\} + a^2 C \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ f \sin^2 \frac{\alpha}{2} - ig \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right\} + a^2 C \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} j_1 &= -2\pi i (N' + N'_1) = \\ &= -2\pi i a^2 f \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 2\pi a^2 g \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2\pi i a^2 C \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Обратимся, наконец, к вычислению

$$j_2 = \int \frac{dw}{dz} dw = \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{du}{dz} du;$$

воспользовавшись формулами (48) и (50), имеем

$$j_2 = -\frac{a \sin \alpha}{4\delta^2} \int \left\{ \delta \frac{f - ig}{(u - \delta)^2} + \delta_1 \frac{f + ig}{(u - \delta_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u - \delta_1} \right) \right\}^2 \frac{(u^2 - \delta^2)^2}{u} du.$$

Вычисление этого интеграла представляет некоторые особенности, о которых приходится поговорить подробнее. Так как контуру дужки соответствует действительная ось в области вспомогательного переменного u ,

то интеграл надлежит взять в пределах $-\infty$ и $+\infty$. Мы не можем присоединить к пути интегриации полуокружность весьма большого радиуса, ибо интеграл по такой окружности не будет нулем. Чтобы обойти отмеченные затруднения, поступим следующим образом: рассмотрим вместо потока, обтекающего интересующую нас дужку, поток, устремляющийся на дужку, которая характеризуется функцией z , определяемой соотношением

$$\frac{dz}{du} = -4a \sin \alpha \delta^2 \frac{(u + i\varepsilon)(u + s + i\eta)}{s(u - \delta)^2(u + \delta + k)^2}.$$

Коэффициент k следует определить так, чтобы функция z имела в точке $u = \delta$ простой полюс; а для этого в разложении dz/du должен отсутствовать член $\frac{1}{u - \delta}$. Мы выполним это условие, если потребуем обращения в нуль производной от $(u - \delta)^2 \frac{dz}{du}$ при $u = \delta$. Таким образом, находим для определения k равенство

$$\frac{1}{\delta + i\varepsilon} + \frac{1}{\delta + s + i\eta} - \frac{2}{2\delta + k} = 0$$

и затем получаем для z выражение

$$z = \frac{4a \sin \alpha \delta^2}{s(2\delta + k)^2} \left\{ \frac{(\delta + i\varepsilon)(\delta + s + i\eta)}{u - \delta} + \frac{(\delta + k - i\varepsilon)(\delta + k - s - i\eta)}{u + \delta + k} \right\} + \text{const.}$$

Если мы положим в этой формуле $\varepsilon = \eta = 0$, $s = \infty$, то придем к случаю, рассматриваемому в нашей задаче, так как тогда новая формула для производной z совпадает с выше приводившейся второй формулой группы (48). Особые точки z , как видно из приведенной формулы, определяются значениями $u = -i\varepsilon$, $u = -s - i\varepsilon$ и лежат в нижней полуплоскости u . При малых положительных значениях ε , η и при весьма значительном реальном s новая формула z определяет тонкую дужку с изогнутыми передним и задним концами.

Разлагая dz/du на элементарные дроби, высчитываем коэффициент при $(u - \delta)^{-2}$ этого разложения. Он равен пределу произведения $\frac{dz}{du} (u - \delta)^2$ при $u \rightarrow \delta$, и, следовательно,

$$\frac{dz}{du} = -\frac{4\delta^2 a}{(2\delta + k)^2} \sin \alpha \frac{(\delta + i\varepsilon)(\delta + s + i\eta)}{s(u - \delta)^2} + \dots$$

Зная этот коэффициент, определяем производную от функции течения w ; для нахождения ее достаточно принять во внимание, что

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \delta \\ z \rightarrow \infty}} \frac{dw}{dz} = -i + i\eta$$

и что при реальном u искомая функция должна быть реальна; она, кроме того, всюду на верхней полуплоскости, кроме полюса $u = \delta$, конечна и

непрерывна. Все приведенные соображения в совокупности достаточны для определения указанной функции, и мы легко убеждаемся, что она должна удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{a \sin \alpha} \frac{dw}{du} = 4\delta^2 \frac{(\delta + i\varepsilon)(\delta + s + i\eta)}{s(2\delta + k)^2} \frac{f - ig}{(u - \delta)^2} + \\ + 4\delta_1^2 \frac{(\delta_1 - i\varepsilon)(\delta_1 + s - ig)}{s(2\delta_1 + k_1)^2} \frac{f + ig}{(u - \delta_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u - \delta} + \frac{1}{u - \delta_1} \right).$$

Соответствующая принятым для $\frac{dz}{du}$ и $\frac{dw}{du}$ значениям величина интеграла j_2 будет такова:

$$j_2 = -\frac{a \sin \alpha}{4\delta^2} \int \left\{ 4\delta^2 \frac{(\delta + i\varepsilon)(\delta + s + i\eta)}{s(2\delta + k)^2} \frac{f - ig}{(u - \delta)^2} + 4\delta_1^2 \frac{(\delta_1 - i\varepsilon)(\delta_1 + s - ig)}{s(2\delta_1 + k_1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{f + ig}{(u - \delta_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u - \delta_1} \right) \right\}^2 \frac{(u - \delta)^2 (u + \delta + k)^2 s}{(u + i\varepsilon)(u + s + i\eta)} du.$$

Путь интегриации представляет собой и в этом случае полное протяжение действительной оси в области u . Теперь мы имеем полную возможность присоединить к этому пути также и полуокружность, охватывающую верхнюю полуплоскость области u , т. е. ту полуплоскость, на которую мы отображаем исследуемое течение. Интеграл по этой полуокружности от нашей функции есть нуль.

Таким образом, мы приходим к интегралу по замкнутому контуру, во всех точках которого подынтегральная функция конечна и непрерывна. Так как единственный полюс ее совпадает с точкой $u = \delta$, то отыскание j_2 сводится к определению интегрального вычета, соответствующего указанному полюсу. Обозначив $u - \delta$ через λ , легко убеждаемся, что множитель подынтегральной функции, находящийся вне витых скобок, в соседстве с полюсом может быть представлен в виде

$$\frac{\lambda^2 (2\delta + k)^2 s}{(\delta + i\varepsilon)(\delta + s + i\eta)} [1 + A\lambda^2 + \dots]. \quad (52)$$

Член с первой степенью λ отсутствует в квадратных скобках ввиду условия, наложенного на выборы коэффициента k . Из приведенных соображений вытекает, что единственный член подынтегральной функции, заключающий в себе λ в степени -1 , получится в результате умножения выражения (52) на удвоенное произведение первого и третьего слагаемых витых скобок. Таким образом, получаем для искомого интегрального вычета N_2 выражение

$$N_2 = -2iCa \sin \alpha \cdot (f - ig),$$

так как все прочие множители взаимно сокращаются, а затем для величины интеграла j_2 находим простую формулу

$$j_2 = -2\pi i N_2 = -4\pi Ca \sin \alpha \cdot (f - ig).$$

Определенная таким образом величина не зависит от коэффициентов ε , η , s , и, следовательно, если мы им дадим приведенные значения, соответствующие интересующей нас дужке окружности, мы будем иметь то же самое значение для j_2 . Заметим, что мы сразу получили бы эту величину j_2 из первоначального его выражения, если бы вычислили интеграл, не обращая внимания на полюс $u = 0$.

Подставив найденные величины j , j_1 и j_2 в формулу (15), получим окончательно для определения компонентов равнодействующей сил давления X и Y по подвижным осям и для проекций ее $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ на неподвижные оси следующее соотношение:

$$(\bar{Y} + i\bar{X})e^{i\beta} = Y + iX = -2\pi a^2 \rho \sin^4 \frac{\alpha}{2} (j - \omega i f) - \\ - 2\pi a^2 \rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) (\dot{g} - \omega i g) + I \rho \left(f - i g - a \omega \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right); \quad (53)$$

два последних члена формулы (15) отпадут, так как площадь кривой $q = 0$; в формуле (53) I есть циркуляция скорости вокруг крыла и имеет постоянную величину

$$I = 2\pi C a \sin \alpha = 4\pi a v_0 \sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2} = \pi b v_0 \frac{\sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

как это было показано выше (см. формулу (51)).

Воспользовавшись формулами (2), имеем

$$(f - i g) e^{-i\beta} = v_0 + m - n i + \omega (b \cos \beta + c \sin \beta) + \\ + i \omega (c \cos \beta - b \sin \beta) = v_0 + m + \omega B - i (n - \omega A),$$

если через A и B обозначим в рассматриваемый момент времени координаты центра вращения по неизменно направленным осям. Назвав через F и G компоненты скорости середины стрелки крыла по неподвижным осям, получим

$$(\bar{f} - i g) e^{-i\beta} = F - i G, \quad \bar{f} = f - \omega a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Приняв в соображение эти соотношения, убеждаемся, что последний член формулы (53) определяет перпендикулярную к направлению скорости крыла силу, которую мы получили бы, применив к данному случаю правило Н. Е. Жуковского, как если бы движение крыла представляло простой неизменный полет со скоростями F и G по направлению неподвижных осей. Остальные члены возникают благодаря ускорениям и вращению крыла.

Составим для данного случая величину средней поддерживающей силы за период колебания, как мы сделали это выше для дужки, ограниченной эллипсом; как и в предшествующем параграфе, будем иметь для

проекций K и L среднего значения равнодействующей формулу

$$T(L + iK) = \int_0^T (\bar{Y} + i\bar{X}) dt.$$

Подставляя сюда подынтегральную функцию из формулы (53) и приняв во внимание равенства

$$\omega = \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt},$$

$$(f - \omega if) e^{-i\beta} = \frac{d}{dt} f e^{-i\beta}, \quad (\dot{g} - \omega ig) e^{-i\beta} = \frac{d}{dt} g e^{-i\beta},$$

$$(f - ig) e^{-i\beta} = v_0 + m - ni + (b + ic) \omega e^{-i\beta} = v_0 + m - ni + i(b + ic) \frac{d}{dt} e^{-i\beta},$$

причем

$$i\omega e^{-i\beta} = -\frac{d}{dt} e^{-i\beta},$$

легко убеждаемся, что

$$L + iK = I\rho v_0,$$

т. е. что средняя сила при неизменной циркуляции определяется и в этом случае ее величиной при нормальном режиме. Колебательное движение неизменного крыла рассматриваемого дополнительного импульса не вводит.

Обратимся к вычислению вращающего момента M . Для этого применяем формулу (21), которая в нашем случае приводится к следующему виду:

$$S = -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} z dz_1 - \rho i\omega \int z z_1 dw - \frac{\rho}{2} \int z^2 \frac{dw}{dz} dw.$$

Вычислив S , получим $M = \text{Re } S$. Так как $z z_1 = a^2$, то

$$\int z z_1 dw = a^2 \int dw = a^2 I = 2\pi a^3 C \sin \alpha,$$

и нам надлежит определить лишь интегралы

$$H = \int \frac{\partial w}{\partial t} z dz_1, \quad H_1 = \int z \frac{dw}{dz} dw.$$

При помощи равенств (48) и (50) имеем

$$z dz_1 = 4a^2 i \sin \alpha \frac{u du}{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \delta_1^2)},$$

$$H = -4a^3 i \sin^2 \alpha \int \left(\delta \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{u - \delta} + \delta_1 \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{u - \delta_1} + \frac{i\dot{\omega} a}{2 \sin \alpha} \right) \frac{u du}{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \delta_1^2)}.$$

Составим интегральные вычеты Q и Q_1 в полюсах $u = \delta$ и $u = \delta_1$. Вычет Q_1 получим, если, умножив подынтегральную функцию на

$$-4a^3 i \sin^2 \alpha \cdot (u + \delta_1),$$

положим затем в полученном произведении $u = -\delta_1$; таким образом,

$$Q_1 = \frac{2a^3 i \sin^2 \alpha}{\delta^2 - \delta_1^2} \left(i\omega \frac{a}{2} - \delta \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{\delta + \delta_1} - \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{2} \right).$$

Что касается Q , то для вычисления этого количества разложим дробь

$$\frac{u}{(u + \delta)(u^2 - \delta_1^2)}$$

по степеням $\varepsilon = u - \delta$, сохраняя постоянный член и первую степень ε ; получим

$$\frac{u}{(u + \delta)(u^2 - \delta_1^2)} = \frac{1}{2(\delta^2 - \delta_1^2)} - \frac{\varepsilon(\delta_1^2 + 3\delta^2)}{4\delta(\delta^2 - \delta_1^2)^2}.$$

Подынтегральная функция изобразится в виде произведения этого выражения на следующее:

$$\delta \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{\varepsilon^2} + \frac{\delta_1}{\varepsilon} \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{\delta - \delta_1} + i\omega \frac{a}{2\varepsilon}.$$

Составив коэффициент при $1/\varepsilon$ в указанном произведении и умножив его на стоящий перед интегралом множитель $-4a^3 i \sin^2 \alpha$, мы получим интегральный вычет. Он будет таков:

$$Q = -\frac{2a^3 i \sin^2 \alpha}{\delta^2 - \delta_1^2} \left(i\omega \frac{a}{2} + \delta_1 \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{\delta - \delta_1} - \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{2} \frac{\delta_1^2 + 3\delta^2}{\delta^2 - \delta_1^2} \right).$$

Затем, составляя сумму вычетов, после весьма простых приведений получим

$$H = -2\pi i (Q + Q_1) = \frac{2\pi a^3 \sin^2 \alpha}{(\delta - \delta_1)^2} (-2i\dot{g}) = -\frac{4\pi a^3 \dot{g} i \sin^2 \alpha}{(\delta - \delta_1)^2}.$$

Подставив сюда значения

$$\delta = ie^{-\frac{i\alpha}{2}}, \quad \delta_1 = -ie^{\frac{i\alpha}{2}},$$

находим окончательно

$$H = 4\pi a^3 \dot{g} i \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Составим теперь выражение

$$H_1 = \int z \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du = \frac{a^2 \sin \alpha}{4} i \int \left\{ \delta \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{(u - \delta)^2} + \delta_1 \frac{\dot{f} + i\dot{g}}{(u - \delta_1)^2} + \right. \\ \left. + iC \left(\frac{1}{u - \delta} - \frac{1}{u - \delta_1} \right) \right\}^2 \frac{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \delta_1^2)}{u} du.$$

Для вычисления этого интеграла нужно повторить рассуждение, примененное нами при рассмотрении аналогичного интеграла, который мы встретили при изыскании равнодействующей. Как и в том случае, присутствие полюса $u = 0$ мы можем не принимать во внимание и сосредоточиться лишь на интегральных вычетах прочих полюсов, на этот раз лишь единственного полюса. Множитель, находящийся в подынтегральной функции вне витых скобок, может быть разложен по степеням $u - \delta = \varepsilon$ в следующем виде:

$$2\varepsilon(\delta^2 - \delta_1^2) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\delta} \frac{3\delta^2 + \delta_1^2}{\delta^2 - \delta_1^2} + \frac{\varepsilon^2}{2\delta^2} + \dots \right).$$

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta \frac{f-ig}{(u-\delta)^2} + iC \left(\frac{1}{u-\delta} - \frac{1}{u-\delta_1} \right) + \delta_1 \frac{f+ig}{(u-\delta_1)^2} \right\}^2 = \\ & = \left\{ \delta \frac{f-ig}{\varepsilon^2} + \frac{iC}{\varepsilon} - \frac{iC}{\delta-\delta_1} + \delta_1 \frac{f+ig}{(\delta-\delta_1)^2} + \dots \right\}^2 = \\ & = \frac{\delta^2 (f-ig)^2}{\varepsilon^4} + 2iC\delta \frac{f-ig}{\varepsilon^3} + 2\delta \frac{f-ig}{\varepsilon^2} \left[\delta_1 \frac{f+ig}{(\delta-\delta_1)^2} - \frac{iC}{\delta-\delta_1} \right] - \frac{C^2}{\varepsilon^2} + \dots \end{aligned}$$

При помощи этих разложений находим интегральный вычет K интеграла H_1 ; он будет таков:

$$\begin{aligned} K = \frac{a^2 \sin \alpha}{4} i \left\{ (\delta^2 - \delta_1^2) (f-ig)^2 + 2iC (f-ig) (3\delta^2 + \delta_1^2) + \right. \\ \left. + 4(f^2 + g^2) \frac{\delta + \delta_1}{\delta - \delta_1} - 2C^2 (\delta^2 - \delta_1^2) - 4iC\delta (f-ig) (\delta + \delta_1) \right\}. \end{aligned}$$

По подстановке значений $\delta = ie^{-\frac{i\alpha}{2}}$, $\delta_1 = -ie^{\frac{i\alpha}{2}}$ и приведении имеем окончательно

$$K = \frac{a^2 \sin \alpha}{4} \left\{ -\sin \alpha (f-ig)^2 + 4C \cos^2 \frac{\alpha}{2} (f-ig) + 2(f^2 + g^2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2C^2 \sin \alpha \right\}.$$

Сам интеграл

$$H_1 = -2\pi i K.$$

Теперь мы имеем все необходимое для вычисления вращающего момента; он будет

$$M = \operatorname{Re} S = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} H_1,$$

ибо реальная часть прочих слагаемых, входящих в состав S , есть нуль. На основании приведенного выражения H_1 имеем

$$M = -\pi \rho a^2 f g \sin^2 \alpha + 2\pi \rho C g a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad (54)$$

или

$$M = -\pi \rho a^2 f g \sin^2 \alpha + I \rho g a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Любопытно, что этот момент не зависит от ускорений.

Вычислим момент M_0 относительно середины крыла. Он выразится формулой

$$M_0 = \frac{1}{2} M_1 + aX.$$

Обозначив через f_0 слагающую скорости средней точки крыла по оси OX , имеем

$$f = f_0 + \omega a;$$

приняв во внимание это равенство и определив из соотношения (53)

$$X = -2\pi a^2 \rho f \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 2\pi a^2 \rho \omega g \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{a}{2}\right) - I \rho g,$$

мы найдем после подстановки в формулу для M_0 указанных значений и приведения

$$M_0 = -\pi \rho a^2 f_0 g \sin^2 \alpha - I \rho g a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\pi a^3 \rho (g\omega - \dot{f}) \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

Положив $a = \infty$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\lim a \sin \alpha = l$ — половине длины пластинки, в которую обращается в этом случае дуга круга, и приняв во внимание, что

$$\dot{f} = \dot{f}_0 + \dot{\omega} a,$$

мы находим

$$M_0 = -\pi \rho l^2 f_0 g - \frac{\pi \rho l^4}{8} \dot{\omega},$$

т. е. формулу, которая, как легко усмотреть, для этого случая совпадает с ранее полученным для такого же предположения результатом, выведенным в предшествующем параграфе для пластинки как предельной формы весьма тонкого эллипса.

Вычислим еще вращающий момент сил давления по отношению к центру вращения крыла. Так как координаты этого центра по отношению к принятым нами осям суть c и b , то искомый момент M_1 связан с моментом M формулой

$$M_1 = M + bX - cY.$$

Подставляя сюда значение M из формулы (54) и выражения X , Y из соотношения (53), найдем по приведении после весьма простых вычислений

$$M_1 = -\pi \rho a^2 \sin^2 \tilde{\alpha} f_0 g_0 + I \rho g_0 \left(a \cos^2 \frac{\alpha}{2} - b \right) - I \rho f_0 C + \\ + 2\pi \rho a^2 b \sin^4 \frac{\alpha}{2} (\omega g_0 - \dot{f}_0 - \dot{\omega} b) + 2\pi \rho a^2 c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) (\omega f_0 + \dot{g}_0 - \dot{\omega} c).$$

Здесь через f_0 и g_0 обозначены скорости нового центра приведения по направлениям связанных с дужкой осей OX , OY ; $\dot{f}_0$ и $\dot{g}_0$ суть производные по времени этих функций, а потому $\dot{f}_0 = \omega g_0$ и $\dot{g}_0 = \omega f_0$ выражают сла-

гающие ускорения той же точки по осям. Что касается величины $a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, то нетрудно усмотреть, что это есть величина расстояния от центра дужки крыла до середины ее стрелки, и потому $a \cos^2 \frac{\alpha}{2} - b$ равно проекции расстояния центра вращения крыла от середины его стрелки на средний радиус дужки. Наконец, через I по-прежнему мы обозначили неизменную циркуляцию скорости около крыла

$$I = 2\pi C a \sin \alpha,$$

где

$$C = v_0 \frac{\sin \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

как было указано выше.

Средняя величина вращающего момента за полный период колебания крыла определится путем вычислений того же характера, как указанные в конце § 6 для рассмотренного там случая, и выразится в бесселевых функциях от амплитуды колебания угла атаки, если этот угол колеблется по гармоническому закону; если же весь аппарат вместе с крылом находится в равномерном вращении (петлит), то мы придем к более простой формуле для искомой величины и выразим ее в простейших функциях.

§ 8. Крыло с дужкой более общего типа. Укажем теперь, как можно провести все вычисления в том случае, если мы имеем дело с крылом более сложного вида, например с крылом, опирающимся на дужку инверсии параболы или эллипса. Представим себе, что область течения отображена на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного u при помощи формулы

$$z = K \left(\frac{1}{u-i} - \frac{G^2}{u-\gamma} \right), \quad (55)$$

где K есть некоторая величина с линейным модулем,

$$\gamma = r - si, \quad G = r_1 + s_1 i;$$

при этом r , r_1 и s_1 суть вещественные числа любого знака, s непременно положительно. Действительная ось соответствует контуру дужки крыла. Выбор коэффициентов стеснен лишь некоторыми неравенствами, вытекающими из условия отсутствия корней $\frac{dz}{du}$ в верхней полуплоскости u ; это условие необходимо должно быть выполнено для однозначности конформного преобразования. Составив производную z и приравняв ее нулю, мы получим для определения корней квадратное уравнение

$$(u - \gamma)^2 - G^2 (u - i)^2 = 0,$$

откуда и получаем два корня

$$u_1 = \frac{\gamma - Gi}{1 - G}, \quad u_2 = \frac{\gamma + Gi}{1 + G};$$

требуем, чтобы коэффициенты при мнимой единице в этих выражениях были отрицательны; таким образом, приходим к следующим неравенствам:

$$s_1 (s_1 + r) - (1 - r_1) (r_1 + s) < 0, \quad s_1 (s_1 - r) + (1 + r_1) (r_1 - s) < 0.$$

Сложив наши неравенства, получим

$$s > r_1^2 + s_1^2, \quad s = r_1^2 + s_1^2 + h^2.$$

Принимая за первое условие новое неравенство, второму неравенству придаем вид

$$|r_1 (s - 1) + rs_1| < h^2,$$

или

$$|r_1 (r_1^2 + s_1^2 - 1) + rs_1| < h^2 (1 - |r_1|).$$

Если одно из указанных неравенств обратится в равенство, то один из корней $\frac{dz}{du}$ будет реальным количеством; оба корня станут реальными, если оба неравенства обратятся в равенства. Геометрически этим предположениям соответствует существование одной или двух точек заострения на дужке контура крыла.

Ясно, что наложенные на коэффициенты требования дают широкий простор для выбора их значений, и, придавая им те или иные величины, мы можем получить крылья весьма различных очертаний.

Отметим, что

1) положив $K = a + b$, $G^2 = -\frac{a-b}{a+b}$, $r = 0$, $s = 1$, мы получим крыло, имеющее в сечении эллипс с полуосями a и b ;

2) при $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, $r = -2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $s = 1$ встречаемся с крылом, опирающимся на дугу окружности с центральным углом 2α ;

3) если $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, $r = -\frac{2 \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon}$, $s = \frac{\cos \tau + \varepsilon}{\cos \tau - \varepsilon}$, то сечение крыла будет инверсией параболы; при этом один из корней уравнения $\frac{dz}{du}$ обращается в бесконечность, и, стало быть, на контуре крыла в точке, соответствующей значению $u = \infty$ вспомогательного комплексного переменного, мы будем иметь точку заострения, как и должно быть. При $\varepsilon = 0$, $\tau = \frac{\alpha}{2}$ второй корень будет также реален, и мы будем иметь на обоих концах дужки точки заострения; нетрудно усмотреть, что при таком предположении о значениях ε и τ мы возвращаемся ко второму случаю, т. е. получим опять крыло, опирающееся на дугу окружности;

4) наконец, инверсия эллипса получается при следующих значениях коэффициентов:

$$G = \frac{E}{1 - i \frac{b}{a} u_0}, \quad u_0 = \lambda + \mu i, \quad \mu > 0, \quad E^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$\gamma = \frac{u_1 - \lambda}{\mu}, \quad \left(1 - i \frac{b}{a} u_0\right) \left(1 - i \frac{b}{a} u_1\right) = E^2;$$

a и b — полуоси инвертируемого эллипса; положение центра инверсии определяется коэффициентами λ и μ . Для отыскания потока, омывающего крыло, дужка которого характеризуется конформным преобразованием (55), необходимо найти непрерывную и конечную в области течения гармоническую функцию x, y , которая на контуре дужки принимает значение $x^2 + y^2 = zz_1$. Так как

$$z = x + iy = K \left(\frac{1}{u - i} - \frac{G^2}{u - \gamma} \right),$$

$$z_1 = x - iy = K_1 \left(\frac{1}{u + i} - \frac{G_1^2}{u - \gamma_1} \right),$$

где значок единица внизу приписывается для того, чтобы отметить комплексные количества, сопряженные тем, которые обозначены той же буквой без значка, то поставленная задача сводится к отысканию всюду конечной и непрерывной на верхней полуплоскости u функции этого переменного, мнимая часть которой при u реальном совпадала бы со значением в тех же точках мнимой части функции

$$F(u) = iKK_1 \left(\frac{1}{u - i} - \frac{G^2}{u - \gamma} \right) \left(\frac{1}{u + i} - \frac{G_1^2}{u - \gamma_1} \right).$$

Эту функцию можно найти тем же приемом, какой был указан как общий прием изыскания и применен затем к случаю дужки с эллиптическим контуром.

Однако можно решить задачу и непосредственно, усмотрев искомый вид функции. В самом деле, раскрывая скобки, мы получим

$$\frac{1}{KK_1} F(u) = \frac{i}{u^2 + 1} + \frac{iG^2G_1^2}{(u - \gamma)(u - \gamma_1)} - i \left[\frac{G^2}{(u - \gamma)(u + i)} + \frac{G_1^2}{(u - \gamma_1)(u - i)} \right].$$

Легко видеть, что первый член этого выражения представляет собой мнимую часть всюду конечной и непрерывной на верхней полуплоскости функции $\frac{1}{u + i}$; далее, так как оба члена, стоящих в квадратных скобках, имеют одинаковую действительную часть, то в состав искомой функции войдет член

$$- 2i \frac{G^2}{(u - \gamma)(u + i)},$$

также представляющий в интересующей нас области конечную и непрерывную функцию. Наконец, изобразив оставшийся член функции $F(u)$ в виде

$$\frac{iG^2G_1^2}{(u-\gamma)(u-\gamma_1)} = i \frac{G^2G_1^2}{\gamma-\gamma_1} \left(\frac{1}{u-\gamma} - \frac{1}{u-\gamma_1} \right),$$

уматриваем, что его мнимая часть совпадает с мнимой частью, всюду на верхней полуплоскости конечной и непрерывной, выражения

$$\frac{2iG^2G_1^2}{(\gamma-\gamma_1)(u-\gamma)}.$$

Соединяя найденные результаты, окончательно заключаем, что функция

$$f(u) = KK_1 \left\{ -\frac{1}{u+i} + \frac{2iG^2G_1^2}{(\gamma-\gamma_1)(u-\gamma)} - \frac{2iG^2}{(u-\gamma)(u+i)} \right\}$$

имеет на реальной оси как раз нужную мнимую часть.

Функция течения, омывающего данную дужку при условии ее вращения с угловой скоростью ω около некоторого определенного центра, выраженная в координатах, неизменно связанных с дужкой, как указано было в § 5, может быть разбита на сумму двух слагаемых:

$$w = \varphi + i\psi = w_1 + w_2.$$

Из них второе должно представлять всюду в области течения (иначе, везде на верхней полуплоскости u , на которой эта область конформно отображается) конечную и непрерывную функцию u , причем ее мнимая часть на контуре (иными словами, на действительной оси в плоскости u) должна иметь значение $-\frac{\omega z z_1}{2}$. Этому условию мы удовлетворим, положив

$$w_2 = -\frac{\omega}{2} f(u) = \frac{\omega}{2} KK_1 \left\{ \frac{1}{u+i} - \frac{2iG^2}{(u-\gamma)(u-i)} + \frac{2iG^2G_1^2}{(\gamma-\gamma_1)(u-\gamma)} \right\}.$$

Что касается w_1 , то эта функция должна обладать вещественным значением на реальной оси u ; в бесконечно удаленной точке течения, соответствующей значению $u = i$, мы должны иметь

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{w}{z} = -f + ig,$$

если по-прежнему через f и g мы обозначим проекцию поступательной скорости дужки на связанные с нею оси и предположим, что воздух покоится в далеких точках от движущегося крыла; при наличии ветра, как было в свое время указано, вместо f и g мы должны были бы написать $f + f_1$, $g + g_1$, обозначая через f_1 и g_1 компоненты скорости ветра по осям. С полюсом $u = i$ совпадает, кроме того, логарифмическая точка функции w_1 , соответствующая течению с циркуляцией вокруг дужки. Всем

указанным требованиям удовлетворяет функция

$$w_1 = -K \frac{f - ig}{u - i} - K_1 \frac{f + ig}{u + i} + iC \ln \frac{u - i}{u + i}.$$

Таким образом, полное значение функции w определится так:

$$w = -K \frac{f - ig}{u - i} - K_1 \frac{f + ig}{u + i} + iC \ln \frac{u - i}{u + i} + \frac{\omega K K_1}{2} \left\{ \frac{1}{u + i} - \frac{2iG^2}{(u + i)(u - \gamma)} + \frac{2iG^2 G_1^2}{(\gamma - \gamma_1)(u - \gamma)} \right\}.$$

Имея эту функцию, мы указанными общими приемами при всяком частном значении коэффициентов определим подъемную силу и вращающий момент в любое время, равно как и средние значения их за период колебания. Что касается среднего значения подъемной силы, то по отношению к нему может быть доказана общая теорема, определяющая его величину вне зависимости от вида дужки; изложение этой теоремы составляет предмет следующего параграфа.

§ 9. Определение средней величины подъемной силы для неизменного крыла любого типа при постоянной циркуляции. Представим себе, что нам дана дужка некоторого определенного вида, и посмотрим, какова будет средняя подъемная сила, поддерживающая крыло с такой дужкой за период колебания его при полете. Будем исходить из общей формулы подъемной силы (15), данной в § 3:

$$Y + iX = -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \rho i \omega \int z_1 dw - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw + \rho q (\bar{y} + ix)(i\dot{\omega} + \omega^2) + \rho q (k + ih). \quad (56)$$

В этой формуле заменим слагающие ускорения по осям h и k их значениями из формулы (3) § 1

$$h = \dot{f} - \omega g, \quad k = g + \omega f,$$

где f и g по-прежнему обозначают компоненты скорости по тем же осям, и затем введем вместо проекций силы на оси, связанные с крылом, ее проекции на неизменно направленные в пространстве оси; обозначив эти последние проекции через $\bar{X}$, $\bar{Y}$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{Y} + i\bar{X} &= (Y + iX) e^{-i\beta} = \\ &= -\rho e^{-i\beta} \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \rho i \omega e^{-i\beta} \int z_1 dw - \frac{\rho}{2} e^{-i\beta} \int \frac{dw}{dz} dw + \rho q (\bar{y} + ix) \times \\ &\quad \times (i\dot{\omega} + \omega^2) e^{-i\beta} + \rho q i \{ \dot{f} - ig - i\omega (f - ig) \} e^{-i\beta}. \end{aligned} \quad (57)$$

Имея эту формулу, определим слагающие K , L средней поддерживающей силы с помощью соотношения

$$T(L + iK) = \int_0^T (\bar{Y} + i\bar{X}) dt,$$

где T — период колебания крыла.

Чтобы воспользоваться этой формулой, произведем некоторые преобразования. Функцию w изображаем в виде суммы двух членов

$$w = w_1 + w_2,$$

где w_1 есть однозначная функция и представляет собою сумму членов, зависящих от поступательного движения и от вращения крыла; w_2 , наоборот, — функция многозначная, характеризующая собою движение с циркуляцией скорости. Эти две слагающие функции имеют следующий вид:

$$w_1 = A \frac{-f + ig}{u - i} - A_1 \frac{f + ig}{u + i} + \omega F(u),$$

$$w_2 = Ci \ln \frac{u - i}{u + i}.$$

Здесь C определяет циркуляцию скорости

$$I = 2\pi C;$$

$F(u)$ есть такая всюду на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного u конечная и непрерывная функция, что на реальной оси ее мнимая часть $\text{Im} F(u)$ имеет значение

$$\text{Im} F(u) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}zz_1.$$

Наконец, коэффициент A определяется по функции, конформно отображающей область течения z на полуплоскости u , так что бесконечно удаленной точке области z соответствует $u = i$ и контуру дужки — действительная ось полуплоскости. В таком случае функция z изобразится в виде

$$z = \frac{A}{u - i} + \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ в области u — голоморфная функция этого переменного, а коэффициент A и есть тот самый, который фигурирует в приведенном выше выражении w_1 .

Далее поступаем следующим образом: разобьем подъемную силу на две слагающие; проекции одной, зависящей от члена $-\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw$ формулы (57), обозначим через $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$; проекции другой, которая определяется всеми прочими членами упомянутой формулы, назовем через $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_2$. Меняя в соответственных членах формулы i на $-i$, мы получим для определения последней слагающей такое равенство:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2 - i\bar{X}_2 = & -\rho e^{i\beta} \int \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} dz + \rho i \omega e^{i\beta} \int z d\bar{w} + \rho q (\bar{y} - i\bar{x}) (\omega^2 - i\dot{\omega}) e^{i\beta} - \\ & - \rho q i \{ \dot{f} + i\dot{g} + i\omega(f + ig) \} e^{i\beta}, \end{aligned}$$

где $\bar{w}$ есть функция, сопряженная w ,

$$\bar{w} = \varphi - i\psi.$$

Так как на контуре дужки, по которому производится интегриция,

$$\psi + \omega \frac{zz_1}{2} = 0,$$

то здесь

$$\bar{w} = \varphi + i\psi + i\omega zz_1 = w + izz_1\omega.$$

Это, во-первых. Во-вторых, интегрируя по частям, имеем

$$\int zdw = \int zdw_1 + \int zdw_2 = \oint zw_1 - \int w_1 dz + \int zdw_2,$$

[где $\oint zw_1$ есть разность значений функции zw_1 в некоторой точке после и до обхода контура]. Так как циркуляция со временем не меняется и функция z не содержит членов, зависящих от времени, то последний интеграл и представляет собой некоторое, не зависящее от времени постоянное количество H . Подстановка $\oint zw_1$ ввиду однозначности функций z и w_1 при обходе по контуру обращается в нуль, и мы получаем, таким образом,

$$\int zdw = H - \int w_1 dz.$$

Наконец, в-третьих, как в свое время было показано,

$$\int zz_1 dz = -2(\bar{y} - i\bar{x})q,$$

где q — площадь дужки, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты ее центра тяжести, а другой появляющийся в вычислении интеграл

$$\int zd(zz_1) = \int z^2 dz_1 + \int zz_1 dz = \oint z^2 z_1 - \int zz_1 dz_1 = 2(\bar{y} - i\bar{x})q.$$

Приняв во внимание все эти три замечания, мы преобразуем написанное выше равенство для определения $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_2$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2 - i\bar{X}_2 = & -\rho e^{i\beta} \int \frac{\partial w}{\partial t} dz - \rho i \omega e^{i\beta} \int w_1 dz + \rho i \omega e^{i\beta} H + \rho(\bar{y} - i\bar{x})q \times \\ & \times (i\dot{\omega} - \omega^2) e^{i\beta} - \rho q i \{ \dot{f} + \dot{g} + i\omega(f + ig) \} e^{i\beta}, \end{aligned}$$

а так как

$$\omega = \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial t},$$

то это равенство можно переписать в форме

$$\bar{Y}_2 - i\bar{X}_2 = \frac{d}{dt} \left\{ -\rho e^{i\beta} \int w_1 dz + \rho e^{i\beta} H + i\rho(\bar{y} - i\bar{x})q\omega e^{i\beta} - \rho q i e^{i\beta} (f + ig) \right\}.$$

Совершив интегрирование и имея в виду периодичность, в силу которой начальное и конечное значение полученной функции — одно и то же, мы приходим к заключению, что полный импульс за период силы $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_2$ есть нуль; а стало быть, такова же и средняя величина силы за этот

промежуток времени. Таким образом, мы получаем на основании формулы (57)

$$T(L + iK) = \int_0^T (\bar{Y}_1 - i\bar{X}_1) dt.$$

Но

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 - i\bar{X}_1 &= -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du = \\ &= \frac{\rho}{2} \int \left\{ A \frac{f - ig}{(u - i)^2} + A_1 \frac{f + ig}{(u + i)^2} + \omega F'(u) + iC \left(\frac{1}{u - i} + \frac{1}{u + i} \right) \right\}^2 \times \\ &\quad \times \frac{(u - i)^2 du}{A + (u - i)^2 \Phi'(u)} = 2\pi C\rho (f - ig) = I\rho (f - ig). \end{aligned}$$

А так как по формулам (2) § 1 мы имеем

$$(f - ig) e^{-i\beta} = v_0 + m - ni + \omega (b + ic) e^{-i\beta},$$

то получаем

$$T(L + iK) = I\rho \int_0^T [v_0 + m - ni + \omega e^{-i\beta} (b + ic)] dt,$$

откуда вследствие периодичности функций m , n , β

$$L + iK = I\rho v_0.$$

Таким образом, мы убеждаемся, что *средняя величина подъемной силы при неизменной циркуляции есть подъемная сила при нормальном режиме, определяемая через циркуляцию Γ формулой Н. Е. Жуковского, а среднее лобовое сопротивление при том же условии равно нулю.*

§ 10. Общие формулы результирующих сил давления и моментов для произвольного крыла. В начале работы был указан метод, при помощи которого во всяком частном случае можно получить точное выражение подъемной силы и вращающего момента, испытываемых крылом при переменном движении и постоянной циркуляции; затем даны были примеры приложений этого метода к отдельным задачам. В этом параграфе мы ставим себе целью дать выражения для тех же количеств, не делая особых предположений о виде крыла; формулы при этом получаются с некоторыми коэффициентами, значения которых и отличают друг от друга крылья того или другого очертания.

Представим себе, что область течения отображена на верхней полуплоскости вспомогательного комплексного переменного u при помощи уравнения

$$x + iy = z = \Phi(u)$$

и что в области полюса $u = i$, $z = \infty$ функция $\Phi(u)$ имеет разложение

$$z = \frac{A}{u - i} + B + D(u - i) + \dots, \quad (58)$$

где $A, B, D, \dots$ — некоторые комплексные коэффициенты. Обозначим проекции скорости начала неизменно связанных с крылом осей координат на эти оси через f, g , а угловую скорость вращения через ω . Проекции скорости частицы жидкости в ее относительном движении будут иметь выражения

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x.$$

Потенциал скоростей φ и функция тока ψ , представляя собою сопряженные гармонические функции, определяют функцию течения

$$w = \varphi + i\psi,$$

которая, как было показано выше, имеет вид

$$w = -A \frac{f - ig}{u - i} - A_1 \frac{f + ig}{u + i} + Ci \ln \frac{u - i}{u + i} + \omega F(u), \quad (59)$$

где A — коэффициент, входящий в формулу (58), A_1 — сопряженное ему количество, C — постоянное, характеризующее циркуляцию I , которая выражается формулой

$$I = 2\pi C,$$

а функция $F(u)$ определяется из того условия, что ее мнимая часть

$$\operatorname{Im} F(u) = -\frac{x^2 + y^2}{2} = -\frac{zz_1}{2}$$

на контуре крыла, а стало быть, и на соответствующей ему в полуплоскости вспомогательного переменного действительной оси полуплоскости.

По формуле (56) мы имеем для определения силы реакции воздуха равенство

$$Y + iX = -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \rho i\omega \int z_1 dw - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw + \rho q (\bar{y} + i\bar{x})(i\dot{\omega} + \omega^2) + \rho qi \{ \dot{f} - ig - i\omega(f - ig) \},$$

где проекции ускорения начала h и k заменены их выражениями

$$h = \dot{f} - \omega g, \quad k = \dot{g} + \omega f.$$

Разобьем, подобно тому как это было сделано в предшествующем параграфе, силу реакции на две; проекции одной, определяемой третьим членом приведенной формулы, обозначим через X_1, Y_1 ; проекции же второй, которая характеризуется всеми прочими членами, назовем X_2, Y_2 . Таким образом, с одной стороны, имеем

$$Y_1 + iX_1 = -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw;$$

с другой, заменив i на $-i$, получаем

$$Y_2 - iX_2 = -\rho \int \frac{\partial w_1}{\partial t} dz + \rho i\omega \int z dw_1 - \rho q (\bar{y} - i\bar{x})(i\dot{\omega} - \omega^2) - \rho qi \{ \dot{f} + ig + i\omega(f + ig) \}.$$

Функция w_1 , сопряженная w на контуре крыла, по которому берутся интегралы, может быть изображена в виде

$$w_1 = w - 2i\psi = w + \omega izz_1;$$

приняв это в соображение и замечая, кроме того, что взятые по контуру интегралы имеют значение

$$\begin{aligned} \int z d(zz_1) &= - \int zz_1 dz = - \int (x^2 + y^2)(dx + idy) = - \int y^2 dx - i \int x^2 dy = \\ &= 2q(\bar{y} - i\bar{x}), \end{aligned}$$

если по-прежнему обозначим через q площадь крыла, а через $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты ее центра тяжести; мы получим

$$\begin{aligned} Y_2 - iX_2 &= -\rho \int \frac{\partial w}{\partial t} dz + \rho i\omega \int z dw + \rho q(\bar{y} - i\bar{x})(i\dot{\omega} + \omega^2) - \\ &\quad - \rho q i \{ \dot{f} + i\ddot{g} + i\omega(f + ig) \}. \end{aligned}$$

Выделив из функции w логарифмический член, обозначая через $\bar{w}$ все, что остается, путем интегрирования по частям получаем ввиду однозначности функции $\bar{w}$

$$\int z d\bar{w} = - \int \bar{w} dz$$

и, воспользовавшись формулами (58) и (59), находим

$$\int \bar{w} dz = \int \left\{ A \frac{f - ig}{u - i} + A_1 \frac{f + ig}{u + i} - \omega [F + G(u - i)] \right\} \left\{ \frac{A}{(u - i)^2} - D \right\} du.$$

Здесь принято во внимание разложение вблизи полюса функции

$$F(u) = F + G(u - i) + \dots$$

и отброшены все те члены, которые при интегрировании по замкнутой кривой не имеют значения; по теореме Коши мы интегрируем по контуру крыла заменяем интегрированием по бесконечно малому контуру, охватывающему полюс $u = i$. Искомый интеграл определяется интегральным вычетом функции, и таким образом мы, воспользовавшись разложением вблизи полюса

$$\frac{1}{u + i} = \frac{1}{2i} + \frac{u - i}{4} + \dots,$$

легко находим

$$\int \bar{w} dz = 2\pi i A D (f - ig) - \frac{\pi i}{2} A A_1 (f + ig) + 2\pi i A G \omega.$$

Ввиду неизменности со временем циркуляции интеграла

$$\int \frac{\partial w}{\partial t} dz = \int \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} dz$$

он определяется путем замены f , g , ω в только что найденной формуле их производными по времени $\dot{f}$, $\dot{g}$ и $\dot{\omega}$. Наконец,

$$\int z d \left(iC \ln \frac{u-i}{u+i} \right) = iC \int \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) \left(\frac{A}{u-i} + B \right) du = 2\pi C \left(B - \frac{A}{2i} \right).$$

Воспользовавшись всеми этими формулами, мы получаем

$$Y_2 - iX_2 = H (i\dot{f} - \omega f) - K (g + i\omega g) - (\lambda + i\mu) (i\dot{\omega} + \omega^2) + I\rho\omega (\lambda_1 + i\mu_1), \quad (60)$$

причем

$$H = \frac{\pi\rho AA_1}{2} - \rho q - 2\pi\rho AD, \quad K = \frac{\pi\rho AA_1}{2} - \rho q + 2\pi\rho AD, \quad I = 2\pi C, \\ \lambda + i\mu = 2\pi\rho AG - \rho q\bar{y} + i\rho q\bar{x}, \quad \lambda_1 + i\mu_1 = iB - \frac{A}{2}. \quad (61)$$

Заметим, что все эти коэффициенты, обозначенные вновь введенными буквами, суть количества реальные; сомнение возникает лишь благодаря присутствию члена AD , ибо коэффициенты A и D , вообще говоря, комплексны. Но легко обнаружить, что и этот член можно считать вещественным. В самом деле, меняя направление осей координат в плоскости крыла, мы получим из разложения (58) формулу для нового z в виде

$$z = e^{i\gamma}\Phi(u),$$

где γ — угол поворота осей; поэтому новые коэффициенты A и D в разложении z в области полюса получатся из старых путем умножения на $e^{i\gamma}$, а произведение AD умножится на $e^{2i\gamma}$; понятно, что γ всегда можно выбрать так, чтобы в результате этого умножения получилось количество вещественное. Примем, что оси с самого начала выбраны именно таким образом, и наше сомнение отпадет.

Обращаемся к вычислению X_1 , Y_1 . Имеем

$$Y_1 + iX_1 = -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{du}{dz} du = \\ = \frac{\rho}{2} \int \left\{ A \frac{f-ig}{(u-i)^2} + A_1 \frac{f+ig}{(u+i)^2} + iC \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u+i} \right) + \omega G \right\}^2 \frac{(u-i)^2 du}{A-D(u-i)^2}.$$

Единственный член подынтегральной функции, дающий интегральный вычет, получится от удвоенного произведения первого и третьего членов витых скобок, и мы получаем

$$Y_1 + iX_1 = 2\pi\rho C (f - ig) = \rho I (f - ig),$$

как полагается по формуле Н. Е. Жуковского.

Эта формула в соединении с формулой (60) окончательно определяет искомые слагающие сил реакции, и мы имеем для них следующие

выражения:

$$\begin{aligned} X &= -H\dot{f} + K\omega g + \lambda\dot{\omega} + \mu\omega^2 - I\rho g - I\rho\mu_1\omega, \\ Y &= -Kg - H\omega f + \mu\dot{\omega} - \lambda\omega^2 + I\rho f + I\rho\lambda_1\omega, \end{aligned} \quad (62)$$

причем коэффициенты определяются формулами (61).

Перейдем к отысканию вращающего момента M около начала подвижных осей. Он дается формулой

$$M = \operatorname{Re} S,$$

причем по уравнению (21)

$$\begin{aligned} S &= -\rho \int z \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - \rho i \omega \int z z_1 dw - \frac{\rho}{2} \int z \frac{dw}{dz} dw - 2\rho L_1 \dot{\omega} - q\rho (\bar{y} - i\bar{x}) \times \\ &\quad \times \{ \dot{f} - i\dot{g} - i\omega (f - ig) \} + 2i\rho q (h\bar{x} + k\bar{y}). \end{aligned}$$

Здесь L_1 есть момент инерции площади сечения крыла относительно начала координат. Будем составлять реальные части отдельных членов этой формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int z \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 &= \operatorname{Re} \left(\int z \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz_1 + i \int z \frac{\partial \psi}{\partial t} dz_1 \right) = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} d(z z_1) - \\ &\quad - \operatorname{Re} \frac{\dot{\omega} i}{2} \int z^2 z_1 dz_1, \end{aligned}$$

ибо

$$\operatorname{Re} (z dz_1) = \frac{z dz_1 + z_1 dz}{2},$$

а $\partial \psi / \partial t$ на контуре крыла имеет величину

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\dot{\omega} \frac{z z_1}{2}.$$

Так как на том же контуре по формуле (59)

$$-\frac{z z_1}{2} = \operatorname{Im} F(u) = -\operatorname{Re} i F(u),$$

то мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} d(z z_1) &= \operatorname{Re} i \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} F'(u) du = \operatorname{Re} \left\{ i \int \frac{\partial w}{\partial t} F'(u) du \right\} - \\ &\quad - \operatorname{Re} \left(\frac{\dot{\omega}}{2} \int z z_1 F'(u) du \right). \end{aligned}$$

На основании вышеуказанного разложения функции $F(u)$ получим

$$i \int \frac{\partial w}{\partial t} F'(u) du = -Gi \int A \frac{\dot{f} - i\dot{g}}{u - i} du = -2\pi AG (\dot{f} - i\dot{g}).$$

Замечая далее, что

$$\int z^2 z_1 dz_1 = \int (x^2 + y^2) (x dx + y dy + i y dx - i x dy) = i \int (x^2 + y^2) (y dx - x dy),$$

и преобразуя этот мнимый интеграл по формуле Грина, приведем его к виду

$$\int z^2 z_1 dz_1 = -4i \iint (x^2 + y^2) dx dy = -4i L_1,$$

а потому

$$- \operatorname{Re} \frac{i}{2} \int z^2 z_1 dz_1 = -2L_1.$$

При помощи найденных результатов мы изображаем реальную часть совокупности первого и четвертого членов вышеуказанного выражения S в таком виде:

$$\operatorname{Re} \left(-\rho \int z \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 - 2\rho L_1 \dot{\omega} \right) = 2\pi\rho \operatorname{Re} GA (f - ig) - L_2 \omega,$$

где через L_2 обозначено постоянное

$$L_2 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int z z_1 F'(u) du. \quad (63)$$

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(-i \int z z_1 dw \right) &= \operatorname{Re} \left(-i \int z z_1 d\varphi + \int z z_1 d\psi \right) = \\ &= \int z z_1 d\psi = -\frac{\omega}{2} \int z z_1 d(z z_1) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, обращаясь к оставшемуся неизвестному члену S , пишем входящий в него интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int z \frac{dw}{dz} dz &= \int \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \frac{z}{dz} du = - \int \left\{ A \frac{f - ig}{(u - i)^2} + A_1 \frac{f + ig}{(u + i)^2} + \omega F'(u) + \right. \\ &\quad \left. + iC \left(\frac{1}{u - i} - \frac{1}{u + i} \right) \right\}^2 \frac{A + B(u - i) + D(u - i)^2}{A - D(u - i)^2} (u - i) du. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{A + B(u - i) + D(u - i)^2}{A - D(u - i)^2} = 1 + \frac{B}{A} (u - i) + 2 \frac{D}{A} (u - i)^2 + \dots,$$

то, развертывая витые скобки, мы изобразим вычет N нашего интеграла в виде

$$\begin{aligned} N &= -2AD (f - ig)^2 - 2iC \left(B - \frac{A}{2i} \right) (f - ig) + \\ &\quad + \frac{AA_1}{2} (f^2 + g^2) + C^2 - 2AG (f - ig)\omega. \end{aligned}$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int z \frac{dw}{dz} dz &= -2\pi \operatorname{Re} (iN) = \\ &= 4\pi \operatorname{Re} \left\{ iDA (f - ig)^2 - C \left(B - \frac{A}{2i} \right) (f - ig) + iAG (f - ig)\omega \right\}. \end{aligned}$$

Собирая найденные результаты, имеем

$$M = \operatorname{Re} S = 2\pi\rho \operatorname{Re} \left\{ GA [f - ig - i\omega(f - ig)] - iDA(f - ig)^2 + \right. \\ \left. + C \left(B - \frac{A}{2i} \right) (f - ig) - \frac{q}{2\pi} (\bar{y} - i\bar{x}) [(f - ig) - i\omega(f - ig)] \right\} - L_2 \dot{\omega},$$

откуда, воспользовавшись обозначениями (61), окончательно получаем

$$M = (H - K) fg + \lambda \dot{f} + \mu \dot{g} - \lambda \omega g + \mu \omega f - L_2 \dot{\omega} + I\rho (\mu_1 f - \lambda_1 g). \quad (64)$$

Введенные нами коэффициенты H , K и L_2 имеют любопытный механический смысл; чтобы его обнаружить, составим выражение живой силы T воздуха, в котором движется крыло в *отсутствии циркуляции*. Обозначив через Φ потенциал скоростей, представляем живую силу в виде пространственного на всю область, занятую жидкостью, двойного интеграла

$$T = -\frac{\rho}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy;$$

преобразуя это выражение по формуле Грина, имеем

$$T = -\frac{\rho}{2} \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds;$$

причем достаточно взять интеграл лишь по контуру крыла, так как элементы его в бесконечно далеких точках будут малыми третьего порядка. Заметив, что производная по нормали от потенциала скоростей равна производной по дуге контура от функции тока, мы можем заменить нашу формулу следующей:

$$2T = -\rho \int \Phi d\Psi = -\rho \int W d\Psi,$$

где

$$W = \Phi + i\Psi.$$

Это видоизменение в формуле возможно сделать, потому что Ψ — функция однозначная и, следовательно,

$$\int \Psi d\Psi = 0.$$

Нормальная скорость во всякой точке контура движущегося крыла в наших обозначениях выражается так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} = f \frac{dy}{ds} - g \frac{dx}{ds} - \omega \frac{y dy + x dx}{ds} = \frac{d\tau}{ds}.$$

Что касается W , то его можно выразить через нашу прежнюю функцию w , или, точнее, $\bar{w}$, которая получится из w , если мы отбросим ее логарифмический член, так как теперь мы рассматриваем течение без циркуляции. Легко убеждаемся, что

$$W = \bar{w} + (f - ig) z.$$

Таким образом,

$$2T = -\rho \int \bar{w} d\tau - \rho (f - ig) \int z d\tau. \quad (65)$$

Последний из этих двух интегралов сразу получается; если заменить z через его выражение $x + iy$ и отбросить уничтожающиеся члены, он приводится к следующему виду:

$$\int z d\tau = f \int x dy - ig \int y dx - \omega \int (xy dy + ix y dx) = (f + ig) q - \omega (\bar{y} - i\bar{x}) q.$$

Отсюда второе слагаемое в формуле живой силы получается в виде

$$-\rho (f - ig) \int z d\tau = -\rho q (f^2 + g^2) + \rho q \omega (f - ig) (\bar{y} - i\bar{x}). \quad (66)$$

Так как

$$d\tau = \operatorname{Re}[-i(f - ig) dz] - \frac{\omega}{2} d(zz_1),$$

то первый интеграл в соотношении (65) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \int \bar{w} d\tau &= \int (\bar{\varphi} + i\bar{\Psi}) d\tau = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ -i(f - ig) \int \bar{\varphi} dz \right\} - \frac{i\omega}{2} \int zz_1 d\tau - \frac{\omega}{2} \int \bar{w} d(zz_1) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ -i(f - ig) \int \bar{w} dz + \frac{\omega}{2} (f - ig) \int zz_1 dz \right\} - \frac{i\omega}{2} \int zz_1 d\tau - \frac{\omega}{2} \int \bar{w} d(zz_1). \end{aligned}$$

Затем мы имеем

$$\begin{aligned} \int zz_1 d\tau &= \int (x^2 + y^2) (f dy - g dx) = 2(\bar{x}f + \bar{y}g) q, \\ \int zz_1 dz &= \int (x^2 + y^2) (dx + idy) = -2\bar{y}q + 2i\bar{x}q = -2q(\bar{y} - i\bar{x}), \end{aligned}$$

и, сверх того, как найдено ранее,

$$\int \bar{w} dz = 2\pi i AD (f - ig) \left[-\frac{\pi i}{2} AA_1 (f + ig) + 2\pi i AG\omega \right];$$

наконец, при помощи равенства (63)

$$\begin{aligned} \int \bar{w} d(zz_1) &= \int \bar{\varphi} d(zz_1) = 2 \operatorname{Re} i \int \bar{\varphi} F'(u) du = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ i \int \bar{w} F'(u) du - \frac{\omega}{2} \int zz_1 F'(u) du \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -2\pi AG (f - ig) + \frac{L_2}{\rho} \omega \right\}. \end{aligned}$$

Собирая все указанные результаты, получим

$$\begin{aligned} -\rho \int w d\tau &= \operatorname{Re} \left\{ \rho i (f - ig) \left[2\pi i AD (f - ig) - \frac{\pi i}{2} AA_1 (f + ig) + 2\pi i AG\omega \right] + \right. \\ &\quad \left. + \rho q \omega (f - ig) (\bar{y} - i\bar{x}) - 2\pi \rho AG\omega (f - ig) \right\} + L_2 \omega^2 + \rho i q \omega (\bar{x}f + \bar{y}g). \quad (67) \end{aligned}$$

Сложив равенства (66) и (67) и воспользовавшись обозначениями (61), легко составляем окончательную формулу

$$2T = Hf^2 + Kg^2 + L_2\omega^2 - 2\lambda\omega f - 2\mu\omega g,$$

которая и определяет значения введенных коэффициентов.

Если мы обозначим через m массу, а через L_3 — момент инерции всего аппарата и за начало координат примем центр тяжести, будем иметь для удвоенной живой силы $2T$ выражение

$$2T = (m + H)f^2 + (m + K)g^2 + L\omega^2 - 2(\lambda\omega f + \mu\omega g),$$

где

$$L = L_2 + L_3.$$

Заметим, что при всех наших рассуждениях длина крыла нами принималась за единицу измерения. Добавим, кроме того, что коэффициенты H , K , L , λ и μ несколько (в общем мало) изменятся от присутствия фюзеляжа.

Заметим в заключение (этого параграфа, что надлежащим подбором нового начала координат можно достичь уничтожения в формуле живой силы членов с произведениями угловой скорости на компоненты скорости поступательной. В самом деле, заменив f , g , соответственно, на $\bar{f} + \omega\xi$, $\bar{g} - \omega\xi$, где $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — компоненты скорости нового начала, а ξ и η — его координаты по старым осям, мы приведем выражение двойной живой силы к виду

$$2T = (m + H)\bar{f}^2 + (m + K)\bar{g}^2 + \bar{L}\omega^2, \quad (68)$$

если положим

$$\xi = -\frac{\mu}{m + K}, \quad \eta = \frac{\lambda}{m + H}, \quad (69)$$

$$\bar{L} = L - \frac{\lambda^2}{m + H} - \frac{\mu^2}{m + K}.$$

Точку, принятую теперь за начало координат, будем называть *центральной точкой*. Так как квадратичная форма (68) есть форма существенно положительная, то введенные нами коэффициенты (61) всегда должны удовлетворять неравенствам

$$H > 0, \quad K > 0, \quad L - \frac{\lambda^2}{H} - \frac{\mu^2}{K} > 0.$$

Составим теперь уравнения движения аппарата в воздухе при условии, что его ось перемещается параллельно самой себе — единственно возможное предположение при условии плоскопараллельного потока. Эти уравнения будут таковы:

$$\begin{aligned} mh &= m(\dot{f} - \omega g) = X - P \sin \beta - R_x + F_x = X - Q_x, \\ mk &= m(\dot{g} + \omega f) = Y - P \cos \beta - R_y + F_y = Y - Q_y, \\ L_2\dot{\omega} &= M - aR_y + bR_x + \partial F_y - cF_x = M + M_1. \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь через P обозначен вес аппарата, через β — переменный угол направленной вверх вертикали с подвижной осью OX , через R — лобовое сопротивление, приложенное в точке, координаты которой (по подвижным осям) суть a, b ; через F названа тяга винта, направленная по неизменному в аппарате направлению и приложенная в точке с координатами c, d ; руль предполагается неподвижно подвязанным, и вся несущая поверхность заменяется некоторым эквивалентным при данном положении руля крылом; начало подвижных осей помещено в центре тяжести аппарата; что же касается X, Y и M , то они определяются формулами (62) и (64).

Заметим, что уравнения (70) при раскрытии выражений X, Y, M несколько упрощаются, если начало координат переместить в центральную точку, положение которой определяется формулами (69). Заменяв f, g через $\bar{f} + \omega\eta, \bar{g} - \omega\xi$ и отбросив затем за ненадобностью значки над буквами, определяющими слагающие скорости, а также значок над коэффициентом $\bar{L}$, характеризующим неизменный момент инерции, мы приведем систему (70) к виду

$$\begin{aligned}(m+H)\dot{f} &= (m+K)\omega g - I\rho g - I\rho\bar{\mu}_1\omega - Q_x, \\ (m+K)\dot{g} &= -(m+H)\omega f + I\rho f + I\rho\bar{\lambda}_1\omega - Q_y, \\ L\dot{\omega} &= (H-K)fg + I\rho\bar{\mu}_1f - I\rho\bar{\lambda}_1g - M_1 + \xi Q_y - \eta Q_x,\end{aligned}\quad (71)$$

где $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\lambda}_1$ суть новые значения коэффициентов; связаны они со старыми (формулы (61)) так:

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 - \xi, \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_1 + \eta;$$

значение силы Q и момента M_1 ясно из равенств (70).

В случае отсутствия этих сил уравнения (71) могут быть точно проинтегрированы. Их интегралы, не содержащие времени, таковы:

$$\begin{aligned}2T &= (m+H)f^2 + (m+K)g^2 + L\omega^2 = \alpha, \\ (m+H)^2f^2 + (m+K)^2g^2 - 2I\rho\bar{\lambda}_1(m+H)f - \\ &\quad - 2I\rho\bar{\mu}_1(m+K)g + 2I\rho L\omega = \gamma,\end{aligned}$$

где α и γ — произвольные постоянные. Ясно, что в этом случае интеграция заканчивается некоторой квадратурой, вообще весьма сложной, характеризующей связь скоростей со временем. Квадратура упрощается в предположении $\bar{\lambda}_1 = \bar{\mu}_1 = 0$, сводясь при таких условиях к эллиптическому интегралу обычного типа.

Предположив, что тяга винта и лобовое сопротивление все время уравновешивают друг друга, мы будем иметь один интеграл простого вида — интеграл живой силы. Он может быть представлен в весьма любопытной форме, которую мы считаем нелишним тут указать. Пусть при нормальном режиме угол наклона оси OX к горизонту имеет величину β_0 , не изменяющуюся со временем; через v_0 обозначим направленную при этих условиях горизонтально постоянную скорость аппарата; так как подъемная сила

равна при этом весу аппарата, то

$$P = I\rho v_0.$$

Проекции скорости на оси могут быть при переменном режиме изображены в виде

$$f = v_0 \cos \beta + u, \quad g = -v_0 \sin \beta + v, \quad \omega = \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta},$$

а дифференциальные уравнения движения сведутся к следующим:

$$(H + m) \dot{u} = (H - K) \omega v_0 \sin \beta + (m + K) \omega v - I\rho v - I\rho \bar{\mu}_1 \omega,$$

$$(K + m) \dot{v} = -(H - K) \omega v_0 \cos \beta - (H + m) \omega u + I\rho u + I\rho \bar{\lambda}_1 \omega,$$

$$L\dot{\omega} = -(H - K)(v_0^2 \sin \beta \cos \beta - vv_0 \cos \beta + uv_0 \sin \beta + uv) +$$

$$+ I\rho \bar{\mu}_1 v_0 \cos \beta + I\rho \bar{\lambda}_1 v_0 \sin \beta + I\rho \bar{\mu}_1 u - I\rho \bar{\lambda}_1 v.$$

Здесь через $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\lambda}_1$ обозначены прежние значения этих коэффициентов до перенесения начала координат в центральную точку; они определяются формулами (61).

Умножив наши уравнения соответственно на u , v , ω и сложив, получим после совершения интегриации

$$\begin{aligned} 2T &= (H + m)u^2 + (K + m)v^2 + L\omega^2 = \\ &= (H - K)v_0^2 \cos^2 \beta + 2I\rho \bar{\mu}_1 v_0 \sin \beta - 2I\rho \bar{\lambda}_1 v_0 \cos \beta + l, \end{aligned} \quad (72)$$

где l — произвольное постоянное.

Уравнение (72) приводит нас к заключению, что если бы было возможно достичь постоянного равновесия тяги и лобового сопротивления, то аппарат был бы всегда продольно устойчивым, так как добавочные скорости оставались бы в определенных пределах. В действительности этого не бывает, и потому необходимо поставить вопрос о продольной устойчивости при малых колебаниях скоростей, когда они отступают от значений, соответствующих нормальному режиму.

К сделанному нами выводу необходимо присовокупить оговорку, что угол β при наличии уравнения (72) может меняться как угодно, так что аппарат может все время петлять, и устойчивость следует понимать лишь в том смысле, что путь центра тяжести аппарата в среднем будет направлен по горизонтальной прямой.

ТЕОРИЯ РЕШЕТЧАТОГО КРЫЛА¹

В предлагаемой статье разъясняется действие плоскопараллельного потока на преграждающую его бесконечную решетку, составленную из параллельных пластинок одинаковой ширины. Слегка изменив формулы, мы можем придать перьям решетки очертания тел с тупым передним и острым задним краем, с которого струи сбегает с конечной скоростью.

Ставя перед собою задачу о решетке, я имел в виду, хотя бы приблизительно, решить вопрос о решетчатом крыле аэроплана, так как представляется довольно вероятным, что аэроплан с такого рода крыльями будет более устойчив при полете. Предварительные опыты, произведенные в трубе университетской лаборатории мною совместно с М. М. Иконниковым, подтверждают это предположение; однако для большей ясности и убедительности результатов эксперименты эти было бы желательно произвести с большей точностью и обстоятельностью, так как теория, в которой рассматривается бесконечная решетка, само собою разумеется, лишь с недостаточным приближением может быть перенесена на случай решетки с конечным числом перьев. Тот же анализ и с таким же приближением решает вопрос о многопланном крыле аэроплана, как это показано при разборе одного из частных случаев задачи.

Анализ, приводимый в этой работе, мною получен в 1911 г.; основные результаты в связи с произведенными в университетской лаборатории наблюдениями сообщены были в 1912 г. II Всероссийскому воздухоплавательному съезду и в апреле 1913 г. — Московскому математическому обществу.

Решетка состоит из бесконечного ряда параллельных пластинок шириной $2l$, удаленных друг от друга на расстояние b , считая по перпендикуляру к ним; расстояние между соответственными концами пластинок в направлении, им параллельном, обозначим через a .

Представим себе область решетки как область комплексного переменного $z = x + iy$, сначала ограниченную ступенчатой линией $DEFD'E'F'...$ со стороны $x = -\infty$, а со стороны $x = +\infty$ такой же линией $NPMN'P'M'...$ (рис. 1). При этом за мнимую ось принимаем одну из пластинок. Предположим, что в плоскости z проведены разрезы по всем пластинам и

¹ Работа относится к 1911 г. Впервые напечатана в Математическом сборнике, 1914, т. XXIX. При переиздании в 1933 г. пополнена анализом для случая решетки с криволинейными перьями с исправлением замеченных неточностей первого издания.

по некоторым линиям одного и того же вида, уходящим от пластин в направлении $-\infty$; кроме того, из этой области вырежем малые площадки с контурами KLH , $K'L'H'$, от которых отходят в $+\infty$ также однообразные кривые. Затем вообразим себе область z наложенной на полуплоскость комплексного переменного $u = \xi + i\eta$ так, что одноименные точки совпадают (рис. 2). В пределе, когда ступенчатые ломаные отходят в бес-

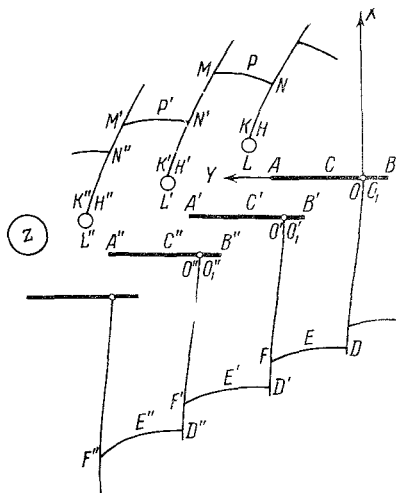


Рис. 1

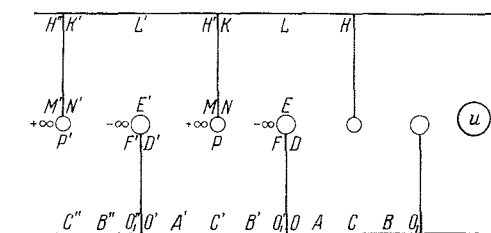


Рис. 2

конечность, кривые $\dot{MNP}$, $M'N'P'$, ..., DEF , $D'E'F'$ в области u сокращаются в точки; в то же время вырезы KLH , $K'L'H'$, ... области z также обращаются в отдельные точки, которым соответствуют отошедшие в бесконечность отрезки KLH , $K'L'H'$, ... полуплоскости u . Последовательные отрезки $O'O_1$, OO_1 , ... действительной оси вспомогательного комплексного переменного u соответствуют обеим сторонам последовательных перьев решетки в области z .

Для осуществления указанного преобразования достаточно положить

$$\frac{2\pi z}{a} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha = \cos \mu (\mu - i\alpha) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{i\alpha - u}{2}}{i \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}} - \cos (\mu + i\alpha) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{i\alpha + u}{2}}{i \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}; \quad (1)$$

dz/du изображаем при помощи той или другой из следующих формул:

$$\frac{\pi}{a} \frac{dz}{du} = \frac{i \operatorname{sh} \alpha}{\cos \mu} \frac{\cos (u - \mu)}{\sin^2 u + \operatorname{sh}^2 \alpha}$$

или

$$\frac{2\pi}{a} \frac{dz}{\partial u} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha = \frac{\cos(\mu - i\alpha)}{\sin(u - i\alpha)} - \frac{\cos(\mu + i\alpha)}{\sin(u + i\alpha)}; \quad (2)$$

$$[\operatorname{R\acute{e}s} f(u)]_{u=\alpha} = \lim_{u \rightarrow \alpha} (u - \alpha) f(u).$$

Связь количеств α , μ с расстоянием b между перьями решетки и их шириной $2l$ найдется на основании формул (1) и (2) из условий

$$\frac{2\pi(ia - b)}{a} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha = 2\pi i \frac{2\pi}{a} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha \left[\operatorname{R\acute{e}s} \frac{dz}{du} \right]_{\substack{u=i\alpha \\ z=-\infty}} = 2\pi i \cos(\mu - i\alpha),$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi 2li}{a} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha &= \left| \begin{array}{c} u = \frac{\pi}{2} + i\mu \\ u = \frac{3\pi}{2} + i\mu \end{array} \right| \frac{2\pi z}{a} \cos \mu \operatorname{ch} \alpha = \\ &= \cos(\mu - i\alpha) \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{3\pi}{4} - \frac{\mu}{2}\right)} - \cos(\mu + i\alpha) \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)}; \end{aligned}$$

эти условия по упрощении приводят к формулам

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \mu \operatorname{th} \alpha, \quad (3)$$

$$\frac{\pi l}{a} = \operatorname{arctg} \frac{\cos \mu}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \mu \operatorname{th} \alpha \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha + \sin \mu}{\operatorname{ch} \alpha - \sin \mu}. \quad (4)$$

Положив

$$\frac{\cos \mu}{\operatorname{sh} \alpha} = n = \operatorname{tg} \beta,$$

причем на основании формулы (3)

$$\frac{\sin \mu}{\operatorname{ch} \alpha} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \beta = n \operatorname{tg} \sigma,$$

получим для определения ширины пластинки формулу

$$\frac{\pi l}{a} = \operatorname{arctg} n + \frac{1}{2} \frac{b}{a} \ln \frac{1 + n \frac{b}{a}}{1 - n \frac{b}{a}} \quad (5)$$

или

$$\frac{\pi l}{a} = \beta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \sigma \ln \frac{\cos(\beta - \sigma)}{\cos(\beta + \sigma)}. \quad (6)$$

При заданных l и σ этими формулами определяется n или β . В частном

случае, если перья решетки лежат в одной плоскости и $b = 0$, $\sigma = 0$, имеем

$$\mu = 0, \quad \beta = \frac{\pi l}{a}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi l}{a}.$$

В другом предельном предположении, когда перья решетки лежат друг над другом так, что линия, соединяющая их середины, к ним перпендикулярна, стало быть, $a = 0$, $\sigma = \pi/2$, мы должны положить $\mu = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, и тогда из уравнения (4) найдем

$$\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{cth} \frac{\pi l}{b}.$$

Обратимся к определению потока. Предполагаем, что в бесконечной дали с той стороны, откуда поток набегаёт, скорость есть v_0 и давление p_0 ; с противоположной стороны те же количества обозначим через v_1 , p_1 ; пусть, далее, γ и γ_1 представляют величины углов в указанных областях потока, которые он образует с направлением линии решетки (рис. 3). Из чертежа легко усматриваем связь

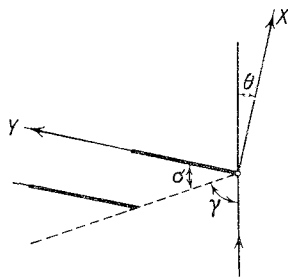


Рис. 3

$$\theta_0 = \gamma + \sigma - \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = \gamma_1 + \sigma - \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

между углами потока с осью OX и линией решетки.

Обозначив через ϕ и ψ потенциал скоростей и функцию тока, через v и θ — переменную скорость и ее угол с осью OX , через w — комплексное переменное $\phi + i\psi$, положим

$$\frac{i}{v_0} \frac{dw}{dz} = N \frac{\sin \frac{u - \lambda}{2}}{\sin \left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)}, \quad (8)$$

где N реально. При этом $\frac{dw}{du}$ будет реально на контуре пера, как это и должно быть, ибо этот контур должен представить часть линии тока. Скорость имеет бесконечно большую величину на переднем крае каждого пера, который поток обегает, меняя мгновенно свое направление.

Для определения введенных постоянных имеем, полагая в (8) последовательно

$$z] = -\infty, \quad u = i\alpha,$$

$$z = +\infty, \quad u = \pi + i\alpha$$

и принимая во внимание формулы (7)

$$-e^{-\gamma i - \sigma i} = N \frac{\sin \frac{i\alpha - \lambda}{2}}{\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)},$$

$$-\frac{v_1}{v_0} e^{-\gamma i - \sigma i} = N \frac{\cos \frac{i\alpha - \lambda}{2}}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)};$$

или

$$e^{-\gamma i} = -N_1 \frac{\sin \frac{i\alpha - \lambda}{2} \cos(\mu - i\alpha)}{\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)},$$

$$\frac{v_1}{v_0} e^{-\gamma i} = -N_1 \frac{\cos \frac{i\alpha - \lambda}{2} \cos(\mu - i\alpha)}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)};$$

$$N = N_1 (\cos^2 \mu + \operatorname{sh}^2 \alpha).$$

Эти уравнения устанавливают как значения N и λ , так и соотношения между скоростями набегающего и уходящего потоков. Для нас важны лишь последние, к выводу которых мы и перейдем.

Из приведенных уравнений находим

$$\frac{v_1}{v_0} e^{i\gamma - i\gamma_1} = \operatorname{tg} \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{i\alpha - \lambda}{2},$$

$$\frac{v_1}{v_0} e^{i\gamma + i\gamma_1} = - \frac{\sin \left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \cos \frac{i\alpha + \lambda}{2}}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) \sin \frac{i\alpha - \lambda}{2}}.$$

Умножив первое из этих уравнений на

$$\sin \left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{ch} \alpha,$$

второе на $\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)$ и сложив их, мы в результате простых преобразований получаем следующие два соотношения между скоростями уходящего и набегающего потоков:

$$v_1 \sin \gamma_1 = v_0 \sin \gamma,$$

$$v_1 \cos \gamma_1 (\operatorname{ch} \alpha - \sin \mu) = v_0 \cos \gamma (\operatorname{ch} \alpha + \sin \mu) + 2v_0 \sin \gamma \cos \mu \operatorname{cth} \alpha. \quad (9)$$

Первая из этих формул могла бы быть написана заранее, так как она вытекает из простого свойства несжимаемости жидкости.

Переходим к определению силы, действующей на перо решетки. Для этого воспользуемся общей формулой

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw,$$

в которой Y и X суть составляющие сил давления по соименным осям, ρ — плотность жидкости, а интеграция производится по контуру пера в направлении², определяемом движением от оси OX к оси OY . Легко видеть, что интеграл этот будет равен сумме интегралов по бесконечно малым контурам, охватывающим полюсы $u = i\alpha$, $u = \pi + i\alpha$ в области комплексного переменного u . Изобразив интеграл в форме

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} du,$$

легко убеждаемся, что сумма эта представляется в виде

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} 2\pi i \left\{ \left(\frac{dw}{dz} \right)^2_{u=i\alpha} \left(\text{Rés} \frac{dz}{du} \right)_{u=i\alpha} + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2_{u=\pi+i\alpha} \left(\text{Rés} \frac{dz}{du} \right)_{u=\pi+i\alpha} \right\}.$$

Имеем прежде всего

$$(Y + iX)e^{i\sigma} = Y' + iX',$$

где Y' и X' суть слагающие силы давления по направлениям линии решетки и перпендикуляра к ней. По формулам (2)

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2_{u=i\alpha} e^{2i\sigma} = v_0^2 e^{-2i\gamma}, \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)^2_{u=\pi+i\alpha} e^{2i\sigma} = v_1^2 e^{-2i\gamma_1};$$

$$\left(\text{Rés} \frac{dz}{du} \right)_{u=i\alpha} = \frac{a}{2\pi} (1 + i \operatorname{tg} \sigma) = \frac{ae^{i\sigma}}{2\pi \cos \sigma},$$

$$\left(\text{Rés} \frac{dz}{du} \right)_{u=\pi+i\alpha} = -\frac{ae^{i\alpha}}{2\pi \cos \sigma}.$$

Таким образом, получим

$$Y' + iX' = \frac{\rho a i}{2 \cos \sigma} (v_1^2 e^{-2i\gamma_1} - v_0^2 e^{-2i\gamma}). \quad (10)$$

Подставив в эту формулу величины скоростей уходящего потока через скорости набегающего по формулам (9), легко получим

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{\rho a}{\cos \sigma} v_0 \sin \gamma (v_1 \cos \gamma_1 - v_0 \cos \gamma) = \\ &= \frac{2\rho a}{\cos \sigma} \cdot \frac{v_0^2 \sin \gamma \sin \mu}{\operatorname{ch} \alpha - \sin \mu} (\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \sigma); \end{aligned}$$

² См. статью автора «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела». — Математический сборник, 1910, т. XXVIII [стр. 99 настоящего издания, (1)].

отсюда окончательная формула

$$Y' = \frac{2\rho a}{\cos^2 \sigma} \cdot \frac{nv_0^2 \sin \gamma}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \sin(\gamma + \sigma),$$

где $n = \operatorname{tg} \beta$ определяется по ширине пера решетки формулами (5), (6). Далее, из формулы (10) находим

$$X' = \frac{\rho a}{2 \cos \sigma} (v_1^2 \cos^2 \gamma_1 - v_0^2 \cos^2 \gamma);$$

воспользовавшись соотношениями (9), преобразуем эту формулу и получим для компонента, перпендикулярного к линии решетки, выражение

$$X' = \frac{2\rho a}{\cos^2 \sigma} \frac{nv_0^2}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \left\{ \cos \gamma + \frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \frac{\sin(\gamma + \sigma)}{\cos \sigma} \right\} \sin(\gamma + \sigma).$$

Формулы для Y' и X' легко приводят к окончательным выражениям для подъемной силы P и силы сопротивления Q при помощи соотношений

$$P = X' \cos \gamma + Y' \sin \gamma, \quad Q = X' \sin \gamma - Y' \cos \gamma.$$

Введя для краткости обозначения эффективной ширины пера решетки L и числа h при помощи равенств

$$L = \frac{a}{\cos^2 \sigma}, \quad h = \frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma},$$

мы после весьма понятных упрощений получим следующие формулы для P и Q :

$$\begin{aligned} P &= 2\rho L h v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) \left\{ 1 + h \frac{\cos \gamma}{\cos \sigma} \sin(\gamma + \sigma) \right\}, \\ Q &= 2\rho L h^2 v_0^2 \frac{\sin \gamma}{\cos \sigma} \sin^2(\gamma + \sigma). \end{aligned} \tag{11}$$

Напомним значения постоянных в этих формулах: γ есть угол, образуемый набегающим потоком с линией решетки, σ — угол пера решетки с той же линией; следовательно, $\gamma + \sigma$ есть угол атаки по отношению к пластинке, представляющей перо; что касается эффективной ширины L пластинки, то она равна отношению расстояния между серединами, или, что то же, одноименными концами двух соседних перьев к косинусу угла σ . Наконец, через ρ обозначена плотность жидкости.

Чтобы иметь более ясное представление о величине равнодействующих сил давления, рассмотрим их для двух частных случаев, а именно:

- 1) когда σ близко к нулю и в пределе нуль — случай плоской решетки и
- 2) когда σ близко к прямому углу — случай многопланного крыла.

1. Полагая в формуле (5)

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \sigma = m$$

и отбрасывая ввиду малости m его степени выше второй, получим

$$n = (1 - m^2) \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}, \quad L = \frac{a}{\cos^2 \sigma} = a(1 + m^2), \quad nL = a \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a},$$

$$\frac{1}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} = \frac{1}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}, \quad \frac{h}{\cos \sigma} = \frac{n(1 + m^2)}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}};$$

затем формулы для P и Q можем изобразить в виде

$$P = 2\pi l \rho v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}} \left(\frac{1}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}} + \frac{\cos \gamma \sin(\gamma + \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\left(1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}\right)^2} \right) =$$

$$= 2\pi l \rho v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) K; \quad (12)$$

$$Q = 2\pi l \rho v_0^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a} \sin \gamma \sin^2(\gamma + \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a} \left(1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}\right)^2}. \quad (13)$$

Формула (12) показывает, что подъемная сила, действующая на перо решетки, будет превосходить силу, которая действовала бы на пластинку той же ширины, отдельно стоящую в потоке, если $\gamma < \frac{\pi}{2}$, ибо эта последняя сила, равная $2\pi l \rho v_0^2 \sin(\gamma + \sigma)$, умножается на величину K , в этом случае большую единицы. Разумеется, в случае конечной решетки превышение не будет столь значительно, как дает формула (12). Для предельного предположения плоской решетки, когда $\sigma = 0$, мы имеем точные формулы

$$P = 2\pi l \rho v_0^2 \sin \gamma \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}} \left\{ 1 + \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a} \right\},$$

$$Q = 2\pi l \rho v_0^2 \sin^3 \gamma \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}}.$$

Формула для силы сопротивления Q показывает, что теория не охватывает совершенно этой величины, ибо ее порядок при малых углах атаки ниже того, который дается формулой (13).

2. Рассмотрим теперь случай многопланной поверхности (рис. 4), когда σ близко к прямому углу и малым количеством будет

$$q = \operatorname{ctg} \sigma.$$

При этом предположении имеем, обозначая угол атаки на перо через δ ,

$$\gamma + \sigma = \pi - \delta$$

$$\gamma = \pi - \delta - \sigma = \frac{\pi}{2} - \delta + s,$$

где s — малый угол, причем

$$\operatorname{tg} s = q.$$

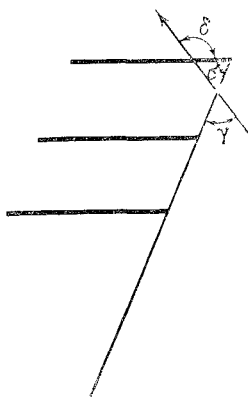


Рис. 4

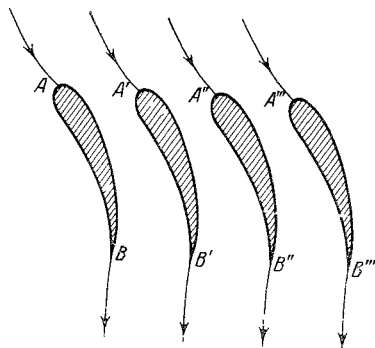


Рис. 5

Далее, находим

$$L = \frac{a}{\cos^2 \sigma} = \frac{b(q^2 + 1)}{q},$$

и из формулы (5), сохраняя вторые степени q ,

$$\frac{n}{q} = \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi l}{b}} \right\},$$

$$\frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} = \frac{nq}{q - n} = \frac{q \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi l}{b}} \right\} \left\{ 1 - \frac{q^2 \operatorname{th} \frac{\pi l}{b}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi l}{b} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \right)} \right\}}{1 - \operatorname{th} \frac{\pi l}{b}}.$$

После подстановки в формулу (11), отбросив степени q выше второй, получаем для подъемной силы многопланного крыла на всякий план величину

$$P = \rho b v_0^2 \left(e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1 \right) \sin \delta \left(1 - q^2 \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \right) \left\{ 1 + \frac{q}{2} \left(e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1 \right) \sin (\delta - s) \sin \delta \right\};$$

если поток перпендикулярен к линии, соединяющей средние точки планов, то $\delta = s$, и мы можем изобразить подъемную силу одного плана в виде

$$P = 2\pi l \rho v_0^2 \sin s \frac{e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1}{\frac{2\pi l}{b}} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \operatorname{tg}^2 s\right) = P_1 K.$$

Множитель

$$K = \frac{e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1}{\frac{2\pi l}{b}} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \operatorname{tg}^2 s\right)$$

значительно превосходит единицу при $l \geq b$; поэтому подъемная сила P плана, входящего в состав многопланного крыла, должна быть значительно более P_1 , т. е. подъемной силы отдельного плана в бесконечном потоке. К этому выводу, разумеется, вполне прилагается оговорка, которая была сделана при рассмотрении первого частного случая.

Укажем, далее, как изменить анализ для того, чтобы получить решетку с перьями криволинейного профиля с острием сзади (рис. 5). Набегающий поток образует на перьях критические точки нулевой скорости $A, A', A'', \dots$ и сбегает с каждого пера в точках заострения $B, B', B'', \dots$ с конечной скоростью. Обобщая формулу (2), положим

$$\frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{A}{\sin(u - i\alpha) + \sin(c + i\alpha')} + \frac{B}{\sin(u + m + i\beta) - \sin(b + i\beta')}, \quad (14)$$

где α, β — положительные числа; α', β' — числа реальные, удовлетворяющие неравенствам $\alpha > |\alpha'|$, $\beta > |\beta'|$; b, c, m — какие угодно реальные числа, лежащие между -2π и 2π ; комплексные числа A и B определяются из условия наличия действительного корня у функции (14). Для этого достаточно положить

$$A = \sin(g + i\lambda + i\alpha), \quad B = \sin(m + i\beta - g - i\lambda),$$

если

$$\begin{aligned} \sin(g + i\lambda + i\alpha) \sin(b + i\beta') - \sin(m + i\beta - g - i\lambda) \sin(c + i\alpha') = \\ = \sin(m + i\alpha + i\beta) \sin(g + i\lambda + \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

При этих условиях равенство (14) приобретает вид

$$\frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{\sin(m + i\alpha + i\beta) \{\sin(u + g + i\lambda) - \sin(g + \mu + i\lambda)\}}{[\sin(u - i\alpha) + \sin(c + i\alpha')] [\sin(u + m + i\beta) - \sin(b + i\beta')]} \quad (16)$$

В формулу (16) кроме масштабной длины a входят десять чисел, которые должны удовлетворять двумя соотношениям, вытекающим из равенства (15) по разделении действительной и мнимой частей. Таким образом, мы получаем решетку, перья которой характеризуются восемью

числами, удовлетворяющими лишь условиям в форме неравенств

$$\alpha > |\alpha'|; \quad \beta > |\beta'|; \quad \lambda > 0.$$

Уравнение (15) приводится к виду

$$\operatorname{tg}(g + i\lambda) = \frac{\sin(m + i\beta) \sin(c + i\alpha') + \sin(m + i\alpha + i\beta) \sin \mu - i \operatorname{sh} \alpha \sin(b + i\beta')}{\cos(m + i\beta) \sin(c + i\alpha') - \sin(m + i\alpha + i\beta) \cos \mu + \operatorname{ch} \alpha \sin(b + i\beta')}. \quad (17)$$

Уравнение (14) переписывается в форме

$$\frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{A}{2 \cos(c + i\alpha')} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{u+c}{2} - i \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{u-c}{2} - i \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right) \right\} + \\ + \frac{B}{2 \cos(b + i\beta')} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{u+m-b}{2} + i \frac{\beta - \beta'}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{u+m+b}{2} + i \frac{\beta + \beta'}{2} \right) \right\},$$

откуда по интегрировании и замене A и B их значениями

$$\frac{z}{a} = \frac{\sin(g + i\lambda + i\alpha)}{\cos(c + i\alpha')} \ln \frac{\sin \left(\frac{u+c}{2} - i \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{u-c}{2} + i \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right)} + \\ + \frac{\sin(m + i\beta - g - i\lambda)}{\cos(b + i\beta')} \ln \frac{\sin \left(\frac{u+m-b}{2} + i \frac{\beta - \beta'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{u+m+b}{2} + i \frac{\beta + \beta'}{2} \right)}. \quad (18)$$

Подбором свободных коэффициентов можно достичь весьма большого разнообразия в очертании пера решетки. В частности, можно получить и криволинейное очертание пера с острыми концами с обеих сторон. В самом деле, в общем случае уравнение (16) даст два корня функции dz/du в области переменного u , а именно:

$$1) u = \mu \text{ и } 2) u = \pi - \mu - 2g - 2i\lambda;$$

первый соответствует заострению на заднем конце, второй лежит вне области, занятой жидкостью, и передний конец пера решетки поэтому имеет плавные очертания.

Ясно, что если $\lambda = 0$, то и второй корень соответствует некоторой точке контура пера, и оно будет заострено с обоих концов; такой вид имеют обычно лопатки паровой турбины.

Чтобы такое обстоятельство имело место, необходимо и достаточно удовлетворить требованию $\lambda = 0$ в формуле (17). Это налагает на коэффициенты, характеризующие перо, требование, сводящееся к пропорциональности действительной и мнимой частей в числителе и знаменателе дроби формулы (17). Положив для краткости

$$\sin(c + i\alpha') = k + in,$$

$$\sin(b + i\beta') = k_2 + in_2,$$

$$\sin(m + i\alpha + i\beta) = k_1 + in_1,$$

мы приведем указанную пропорцию к виду

$$(k^2 + n^2) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - (k_2^2 + n_2^2) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - (kk_2 + nn_2) \cos n \operatorname{sh} (\alpha - \beta) - \\ - (kk_1 + nn_1) \operatorname{sh} \beta \cos (\mu + m) + (kn_1 - nk_1) \operatorname{ch} \beta \sin (\mu + m) + \\ + (k_1k_2 + n_1n_2) \operatorname{sh} \alpha \cos \mu - (k_1n_2 - n_1k_2) \operatorname{ch} \alpha \sin \mu = 0. \quad (19)$$

Условие (19) может быть удовлетворено весьма различными частными предположениями относительно входящих в него восьми свободных коэф-

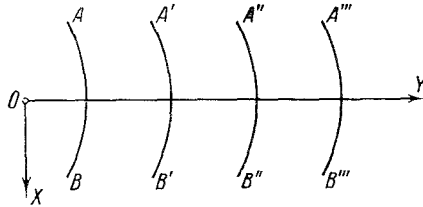


Рис. 6

фициентов. В виде примеров укажем

$$\text{а) } \alpha = \beta, \quad k = k_2, \quad n = n_2, \\ m + 2\mu = 0 \quad \text{или} \quad m + 2\mu = 2\pi;$$

тогда

$$\sin (c + i\alpha') = \sin (b + i\beta') = k + m,$$

и формула (17) дает

$$\operatorname{tg} g = \operatorname{tg} \frac{m}{2} = -\operatorname{tg} \mu;$$

$$\text{б) } \alpha = \beta, \quad k = n_2, \quad n = -k_2, \\ m = 0 \quad \text{или} \quad m = \pi;$$

в этом предположении имеем

$$i \sin (c + i\alpha') = \sin (b + i\beta'), \\ \operatorname{tg} g = \operatorname{th} \alpha = -\operatorname{tg} \mu.$$

Случай а) заслуживает особенного внимания по той причине, что каждое перо решетки в этом предположении сводится к дуге некоторой кривой (рис. 6). В самом деле, уравнение (18) при соответствующих случаю а) связях между коэффициентами приводится к виду

$$e^{\frac{\delta z}{a}} = \frac{\sin \left(\frac{u+c}{2} - i \frac{\alpha-\alpha'}{2} \right) \sin \left(\frac{u+m-c}{2} + i \frac{\alpha-\alpha'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{u-c}{2} - i \frac{\alpha+\alpha'}{2} \right) \cos \left(\frac{u+m+c}{2} + i \frac{\alpha+\alpha'}{2} \right)}, \quad (20)$$

где

$$\delta = \frac{\sin\left(\frac{m}{2} + i\alpha\right)}{\cos(c + i\alpha')} = \tau e^{si}.$$

Изменив направление осей поворотом их на угол σ , получим

$$e^{\frac{\delta z}{a}} = e^{\frac{\tau z_1}{a}},$$

где z_1 — новое комплексное переменное, вводимое вместо z ; сверх того, введем вместо u новое переменное

$$u_1 = u + \frac{m}{2};$$

тогда соотношение (20) получает вид

$$e^{\frac{2\pi z}{a}} = \frac{\cos(m - c + i\alpha - i\alpha') - \cos u}{\cos(m + c + i\alpha + i\alpha') + \cos u},$$

причем значки u количеств z и u отброшены для простоты письма, a/τ заменено через новое $\frac{a}{2\pi}$, $\frac{m}{2}$ — через m .

Так как величина z не изменяется при замене u через $2\pi - u$, то при передвижении u по действительной оси в его области от нуля до 2π , когда соответственная точка b области z обойдет контур пера, она во всякое положение будет приходить дважды; а это показывает, что перо решетки представляет собою дугу некоторой кривой.

Период решетки, очевидно, равен по длине количеству a . В точках A и B переменное z имеет значения, определяемые из соотношений

$$e^{\frac{2\pi z_1}{a}} = - \frac{\sin^2\left(\frac{m-c}{2} + i\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{m+c}{2} + i\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)}; \quad e^{\frac{2\pi z_2}{a}} = - \frac{\cos^2\left(\frac{m-c}{2} + i\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{m+c}{2} + i\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)}.$$

Что касается характеристической функции потока $w = \varphi + i\psi$, то, приняв во внимание соотношение (16), ее производную по u мы определяем формулой

$$\frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = N \frac{\sin \frac{u-\mu}{2} \sin \frac{u+\partial}{2}}{\sin(s' - if) \sin(s' + if) \cos(s'' - ih) \cos(s'' + ih)};$$

здесь

$$\begin{aligned} s' &= \frac{u+c}{2}, & s'' &= \frac{u-c}{2}, \\ f &= \frac{\alpha-\alpha'}{2}, & h &= \frac{\alpha+\alpha'}{2}. \end{aligned}$$

Поток сбегает с конечной скоростью с пера решетки в точке заострения $u = \mu$, где $\frac{dw}{du}$ и $\frac{dz}{du}$ одновременно обращаются в нуль. Из формул (16) и (17) имеем

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{2N}{\sin(m + i\alpha + i\beta)} \frac{\sin \frac{u + \partial}{2} \{\sin(u + m + i\beta) - \sin(b + i\beta')\}}{\{\sin(u + i\alpha) + \sin(c - i\alpha')\} \cos \frac{u + 2g + \mu + 2i\lambda}{2}}.$$

Все вычисления как подъемной силы, так и момента не представляют собой никаких трудностей, и я не вижу необходимости приводить их здесь.

СХЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗРЕЗНОГО КРЫЛА АЭРОПЛАНА¹

(Посвящается памяти Н. Е. Жуковского)

Печатаемую ныне статью я предназначал для юбилейного сборника, который предполагалось издать по случаю пятидесятилетия блестящей научной деятельности Н. Е. Жуковского. К сожалению, разные обстоятельства задержали своевременное окончание работы, и она увидит свет уже после кончины моего дорогого, глубоко чтимого учителя.

Ввиду того, что я в свое время делился с покойным своими соображениями по трактуемому вопросу и добытыми тогда результатами, ввиду интереса, проявленного Николаем Егоровичем к поставленной задаче, интереса, с которым он неизменно относился ко всем новым начинаниям своих учеников, я позволяю себе посвятить этот труд его светлomu имени.

§ 1. В 1914 г. в Математическом сборнике была опубликована моя работа под заглавием «Теория решетчатого крыла»², в которой были указаны некоторые выгоды такого рода крыльев аэроплана ввиду их более значительной подъемной силы и предполагаемой большей устойчивости. При этом я рассматривал задачу о преграждающей плоскопараллельный поток бесконечной решетке в форме жалюзи, или плоской решетки. Перенести выводы непосредственно на крыло с конечным числом перьев было, конечно, нельзя, хотя представлялось вероятным, что и в таком случае выгода в некоторой мере могла сохраниться.

Затем мне удалось найти решение той же задачи для крыла, состоящего из двух перьев, представляющих собой ограниченные образующими части боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра. Решение было выражено при помощи эллиптических функций, и хотя величину поддерживающей силы удалось в результате довольно длинных преобразований выразить в конце концов весьма просто, но вопрос об устойчивости крыла, зависящей от вращающего момента давлений, представлялся не вполне ясным ввиду большой сложности получившихся формул.

В настоящей работе я даю совершенно общие формулы, позволяющие установить решение для разрезного крыла с произвольным числом перьев. Это решение позволяет по геометрическим характеристикам крыла определить как поддерживающую силу, так и вращающий момент и положение метacentра, не выходя за пределы простейших элементарных функций.

¹ Впервые опубликовано в № 4—5 Научно-технического вестника НТО ВСНХ. М., 1921.

² Математический сборник, 1914, т. XXIX [стр. 244—257 настоящего издания].

В случае вогнутого крыла, состоящего из двух перьев, я привожу подробные вычисления и даю числовые примеры, иллюстрирующие теорию. Но при желании весь подобный подсчет может быть с несколько большей затратой времени проведен и для крыла с любым заданным числом перьев.

При всех предлагаемых расчетах воздух рассматривается как идеальная жидкость и, таким образом, не учитывается влияние его вязкости

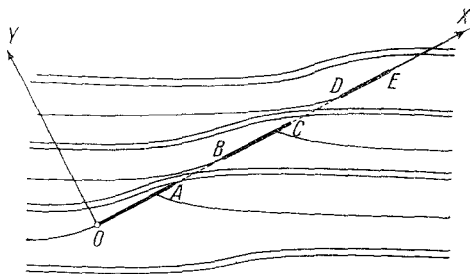


Рис. 1

и сжимаемости. Последняя, как это было показано в свое время в моей работе «О газовых струях»³, не играет роли при тех скоростях, которые господствуют во время полета аэроплана, хотя в некоторой степени она может проявить себя в незначительных областях, окружающих передние края перьев движущегося крыла; однако истекающая отсюда поправка, как можно заключить из формул работы «О давлении плоско-параллельного потока на преграждающие тела»⁴, должна быть очень невелика.

Влияние вязкости, наоборот, весьма важно: благодаря ей возникают вихри и порождаемое ими лобовое сопротивление, с одной стороны, и очень заметно изменяются поддерживающая сила и момент давлений — с другой. К сожалению, при современных средствах анализа подсчитать эффекты вязкости не представляется возможным. Поэтому мы можем лишь качественно охарактеризовать значение прорезов в крыле при наличии вязкости, что и будет сделано в заключительной части предлагаемой работы, где будут сгруппированы полученные результаты.

§ 2. Плоское разрезное крыло. Начнем с рассмотрения простейшего случая, когда крыло плоское. Ограничимся сначала крылом из трех перьев, плоскости которых, перпендикулярные к направляющей плоскости OXY потока, пересекают ее по следам ED , CB , AO в порядке последовательных составных частей, начиная с переднего края (рис. 1). Задний конец крыла принимаем за начало координат в плоскости комплексного

³ Ученые записки Отделения физико-математических наук Московского университета, 1902 [стр. 11—96 настоящего издания].

⁴ Математический сборник, 1910, т. XXVIII [стр. 97—130 настоящего издания].

переменного

$$z = x + iy$$

и, обозначив через a, b, c, d, e последовательно длины отрезков OA, AB, BC, CD и DE (рис. 1 и 2), рассмотрим значения на этой плоскости функции

$$R = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a+b}{z}\right)\left(1 - \frac{a+b+c+d}{z}\right)}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)\left(1 - \frac{a+b+c}{z}\right)\left(1 - \frac{a+b+c+d+e}{z}\right)}}. \quad (1)$$

Условимся считать $R = +1$ при $z = \infty$. Тогда во всей области течения, представляемой бесконечной плоскостью OXY с разрезами по следам перьев крыла, указанная функция будет всюду однозначна. Она конечна везде, кроме точек E, C и A , т. е. передних краев перьев. Во всякой точке H верхней плоскости переднего пера мы будем иметь $R = -iL$, а в точке G , на нижней стороне той же части крыла, $R = iL'$, где через L и L' обозначены реальные положительные функции x . В самом деле, положив

$$z = a + b + c + d + e + \varepsilon e^{in}$$

с весьма малым ε , мы в области точки E будем иметь

$$R = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{in}{2}}.$$

При обходе точки E из N по части контура, лежащей выше оси OX , n будет положительно и в точке H получит значение $+\pi$; обходя по нижнему полукругу, мы будем встречать отрицательные значения аргумента n , который в точке G приобретает величину $-\pi$. Соответственно этому, написанное выше выражение функции R определится равенством

$$R = \mp \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}},$$

причем верхний знак относится к точке H , а нижний — к точке G . В точке E оба значения совпадут, ибо здесь

$$z = a + b + c + d + e, \quad R = 0.$$

То, что сказано о переднем пере, справедливо и для двух остальных. Заметим, наконец, что на всей части действительной оси, не занятой перьями, R реально и положительно.

Чтобы яснее охарактеризовать ход изменения важной для нашей теории функции R и с несомненностью установить ее однозначность, полезно, может быть, иметь в виду еще следующее рассуждение. Обозначим через $r, r_1, \dots, r_5$ последовательные радиусы-векторы, направленные из концов перьев, помеченных на рис. 3 соответственными цифрами, к некото-

рой точке M плоскости переменного z , а через $s, s_1, \dots, s_5$ — соответственные углы этих направлений с осью OX , считая их от оси OX к оси OY . Функции R можно тогда придать вид

$$R = \sqrt{\frac{rr_2r_4}{r_1r_3r_5}} e^{ni},$$

где корень имеет арифметическое значение и

$$n = \frac{s + s_2 + s_4 - s_1 - s_3 - s_5}{2}.$$

Проследим теперь за изменением R в плоскости z вследствие перемещения точки M . При этом необходимо все векторы, направляющиеся

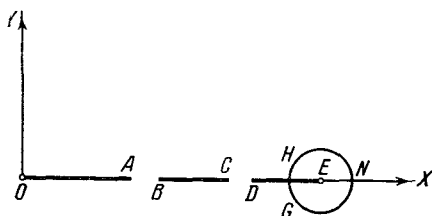


Рис. 2

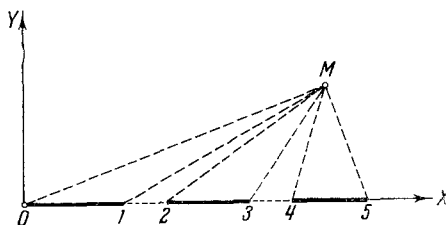


Рис. 3

к точке M , перемещать одновременно и рассматривать всегда лишь такие пути для точки M , которые не пересекают отрезков оси OX , занятых перьями крыла; эти части оси, как сказано выше, следует представлять себе как прорезы ее, не проходимые путями изменения функции.

В бесконечно далекой точке все радиусы-векторы и их углы стремятся к равенству, и потому $R = 1$. Далее может возникнуть два вопроса: во-первых, придя из удаленной точки в данный пункт плоскости и обходя затем различные допустимые принятыми условиями замкнутые пути, вернемся ли мы в этот пункт вновь с тем же значением функции R , и, во-вторых, будут ли вполне определены значения ее на верхних и нижних сторонах перьев крыла, если считать за верхнюю ту сторону, которую обращена к положительному y ?

Чтобы ответить на первый вопрос, заметим, что существенно различных путей может быть четыре типа. Первый представляет собою замкнутый контур, не охватывающий ни одного из перьев и могущий сократиться в одну точку, не пересекая поставленных границ. Тогда все углы возвращаются к своим прежним значениям, равно как и радиусы-векторы, обладающие этим свойством при всех возможных путях. Вторым типом будем считать контур, обходящий крыло в целом. В таком случае все углы s либо прирастают на 2π , либо убывают на ту же величину в зависимости от того, совершается ли обход в прямом направлении от оси OX к оси OY или в обратном. Ясно, что амплитуда функции R , выражае-

мая количеством n , изменения при этом не претерпевает. Остальные два типа путей охватывают одно или два из перьев, проходя через некоторую точку оси OX в промежутках между ними. При этих обходах приросты будут получать углы лишь тех радиусов-векторов, которые исходят из концов перьев, находящихся внутри контура. Легко усмотреть, что и эти приросты взаимно компенсируются в амплитуде n .

Переходя ко второму вопросу, отметим, что на верхнюю сторону каждого пера мы можем всегда прийти из далеких точек со значением углов $s_m = \pi$ для радиусов-векторов, исходящих из всех центров, лежащих впереди рассматриваемого пункта, и углом $s_m = 0$ для каждого из векторов, которые исходят из центров, расположенных ближе к началу координат. В таком случае всегда окажется

$$n = -\frac{\pi}{2},$$

так как угол π лишний раз войдет со знаком минус в указанную амплитуду. С другой стороны, существует путь, который на нижнюю сторону приводит со значением $s_m = -\pi$ для каждого из радиусов первой группы; для второй группы по-прежнему $s_m = 0$. Отсюда ясно, что во всех точках этой стороны пера будет

$$n = +\frac{\pi}{2}.$$

Всякие иные пути, приводящие из бесконечности в тот же пункт верхней или нижней стороны пера, сведутся к комбинации только что указанных очертаний с замкнутыми контурами, которые для рассматриваемых точек, как и для других, не внесут никакого изменения в значения функции R .

Переходим к определению потока. Представив себе, что всей массе жидкости и летящему крылу придана в обратную сторону скорость v_0 движения крыла, мы будем иметь поток, набегающий из безграничной дали на покоящееся крыло. Обозначим через ρ плотность воздуха, рассматривая его как идеальную несжимаемую жидкость, и, предположив, что вихри отсутствуют, назовем через ϕ потенциал скоростей, через ψ —функцию тока; буквой σ будем обозначать угол атаки (встречи). Обозначая через w комплексное переменное

$$w = \phi + i\psi,$$

через v — переменную скорость в различных точках течения, через θ — ее угол с осью OX , положим

$$-\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = -\frac{v}{v_0} e^{-i\theta} = \frac{v}{v_0} e^{(\pi-\theta)i} = \cos \sigma + iR \sin \sigma. \quad (2)$$

Легко усмотреть, что таким образом все требуемые условия будут удовлетворены. В самом деле, в далеких точках потока при $R = 1$ имеем

$$\pi - \theta = \sigma, \quad v = v_0;$$

на частях действительной оси, не занятых крылом, R реально, и функция $\frac{dw}{dz}$ комплексна; но, как и должно быть, она имеет реальное значение на крыле, так как на участке AO , BC и DE по вышеизложенному R имеет мнимое значение. Далее, в точках схода струй с перьев

$$\theta = \pi, \quad v = v_0 \cos \sigma;$$

скорость имеет одно и то же значение для всех перьев. Она весьма велика на передних краях перьев. На нижней поверхности каждого из них непременно найдется критическая точка с нулевой скоростью, ибо при

$$R = iL(x),$$

где положительная реальная функция $L(x)$ изменяется от бесконечности на переднем и до нуля на заднем конце пера, правая часть равенства (2), приобретая вид

$$\cos \sigma - L(x) \sin \sigma,$$

непрерывно обращается в нуль, притом не более одного раза на каждом перье.

Найдем теперь циркуляцию скорости, чтобы определить по ней поддерживающую силу P . Нетрудно видеть, что циркуляция J будет равна

$$J = 2\pi iH,$$

если через H обозначить вычет функции $\frac{dw}{dz}$ в области $z = \infty$ (под вычетом $F(z)$ разумеется коэффициент при $1/z$ разложения этой функции в области $z = \infty$). Разлагая $\frac{dw}{dz}$ по степеням $\frac{1}{z}$ и сохраняя лишь первые степени, легко получим

$$-\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \cos \sigma + i \sin \sigma \left(1 - \frac{a+b}{2z} \right) \left(1 - \frac{a+b+c+d}{2z} \right) \times \\ + \left(1 + \frac{a}{2z} \right) \left(1 + \frac{a+b+c}{2z} \right) \left(1 + \frac{a+b+c+d+e}{2z} \right);$$

отсюда

$$H = -\frac{v_0 i}{2} \sin \sigma (a + c + e) = -\frac{v_0 i l}{2} \sin \sigma,$$

если условимся через l обозначать полную ширину крыла со сдвинутыми вплотную перьями.

Воспользовавшись выражением H , находим по известной формуле Н. Е. Жуковского

$$P = J\rho v_0 = \pi\rho v_0^2 l \sin \sigma.$$

Таким образом, поддерживающая сила плоского крыла не изменяется, будут ли его перья раздвинуты или сомкнуты вплотную.

Обратимся, далее, к определению вращающего момента сил давления относительно заднего конца. По формуле (49), приведенной в моей статье «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела», этот момент M определится формулой

$$M = -\operatorname{Re} (\pi \rho i K),$$

где K — коэффициент при $1/z$ в разложенной по степеням $1/z$ функции

$$\begin{aligned} F &= z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = v_0^2 z \left\{ \cos \sigma + i \sin \sigma \left[1 - \frac{a+b}{2z} - \frac{(a+b)^2}{8z^2} + \dots \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[1 - \frac{a+b+c+d}{2z} - \frac{(a+b+c+d)^2}{8z^2} + \dots \right] \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{a}{2z} + \frac{3a^2}{8z^2} + \dots \right] \left[1 + \frac{a+b+c}{2z} + \frac{3(a+b+c)^2}{8z^2} + \dots \right] \times \\ &\quad \times \left. \left[1 + \frac{a+b+c+d+e}{2z} + \frac{3(a+b+c+d+e)^2}{8z^2} + \dots \right] \right\}^2 = \\ &= v_0^2 z \left\{ \cos \sigma + i \sin \sigma \left[1 + \frac{a+c+e}{2z} + \frac{3(a+c+e)^2 + 4b(c+e) + 4de}{8z^2} + \dots \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

На основании вышеприведенной формулы при помощи найденного таким образом разложения функции F получаем искомый момент

$$M = \pi \rho v_0^2 \sin \sigma \cos \sigma \left\{ \frac{3}{4} (a+c+e)^2 + b(c+e) + de \right\}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (3), имеем для плеча h силы выражение

$$h = \frac{M}{P} = \left\{ \frac{3}{4} (a+c+e) + b + \frac{de-ab}{a+c+e} \right\} \cos \sigma = \lambda \cos \sigma;$$

выражение это показывает, что сила пересекает плоскость крыла в неизменной, не зависящей от угла атаки точке, отстоящей от заднего края на расстояние λ . Изобразив формулу для λ в виде

$$\lambda = \frac{3}{4} (a+b+c+d+e) + \frac{b-3d}{4} + \frac{de-ab}{a+c+e},$$

легко убеждаемся, что надлежащим подбором промежутков b и d между перьями крыла и отношения ширины переднего и заднего перьев всегда можно достичь того, чтобы два последних слагаемых в формуле для λ были положительными. Тогда метациентр, совпадающий с центром давления на крыло, окажется ближе к переднему краю по сравнению с тем положением, которое он занимал бы даже при заполнении материалом промежутков между частями крыла, в каковом случае его расстояние, как известно, выражалось бы первым членом найденной формулы для λ .

§ 3. Если теперь мы пожелаем бы построить общие формулы для крыла, состоящего из n пластинок, то достаточно было бы в формуле (1) под

корнем написать в числителе $n - 1$ двучленных множителей вида

$$1 - \frac{\alpha_m}{z} \quad (m = 1, 2, \dots, n - 1),$$

где α_m были бы абсциссами всех задних краев последовательных перьев за исключением последнего, абсцисса которого равна нулю; это точки схода струй; знаменатель же должен представляться произведением n двучленов

$$1 - \frac{\beta_m}{z} \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

если через β_m мы условимся обозначать расстояния от заднего конца крыла до режущих воздух передних краев перьев, где скорость достигает бесконечной величины.

Нетрудно усмотреть, что и в настоящем случае поддерживающая сила опять-таки будет иметь ту же величину, как при сдвинутых перьях, и что центр давления не будет менять своего места на крыле с изменением угла атаки.

§ 4. Вогнутое разрезное крыло из двух перьев. Обращаясь к построению теории вогнутого крыла, остановимся прежде всего подробнее на том случае, когда это крыло представляет систему двух перьев, которые являются частями боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра. Примем за начало координат в плоскости течения центр круга, частями которого являются вышеуказанные дуги, действительную ось направим через задний конец крыла и обозначим через α , β , γ последовательные центральные углы, из коих первый и третий опираются на перья крыла, второй измеряет промежуток между ними. Радиус окружности примем за единицу меры и будем помнить, что построенные в этом предположении формулы для поддерживающей силы и ее момента следует умножить соответственно на r и r^2 , если в иных единицах длина радиуса будет выражаться числом r .

Функция

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{v}{v_0} e^{-i\theta}$$

в рассматриваемом случае должна прежде всего удовлетворять следующим условиям: во-первых, она однозначна, непрерывна и всюду конечна, кроме передних краев перьев, где имеет бесконечную величину; во-вторых, на дугах, по которым перья пересекаются с плоскостью OXY , выражение $z \frac{dw}{dz}$ должно иметь чисто мнимое значение, ибо здесь dw есть реальное количество, так как указанные дуги суть части линий тока, а ввиду равенства

$$z = e^{iu}$$

дифференциал от логарифма z представляет собой величину чисто мнимую.

Второе из указанных условий будет выполнено, если мы положим

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = (A + Bi) e^{-i\theta_0} - (A - Bi) \frac{e^{i\theta_0}}{z^2} + \frac{Hi}{z} + \\ + \left\{ (A' + B'i) e^{-i\theta_0} + (A' - B'i) e^{i\theta_0} \frac{d^2}{z^2} + G \frac{d}{z} \right\} R, \quad (3)$$

где

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(1 - \frac{b}{z}\right) / \left(1 - \frac{a}{z}\right) \left(1 - \frac{c}{z}\right)}, \quad (4)$$

$$a = e^{\alpha i}, \quad b = e^{(\alpha+\beta)i}, \quad c = e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}, \quad d = e^{\frac{\alpha+\gamma}{4}i}, \quad (5)$$

а прочие постоянные представляют подлежащие подбору реальные отвлеченные числа.

Функция, выражаемая радикалом R , всюду на плоскости течения однозначна, в чем убеждаемся путем рассуждения, аналогичного указанному в § 2. Чтобы убедиться в правильности нашего утверждения, заметим, что на окружности функция R имеет величину

$$R = \frac{1}{d} \sqrt{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{u-\alpha-\beta}{2} / \sin \frac{u-\alpha}{2} \sin \frac{u-\alpha-\beta-\gamma}{2}} = \frac{L}{d};$$

входящий сюда радикал L имеет на дугах, занятых перьями крыльев 1 и 2, чисто мнимое значение, так как угол u на этих двух дугах заключен соответственно в пределах 0 и α , $\alpha + \beta$ и $\alpha + \beta + \gamma$ (рис. 4). На остальной части окружности этот радикал всюду реален. Вторая строка формулы (3) по умножении ее на $z = e^{ui}$ приобретает вид

$$f = \left[\frac{A' + B'i}{d} e^{i(u-\theta_0)} + (A' - B'i) d e^{-i(u-\theta_0)} + G \right] L;$$

функция, заключенная в квадратные скобки, на дугах (1) и (2), очевидно, реальна, каковы бы ни были реальные числа A' , B' , θ_0 и G , а так как L по вышеуказанному чисто мнимое, то и функция f также есть мнимая величина. Что касается первой строки формулы (3), то она, будучи умножена на z , на окружности обращается в выражение

$$f_1 = (A + Bi) e^{i(u-\theta_0)} - (A - Bi) e^{-i(u-\theta_0)} + Hi$$

и имеет во всех ее точках мнимое значение. Таким образом, функции

$$z \frac{dw}{dz} = v_0 (f_1 + f),$$

как и следует, на дугах (1) и (2) является количеством чисто мнимым.

Переходим к подбору коэффициентов с тем, чтобы выполнить первое условие, наложенное на функцию $\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz}$. Однозначность и непрерывность ее во всей области течения, т. е. повсюду на бесконечной плоскости пе-

ременного z с прорезами по дугам (1) и (2), не вызывают сомнения. Она также будет повсюду, кроме передних краев перьев, конечна, если мы потребуем обращения в нуль коэффициентов при отрицательных степенях z в области нуля. Здесь функция R , как явствует из формул (4), представляется в виде голоморфной функции

$$R = \frac{1}{d^2} [1 + hz + z^2 P(z)],$$

где

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - 1 \right) \quad (6)$$

и a, b, c, d представляются формулами (5).

Собирая засим в выражении (3) коэффициенты при $1/z^2$ и приравнявая их сумму нулю, получаем

$$A' - B'i = A - Bi, \quad A = A', \quad B = B'. \quad (7)$$

Прежде чем перейти к условию выпадения в рассматриваемой области члена с первой отрицательной степенью z , найдем недостающие условия для определения коэффициентов A и B . Они получатся, если мы примем во внимание, что в далеких точках, где $v = v_0$ и $\theta = \theta_0$, должно быть выполнено вытекающее из формулы (3) соотношение

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = (A + Bi + A' + B'i) e^{-i\theta_0} = e^{-i\theta_0}.$$

Сопоставляя его с равенствами (7), находим для искомых чисел следующие значения:

$$B = B' = 0, \quad A = A' = \frac{1}{2}.$$

По вставке этих значений в выражение (3) получаем

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} e^{-i\theta_0} - \frac{1}{2z^2} e^{-i\theta_0} + \frac{Hi}{z} + \left(\frac{1}{2} e^{i\theta_0} + \frac{d^2}{2z^2} e^{-i\theta_0} + \frac{Gd}{z} \right) R. \quad (8)$$

Воспользовавшись указанным разложением R в области нуля, составив коэффициент при $1/z$ и приравняв его нулю, приходим к соотношению

$$\frac{he^{i\theta_0}}{2} + \frac{G}{d} + Hi = 0, \quad (9)$$

служащему для определения вещественных величин H и G .

Перейдем к отысканию циркуляции потенциала скорости. Для этой цели отыскиваем коэффициент iC при первой степени $1/z$ разложения по отрицательным степеням z производной функции w в области бесконечно

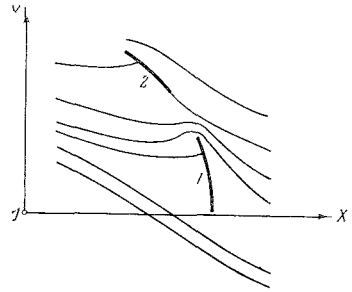


Рис. 4

удаленной точки. Здесь

$$R = 1 + \frac{h_1}{2z} + \frac{1}{z^2} P \left(\frac{1}{z} \right),$$

причем

$$2h_1 = a + c - b - 1 \quad (10)$$

есть комплексное число, сопряженное h , как это видно из формул (5) и (6). Формула (8) дает затем

$$iC = \frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0} + Gd + Hi. \quad (11)$$

Изменив i на $-i$ в уравнении (9), получаем

$$\frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0} + Gd = Hi, \quad (12)$$

и, следовательно,

$$C = 2H \quad (13)$$

есть количество реальное. Из равенств (9) и (12) находим по исключению G

$$Hi \left(d + \frac{1}{d} \right) = \frac{h_1}{2d} e^{-i\theta_0} - \frac{hd}{2} e^{i\theta_0}. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$\alpha + \gamma = 4q, \quad \alpha - \gamma = 4q'; \quad (15)$$

тогда при помощи формул (5) равенство (10) перепишется в виде

$$\frac{h_1}{d} = e^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}i} \left\{ e^{q'i} \cos \left(\frac{\beta}{2} + q - q' \right) - e^{(q'-2q)i} \cos \left(\frac{\beta}{2} + q + q' \right) \right\}.$$

Приняв в соображение равенство

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma,$$

где σ — угол атаки, найдем, преобразуя выражение в витых скобках,

$$\begin{aligned} \frac{h_1 e^{-i\theta_0}}{d} = e^{\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)i} \left\{ \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \sin q + \sin \frac{\beta}{2} \sin (2q' - q) + \right. \\ \left. + i \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \cos q - i \sin \frac{\beta}{2} \cos (2q' - q) \right\}, \end{aligned}$$

а затем формулы (13) и (14) дают

$$C \cos q = \sin (\sigma + q) \left\{ \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) - \sin \frac{\beta}{2} \cos 2q' \right\} + \cos (\sigma + q) \sin \frac{\beta}{2} \sin 2q'. \quad (16)$$

Поддерживающая сила определится как результат умножения абсолютной величины циркуляции

$$J = -2\pi C v_0$$

на ρv_0 ; направление силы получится, если ввиду отрицательного знака циркуляции мы повернем направление потока в далеких точках на прямой угол от оси OX к оси OY . Введя согласно высказанному в свое время замечанию множителем радиус окружности, получим

$$P = 2\pi\rho r v_0^2 C.$$

Принимая во внимание выражение C , формуле для P можно придать такой простой вид:

$$P = 2\pi\rho r v_0^2 \frac{\sin(\sigma + q + \varepsilon)}{\cos q} k; \quad (17)$$

при этом количества k и ε определяются формулами

$$k^2 = \sin^2\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) + \sin^2\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right)\cos 2q', \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin 2q'}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) - \sin\frac{\beta}{2}\cos 2q'};$$

последняя формула может быть преобразована к виду

$$\operatorname{tg}\left(\varepsilon - \frac{\beta}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} \frac{\sin 2q' + \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q'\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right)}{\sin 2q' + \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q'\right)}. \quad (19)$$

Имея в виду значения q и q' , определяемые формулами (15) и (19), усматриваем, что при достаточном превосходстве ширины заднего пера в сравнении с передним критический угол $q + \varepsilon$, на который крыло должно наклоняться вперед для того, чтобы поддерживающая сила обратилась в нуль, не только больше величины, соответствующей сомкнутому крылу, но может превзойти даже тот предел, которого такой угол достигает при заполнении материалом промежутка между перьями. В самом деле, в последнем случае этот угол имел бы величину $q + \frac{\beta}{4}$; но если

$$\sin 2q' + \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q'\right) = 2\sin\left(\frac{\beta}{4} + 2q'\right)\cos\frac{\beta}{4} > \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right),$$

то числитель в правой части формулы (19) положителен; ввиду того, что знаменатель, наверное, более нуля, мы имеем

$$\varepsilon > \frac{\beta}{4}.$$

Что касается величины k , определяемой формулой (18), то из соотношения

$$\sin^2 2q - k^2 = 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right)(\cos 2q' - \cos 2q)$$

возникает неравенство

$$k < \sin 2q.$$

Неравенство обратилось бы в равенство в предположении $\beta = 0$, т. е. при сдвиге перьев вплотную.

Чтобы сравнить поддерживающую силу с соответственной величиной для крыла в закрытом состоянии, положим в равенстве (17)

$$\beta = 0;$$

приходим к известной формуле

$$P_0 = 4 \pi \rho v_0^2 \sin q \sin (\sigma + q).$$

Вследствие высказанного замечания о величине коэффициента k , входящего в формулу (17), легко усмотреть, что раздвижное крыло с широким передним и более узким задним пером развивает меньшую подъемную силу, так как в этом предположении

$$\frac{P}{P_0} = \frac{k}{\sin 2q} \cdot \frac{\sin (\sigma + q + \varepsilon)}{\sin (\sigma + q)}$$

при отрицательном ε представляется в виде произведения двух правильных дробей.

В случае, когда заднее перо шире переднего, результаты получатся в более ясной форме, если мы вместо того, чтобы определить P формулой (17), придадим ее выражению иной вид, воспользовавшись для этого выражением циркуляции через коэффициент C , данный равенством (16). Таким образом, получим

$$P = \frac{2\pi\rho v_0^2}{\cos q} \left\{ \sin (\sigma + q) \left[\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) - \sin \frac{\beta}{2} \cos 2q' \right] + \right. \\ \left. + \cos (\sigma + q) \sin \frac{\beta}{2} \sin 2q' \right\} \quad (20)$$

и затем

$$N = \frac{P}{P_0} = \frac{\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right)}{\sin 2q} + \sin \frac{\beta}{2} \frac{\sin (2q' - h - \sigma)}{\sin 2q \sin (\sigma + q)}. \quad (21)$$

Отсюда сразу видно, что если $2q' > q$, то при достаточно малых углах атаки и большом раздвижении перьев коэффициент N может достигь величины, значительно превосходящей единицу.

Чтобы иметь выигрыш в подъемной силе, угол атаки должно определить из условия $N > 1$, откуда получаем

$$\operatorname{tg} (\sigma + q) < \frac{\sin 2q'}{\cos \left(\frac{\beta}{4} + 2q \right) - \cos \frac{\beta}{4}}. \quad (22)$$

§ 5. Числовые примеры. Для большей ясности и наглядности полученных результатов рассмотрим числовые примеры.

1) Положим

$$\alpha = 24, \quad \beta = 9, \quad \gamma = 3^\circ,$$

откуда

$$q = \frac{\alpha + \gamma}{4} = 6^\circ 45', \quad 2q' = \frac{\alpha - \gamma}{2} = 10^\circ 30'.$$

По формуле (22) имеем

$$\operatorname{tg}(\sigma + q) < \frac{\sin 10^\circ 30'}{\cos 10^\circ 30' - \frac{\cos 15^\circ 45'}{\cos 2^\circ 15'}}$$

и по подсчете получаем

$$\sigma < 81^\circ 52' - 6^\circ 45', \quad \sigma < 75^\circ.$$

Таким образом, неравенство (22) при взятых дужках удовлетворяется для всякого угла атаки.

Подсчитаем теперь коэффициент выигрыша при $\sigma = 0$ и $\sigma = 10^\circ$. В первом случае имеем

$$N = N_1 = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 13^\circ 30'} + \sin 4^\circ 30' \frac{\sin 3^\circ 45'}{\sin 13^\circ 30' \sin 6^\circ 45'},$$

во втором —

$$N = N_2 = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 13^\circ 30'} - \sin 4^\circ 30' \frac{\sin 6^\circ 15'}{\sin 13^\circ 30' \sin 16^\circ 45'}.$$

Вычисление дает

$$N_1 = 1,32370 + 0,18705 = 1,51075,$$

$$N_2 = 1,32370 - 0,12696 = 1,19674.$$

Добавим еще, что при угле атаки $\sigma = 2q' - q = 3^\circ 45'$

$$N = 1,32370,$$

как это можно усмотреть, приняв во внимание формулу (21).

Таким образом, выигрыш подъемной силы растет с уменьшением угла атаки. Он достигает 20% при угле в 10° , равен 32% для угла $3^\circ 45'$ и повышается до 51% в том случае, когда при полете хорда крыла горизонтальна.

Приведенный пример представляет известную крайность: здесь намеренно взято очень широкое отверстие в крыле с тем, чтобы указать, что и в этом случае выигрыш в подъемной силе по сравнению с крылом сомкнутым весьма значителен. Но если бы мы стали сравнивать ту же силу с ее величиной, определенной для крыла без выреза, то оказалось бы, конечно, что она много меньше последней. Тем не менее при столь значи-

тельном вырезе влияние взаимодействия перьев на изменение потока очень существенно. Можно простым подсчетом показать, что если бы мы вычислили подъемную силу каждого пера в отдельности, предположив, что другого в потоке нет, то сумма подъемных сил оказалась бы значительно меньше получаемой для крыла из двух перьев.

Положим, например, что хорда составного крыла направлена по потоку. Обозначим через P' числовую величину давящей сверху вниз силы на отдельно взятое переднее перо в том положении, которое оно занимает в сложном крыле, и через P'' — подъемную силу одного заднего при тех же условиях; рассмотрим для нашего примера отношения

$$N' = \frac{P'}{P_0} = \frac{\sin \frac{\gamma}{4} \sin \left(\sigma' - \frac{\gamma}{4} \right)}{\sin^2 q},$$

$$N'' = \frac{P''}{P_0} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\sigma'' + \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin^2 q};$$

здесь $\sigma' = 16^\circ 30'$, $\sigma'' = 6^\circ$ — углы атаки на последовательные перья, а P_0 — поддерживающая сила крыла со сдвинутыми перьями; произведя подсчет, найдем

$$N' = 0,2573, \quad N'' = 1,5730,$$

$$N'' - N' = 1,3157.$$

Таким образом, выигрыш должен был бы быть около 32%, между тем он оказался равным 51%. Заметим, однако, что при полном удалении переднего пера поддерживающая сила была бы P'' и, стало быть, переднее перо уменьшает ее на 5% от величины P_0 . Это явление зависит от того, что угол атаки в отдельно взятом крыле, представляемом задним пером, имеет довольно значительную величину. Такая потеря будет иметь место до тех пор, пока ширина щели между перьями не упадет ниже известного предела. Предел этот для крыла, составленного из перьев, опирающихся на заданные центральные углы, определяется неравенством

$$\frac{\sin q \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) + \sin (2q' - q) \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos q \sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta + \gamma}{2} \right)} \geq 1,$$

вытекающим из формулы (20) для силы P составного крыла, причем сила P'' крыла, представляемого одним задним пером, найдется из равенства (20), если положить

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad q = \frac{\alpha}{4}, \quad \sigma = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Из приведенного неравенства легко получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \leq \frac{\cos q}{2 \cos q' - \cos q} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4},$$

откуда ввиду незначительности углов q и q' следует, что β должно быть несколько менее $\gamma/2$, мало отличаясь от этой предельной величины.

2) Однако и при гораздо больших вырезах в крыле переднее перо уже начинает поддерживать аппарат, если угол атаки достаточно велик. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим новый пример, принимая

$$\gamma = 3, \beta = 6, \alpha = 27^\circ.$$

Самый подсчет произведем по иному плану, введя вспомогательный угол ε . Для этого, преобразуя первую из формул (18) и формулу (19), приведем их к виду

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \frac{k^2}{\sin^2 2q} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}, \\ k &= \sin 2q \cdot \sqrt{1 - \lambda}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{4} + \delta, \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \operatorname{tg}^2 \mu, \quad \cos 2\mu = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

В приводимом примере подсчет дает

$$\lambda = 0,0059, \quad \delta = 55', \quad \varepsilon = 2^\circ 25', \quad q = 7^\circ 30'.$$

Отношение подъемной силы сложного крыла к таковой же силе для крыла, сведенного к одному заднему перу, при одном и том же направлении потока, как легко усмотреть из формулы (17), точно выражается дробью

$$N'' = \frac{\sin q \sin (\sigma + q + \varepsilon) \sqrt{1 - \lambda}}{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\sigma + \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\alpha}{4} \right)},$$

где σ — угол встречи для сложного крыла; тот же угол для сравниваемого простого крыла согласно поставленному условию имеет величину

$$\sigma + \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Положив

$$\tau = \sigma + \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\alpha}{4},$$

легко приводим [4] неравенство $N'' > 1$ к виду

$$\operatorname{tg} \tau \geq \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right)}{1 - g},$$

$$g = \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \sqrt{1 - \lambda}}.$$

Подсчет для рассматриваемого случая дает

$$\tau = 13^\circ 34', \quad \sigma = 2^\circ 19'.$$

Произведя затем вычисление выигрыша подъемной силы по сравнению с сомкнутым крылом, в разбираемом теперь примере из формулы

$$N = \frac{P}{P_0} = \frac{k}{\sin 2q} \cdot \frac{\sin(\sigma + q + e)}{\sin(\sigma + q)} = \sqrt{1 - \lambda} \frac{\sin(\sigma + 9^\circ 55')}{\sin(\sigma + 6^\circ 45')}$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma = 0, & \quad N = 1,461, \\ \sigma = 3^\circ 45', & \quad N = 1,293, \\ \sigma = 10^\circ, & \quad N = 1,206. \end{aligned}$$

Таким образом, выигрыш в процентах по отношению к силе, развиваемой сдвинутым крылом, выражается соответственно числами 46, 29 и 20%. Сравнивая эти числа с полученными в ранее разобранным примере, усматриваем, что при относительно меньшем вырезе в крыле выигрыш растёт с уменьшением угла атаки несколько медленнее.

3) Чтобы яснее представить себе влияние выреза, сравним еще силу, развиваемую разрезным крылом, с подъемной силой сплошного крыла, которое получится по закрытии выреза материальной дугой. Обозначив через P_1 последнюю силу, будем иметь

$$N_1 = \frac{P}{P_1} = \frac{\sqrt{1 - \lambda} \sin q \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{4} + \delta \right)}{\sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{4} \right)}.$$

Формула (19), определяющая δ , показывает, что этот угол менее одной четверти β ; поэтому

$$\begin{aligned} N_1 &< \sqrt{1 - \lambda} \frac{\sin q \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{2} \right)}{\sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{4} \right)} = \\ &= \sqrt{1 - \lambda} \frac{\cos \left(\sigma + \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\sigma + 2q + \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \sigma - \cos \left(\sigma + 2q + \frac{\beta}{2} \right)} < 1. \end{aligned}$$

При угле $\sigma = 0$ найдем в двух рассмотренных нами числовых примерах для отношения N_1 следующие величины: для первого примера 0,8538, для второго 0,9158.

Таким образом, потеря в первом случае простирается до 15%, во вто-

ром — до 8,5% сравнительно с подъемною силою сплошного крыла без выреза. Она растет с увеличением величины отверстия в крыле несколько быстрее возрастания этой величины и во всяком случае оказывается менее, чем можно было бы ожидать, судя по размеру выреза, который в первом примере составляет 25%, а во втором — почти 17% общей поверхности крыла.

Потеря эта быстро растет с удалением отверстия от переднего края крыла. Если бы мы придали углам значения $\alpha = 24$, $\beta = 6$, $\gamma = 6^\circ$, так что вырез, сохраняя ту же величину, как во втором примере, отодвигается назад, то, произведя вычисления, нашли бы

$$\delta = 19'20'', \quad \lambda = 0,0105, \quad N_1 = 0,8595.$$

Сравнивая это значение с тем, которое соответствует первому примеру, где отверстие в полтора раза больше, отмечаем замечательный факт ничтожной разницы в потере силы. Таким образом, приходим к заключению, что потеря зависит несравненно более от положения на крыле заднего края выреза, чем от величины отверстия.

§ 6. Вогнутое разрезное крыло с произвольным заданным числом перьев. Переходим к обследованию общей задачи, когда число перьев в крыле равно n , где n — произвольное целое число. Формулы, соответствующие этому случаю, получаются из равенства (8) путем изменения, аналогичного с указанным в § 3 для плоского крыла.

Предположим опять, что последовательные перья представляются частями боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра, которые ограничены его образующими. Помещая начало координат в плоскости комплексного переменного z в центре окружности и направив действительную ось через задний конец крыла, обозначим через λ_m углы наклона радиусов, направленных к оконечностям перьев, помеченных соответствующими цифрами (рис. 5). Значок m пробегает последовательные натуральные числа до $2n - 1$ включительно, причем четные его значения соответствуют задним, а нечетные — передним краям последовательных перьев, начиная с самого заднего конца крыла, где $\lambda = \lambda_0 = 0$. Обозначим для простоты письма

$$e^{i\lambda_m} = a_m, \quad 4q = \sum_{k=1}^n \lambda_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{2k}, \quad e^{qi} = d; \quad (24)$$

$4q$, очевидно, представляет собою центральный угол, стягиваемый крылом, когда все его перья сдвинуты вплотную. Пусть далее

$$R = \sqrt{\frac{(z-1)(z-a_2)(z-a_4) \dots (z-a_{2n-2})}{(z-a_1)(z-a_3)(z-a_5) \dots (z-a_{2n-1})}};$$

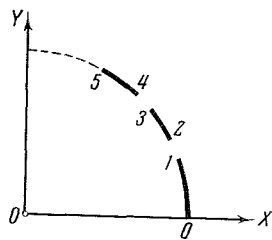


Рис. 5

тогда всем условиям задачи можно удовлетворить, положив

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{e^{-i\theta_0}}{2} - \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} + \frac{Hi}{z} + \left(\frac{e^{-i\theta_0}}{2} + \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} d^2 + \frac{Gd}{z} \right) R,$$

где v_0 по-прежнему обозначает скорость в далеких точках потока, θ_0 — ее угол с осью OX ; радиус окружности принят за единицу; реальные коэффициенты G и H надлежит определить из условия выпадения члена $1/z$ в области нуля.

Разложив R в этой области по степеням z и сохраняя в этом разложении постоянный член и первую степень z , найдем

$$R = \frac{1}{d^2} \left\{ 1 + \frac{z}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{2k}} - 1 \right) \right\},$$

а затем приходим к искомому соотношению

$$Hi + \frac{G}{d} + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{2k}} - 1 \right) e^{i\theta_0} = 0. \quad (25)$$

Заменяв здесь i на $-i$ и приняв во внимание формулы (24), находим равенство

$$-Hi + Gd + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} - 1 \right) e^{-i\theta_0} = 0,$$

которое вместе с предшествующим дает

$$iH \left(d + \frac{1}{d} \right) = 2iH \cos q = \frac{h_1}{2d} e^{-i\theta_0} - \frac{hd}{2} e^{i\theta_0}, \quad (26)$$

если введем обозначение

$$2h_1 = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} - 1, \quad (27)$$

а через $2h$ назовем сопряженное h_1 комплексное количество, заключенное в скобках в формуле (25).

Соотношение (26) по внешнему виду совершенно совпадает с соответствующим ему равенством (14) для крыла с двумя перьями; изменение состоит в замене h и h_1 новыми усложненными выражениями для более сложного крыла.

Обращаясь к изысканию коэффициента при $\frac{1}{z}$ в разложении $\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz}$ в далеких точках потока, легко получаем

$$R = 1 + \frac{h_1}{z}$$

и затем составляем для указанного коэффициента соотношение

$$iC = iH + Gd + \frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0},$$

которое при помощи равенства (25) дает опять прежнего вида формулу

$$C = 2H. \quad (28)$$

Вводя в формулы вместо угла θ_0 угол атаки σ , который связан с θ_0 соотношением

$$-\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda_{2n-1}}{2} - \sigma,$$

находим окончательно при посредстве формул (26) и (28)

$$\begin{aligned} C \cos q &= \frac{h_1}{2d \sqrt{a_{2n-1}}} e^{-i\sigma} + \frac{hd \sqrt{a_{2n-1}}}{2} e^{i\sigma} = \\ &= \frac{h_1}{2} e^{-i\left(\sigma+q+\frac{\lambda_{2n-1}}{2}\right)} + \frac{h}{2} e^{i\left(\sigma+q+\frac{\lambda_{2n-1}}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Определив по формулам (24) и (27) угол ε и число l так, чтобы удовлетворялось равенство

$$h_1 = ile^i \left(\frac{\lambda_{2n-1}}{2} - \varepsilon \right),$$

изобразим равенство (29) в виде

$$C \cos q = l \sin (\sigma + q + \varepsilon),$$

после чего получим для циркуляции скорости J выражение

$$J = -2\pi C v_0.$$

Затем, изменив единицу длины и обозначая через r радиус кривизны крыла в новых мерах, составляем формулу для поддерживающей силы

$$P = 2\pi \rho v_0^2 l \frac{\sin (\sigma + q + \varepsilon)}{\cos q}.$$

По внешнему виду эта формула совершенно совпадает с формулой (17) и отличается от нее лишь величиною коэффициента l и угла ε , которые ответственными образом усложняются.

Легко видеть, что вычисления для рассматриваемого случая не представляют никаких затруднений по существу и лишь будут более громоздкими вследствие увеличения числа подлежащих подсчету тригонометрических функций.

§ 7. Вращающий момент. Переходя к определению вращающего момента, мы остановимся исключительно на случае двухперого крыла, имея в виду получить более ясные заключения и не желая загромождать изло-

жение не представляющими существенного интереса весьма сложными и длинными формулами, которые имели бы место в общем случае.

Для нашей цели опять необходимо воспользоваться формулой

$$M = -\operatorname{Re}(\pi i K),$$

на которую мы ссылались в конце § 2. K по-прежнему обозначает коэффициент при $1/z$ разложения по отрицательным степеням переменного z функции $z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2$. Если

$$z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = z \left[v_0 e^{-i\theta_0} + \frac{iC}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{1}{z^3} P \left(\frac{1}{z} \right) \right]^2,$$

то легко усмотреть равенство

$$K = 2A v_0 e^{-i\theta_0} - C^2;$$

следовательно, реальная часть выражения iK совпадает с реальной частью члена $2A i v_0 e^{-i\theta_0}$; поэтому приведенная формула момента дает

$$-M = 2\pi \rho v_0 \operatorname{Re}(iA e^{-i\theta_0}). \quad (30)$$

При этом не следует упускать из виду, что положительный момент соответствует случаю сил, вращающих по направлению от оси OX к оси OY . Таким образом, определение вращающего момента сводится к отысканию коэффициента при $1/z^2$ в разложении по отрицательным степеням z функции $\frac{dw}{dz}$ в далеких точках потока.

Формула (4) дает для этой области, если сохранить обратные квадраты z , следующее выражение:

$$\begin{aligned} R &= \left(1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} \right) \left(1 - \frac{b}{2z} - \frac{b^2}{8z^2} \right) \left(1 + \frac{a}{2z} + \frac{3a^2}{8z^2} \right) \left(1 + \frac{c}{2z} + \frac{3c^2}{8z^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{h_1}{z} + \frac{g_1}{2z^2} + \frac{h_1^2}{2z^2}; \end{aligned}$$

здесь мы пользуемся сокращенными обозначениями

$$2h_1 = a + c - b - 1, \quad 2g_1 = a^2 + c^2 - b^2 - 1. \quad (31)$$

Из формулы (8) находим

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} e^{-i\theta_0} + \frac{iH}{z} - \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} + \left(\frac{1}{2} e^{-i\theta_0} + \frac{Gd}{z} + \frac{d^2 e^{i\theta_0}}{2z^2} \right) \left(1 + \frac{h_1}{z} + \frac{g_1 + h_1^2}{2z^2} \right).$$

Воспользовавшись, далее, формулами (11) и (4) § 4, определяем искомый коэффициент A соотношением

$$\frac{1}{v_0} A = \frac{d^2 - 1}{2} e^{i\theta_0} + \frac{i h_1 C}{2} + \frac{g_1 - h_1^2}{4} e^{-i\theta_0},$$

а затем, переходя к обычным мерам длины и обозначив радиус цилиндра,

из которого вырезано крыло, через r , при помощи равенства (30) имеем

$$-M = \pi r^2 v_0^2 \operatorname{Re} \left[i \left(d^2 - 1 + i h_1 C e^{-i\theta_0} + \frac{g_1 - h_1^2}{2} e^{-2i\theta_0} \right) \right]. \quad (32)$$

Введя по формуле

$$-\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

угол атаки σ , получим в результате простых преобразований с помощью равенств (5) и (10)

$$h_1 e^{-i\theta_0} = i e^{-\sigma i} \left(e^{\frac{\alpha i}{2}} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} - e^{-\frac{\gamma i}{2}} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

откуда, пользуясь указанными в § 4 сокращенными обозначениями (18) и (15)

$$k^2 = \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \cos 2q',$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin 2q'}{\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) - \sin \frac{\beta}{2} \cos 2q'}, \quad q = \frac{\alpha + \gamma}{4}, \quad q' = \frac{\alpha - \gamma}{4},$$

легко находим

$$h_1 e^{-i\theta_0} = -k e^{-i(\alpha + \varepsilon)}.$$

При посредстве формул (5) и (31) получаем

$$g_1 e^{-2i\theta_0} = -e^{-2\sigma i} \{ e^{\alpha i} \cos(\beta + \gamma) - e^{-\gamma i} \cos(\alpha + \beta) \};$$

положив

$$m^2 = \sin^2(\beta + 4q) + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin(\beta + 4q) \cos 4q',$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \beta \sin 4q'}{\sin(\beta + 4q) - \sin \beta \cos 4q'}, \quad (33)$$

мы можем это равенство преобразовать к виду

$$i g_1 e^{-2i\theta_0} = m e^{-(2\sigma + \eta)i}.$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i d^2) &= -\sin 2q, \\ \operatorname{Re}(h_1 e^{-i\theta_0}) &= -k \cos(\sigma + \varepsilon), \\ \operatorname{Re}(i h_1^2 e^{-2i\theta_0}) &= k^2 \sin 2(\sigma + \varepsilon), \\ \operatorname{Re}(i g_1 e^{-2i\theta_0}) &= m \cos(2\sigma + \eta), \end{aligned}$$

вследствие чего формула (32) приводится к равенству

$$\frac{M}{\pi r^2 v_0^2} = \sin 2q - \frac{k^2}{\cos q} \sin(q + \sigma + \varepsilon) \cos(\sigma + \varepsilon) + \frac{k^2}{2} \sin 2(\sigma + \varepsilon) - \\ - \frac{m}{2} \cos(2\sigma + \eta);$$

здесь коэффициент C заменен по формуле

$$C = \frac{k}{\cos q} \sin(\sigma + q + \varepsilon);$$

это выражение получается из равенства (16) путем легкого преобразования при помощи формулы (18).

Преобразуя далее два средних члена найденной для момента формулы, находим

$$\frac{M}{\pi r^2 v_0^2} = \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q \cos^2(\sigma + \varepsilon) - \frac{m}{2} \cos(2\sigma + \eta), \quad (34)$$

или, восстановив в последнем слагаемом явные выражения $m \cos \eta$ и $m \sin \eta$ при посредстве формул (33),

$$\frac{M}{\pi r^2 v_0^2} = \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q \cos^2(\sigma + \varepsilon) - \\ - \left\{ \sin(\beta + 4q) - \sin \beta \cos 4q' \right\} \frac{\cos 2\sigma}{2} + \sin \beta \sin 4q' \frac{\sin 2\sigma}{2}.$$

Формулу для момента M' в случае сомкнутого крыла получим отсюда при

$$\beta = \varepsilon = 0 \text{ и } k^2 = \sin^2 2q.$$

Она легко приводится к следующему чрезвычайно простому виду:

$$M' = 4\pi r^2 v_0^2 \sin q \cos^3 q \sin^2 \sigma. \quad (35)$$

Наконец, момент M_1 , вращающий сплошное крыло без выреза, найдется из формулы (35) заменой q через $q_1 = q + \frac{\beta}{4}$:

$$M_1 = 4\pi r^2 v_0^2 \sin q_1 \cos^3 q_1 \sin^2 \sigma. \quad (36)$$

§ 8. Место метacentра. Обозначим через x и y координаты метacentра, т. е. точки пересечения линий, по которым действует поддерживающая сила при данном угле встречи и при угле, бесконечно мало от него отличающемся. Величина координат найдется из уравнения

$$x \sin \sigma - y \cos \sigma = \frac{M}{P}$$

и из результата дифференцирования его по σ .

При помощи формул (17) и (34) придаем этому уравнению вид

$$(x - a) \cos (2\sigma + q + \varepsilon) + (y - b) \sin (2\sigma + q + \varepsilon) = \\ = x \cos (q + \varepsilon) - y \sin (q + \varepsilon) - c, \quad (37)$$

где

$$a = \frac{r \cos q}{2k} \{k^2 \cos (q - \varepsilon) \operatorname{tg} q + m \cos (q + \varepsilon - \eta)\}, \\ b = \frac{r \cos q}{2k} \{k^2 \sin (q - \varepsilon) \operatorname{tg} q + m \sin (q + \varepsilon - \eta)\}, \quad (38) \\ c = \frac{r \cos q}{2k} (2 \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q).$$

Вспомогательные коэффициенты, как было показано выше и как можно убедиться, преобразуя уравнения (33) тем же приемом, которым мы воспользовались в § 5 для формул (18) и (19), имеют следующие значения:

$$k = \sin 2q \sqrt{1 - \lambda}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{4} + \delta, \\ m = \sin 4q \sqrt{1 - \lambda'}, \quad \eta = \frac{\beta}{4} + \delta'; \quad (39)$$

при этом по формуле (23) § 5

$$\lambda = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\sin^2 2q}, \\ \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \operatorname{tg}^2 \mu, \quad \cos 2\mu = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}, \quad (40) \\ \lambda' = \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin^2 4q}, \\ \operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \mu', \quad \cos 2\mu' = \frac{2 \sin \gamma \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \gamma)};$$

отсюда легко усматриваем, что

$$\cos 2\mu' < \cos 2\mu, \quad \mu' > \mu, \quad \delta' > \delta.$$

Приведенные формулы имеют место в предположении

$$\sin \frac{\alpha - \gamma}{2} > 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Продифференцировав равенство (37), находим для определения координат метacentра два уравнения:

$$(x - a) \cos (2\sigma + q + \varepsilon) + (y - b) \sin (2\sigma + q + \varepsilon) = \\ = x \cos (q + \varepsilon) - y \sin (q + \varepsilon) - c, \quad (41) \\ (x - a) \sin (2\sigma + q + \varepsilon) - (y - b) \cos (2\sigma + q + \varepsilon) = 0;$$

отсюда по исключении угла атаки имеем уравнение искомого геометрического места

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - \{x \cos (q + \varepsilon) - y \sin (q + \varepsilon) - c\}^2 = 0. \quad (42)$$

Таким образом, геометрическое место метacentра есть парабола с фокусом в точке (a, b) и директрисой, уравнение которой есть

$$x \cos (q + \varepsilon) - y \sin (q + \varepsilon) - c = 0; \quad (43)$$

директриса, отстоя от центра на расстояние c , по направлению совпадает с критическим направлением потока, когда поддерживающая сила обращается в нуль. Параметр параболы определится как расстояние фокуса от директрисы и имеет величину

$$p = c - a \cos (q + \varepsilon) + b \sin (q + \varepsilon),$$

откуда, воспользовавшись формулами (38), имеем

$$p = \frac{r \cos q}{2k} \{ (2 - k^2) \sin 2q - m \cos (2q + 2\varepsilon - \eta) \}. \quad (44)$$

Заменив k и m превышающими их величинами $\sin 2q$ и $\sin 4q$, легко убеждаемся, что

$$p > \frac{r \sin 2q \cos q}{2k} \{ 1 + \cos^2 2q - 2 \cos 2q \cos (2q + 2\varepsilon - \eta) \} > 0;$$

таким образом результат подстановки координат фокуса в формулу (36) есть величина отрицательная, и, следовательно, парабола своей выпуклостью направлена в ту же сторону, как и дуга крыла.

Последнюю из формул (38), определяющую расстояние от центра крыла до директрисы, переписываем в виде

$$c = \frac{r \cos q}{2k} \{ 2 \sin 2q \cos^2 q + \lambda \sin^2 2q \operatorname{tg} q \}. \quad (45)$$

Величина параметра тесно связана с опрокидывающим моментом M_0 сил давления при критическом направлении потока. В самом деле, если в формуле (34) мы положим

$$\sigma = -q - \varepsilon,$$

то найдем

$$\frac{2M_0}{\pi r v_0^2} = (2 - k^2) \sin 2q - m \cos (2q + 2\varepsilon - \eta)$$

и, следовательно, из формулы (44) получаем простое соотношение

$$p = \frac{M_0 \cos q}{\pi r v_0^2 k}. \quad (46)$$

Эта формула имеет весьма несложное рациональное объяснение и может

быть непосредственно выведена следующим образом. Определим момент M_2 сил давления относительно фокуса параболы. Обозначая через R направленный к метacentру радиус-вектор и принимая в соображение, что линия действия подъемной силы касается параболы и составляет с указанным радиусом-вектором тот же угол

$$\tau = \sigma + q + \varepsilon,$$

как и с направлением перпендикулярной к директрисе оси параболы, получим для плеча силы d величину

$$d = R \sin \tau = \frac{M_2}{P} = \frac{M_2 \cos q}{2\pi \rho v_0^2 k \sin \tau};$$

а так как по свойству параболы

$$p = 2d \sin \tau = 2R \sin^2 \tau,$$

то будем иметь

$$p = \frac{M_2 \cos q}{\pi \rho v_0^2 k}.$$

При критическом направлении потока силы давления приводятся к паре, а потому величина вращающего момента не зависит в этом случае от выбора центра моментов.

Но формула (46) имеет гораздо более широкое значение: она показывает, что момент сил давления относительно фокуса не зависит от направления потока; его величина

$$M_2 = M_0 = \frac{\pi \rho v_0^2 k}{\cos q} p$$

равна опрокидывающему моменту критической пары. Таким образом, эффект потока может быть выражен поддерживающей силой, приложенной в фокусе параболы, и дополнительной постоянной парой, вращающей крыло вперед.

Чтобы яснее представить себе расположение места метacentра относительно крыла, определим еще положение нашей параболы по отношению к центру дуги и найдем координаты x' и y' метacentра для потока, параллельного хорде крыла. Первый вопрос решается заменой текущих координат в уравнении (42) нулями. Тогда левая часть его приобретает значение

$$l = a^2 + b^2 - c^2 = \frac{r^2 \cos^2 q}{4k^2} [m^2 + 2mk^2 \operatorname{tg} q \cos(2\varepsilon - \eta) + 8k^2 \sin^2 q - 4 \sin^2 2q].$$

Величина l увеличивается, если в положительных слагаемых в квадратных скобках мы заменим m и k большими их величинами $\sin 4q$ и $\sin 2q$,

а угол $2\varepsilon - \eta$ заместим нулем. Таким образом,

$$l < \frac{r^2 \cos^2 q}{4k^2} [\sin^2 4q + 2 \sin 4q \sin^2 2q \operatorname{tg} q + 8 \sin^2 2q \sin^2 q - 4 \sin^2 2q].$$

Подсчитывая правую часть этого выражения, убеждаемся, что она равна нулю, и потому

$$l < 0.$$

Отсюда заключаем, что центр дуги лежит внутри параболы, ибо его расстояние от фокуса менее, чем от директрисы.

Обращаясь ко второму вопросу, имеем из уравнений (41), полагая в них $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} 2y' \sin(q + \varepsilon) &= a \cos(q + \varepsilon) + b \sin(q + \varepsilon) - c = \\ &= \frac{r \cos q}{2k} (2k^2 \operatorname{tg} q \cos^2 \varepsilon + m \cos \eta - 2 \sin 2q), \\ x' \sin(q + \varepsilon) &= a \sin(q + \varepsilon) - b \cos(q + \varepsilon) + y' \cos(q + \varepsilon) = \\ &= \frac{r \cos q}{2k} (k^2 \operatorname{tg} q \sin 2\varepsilon + m \sin \eta) + y' \cos(q + \varepsilon). \end{aligned}$$

Подставляя в множитель, заключенный в скобках в выражении y' , увеличенные значения вместо k и m и заменив ε и η нулями, мы увеличиваем эту величину; а потому

$$2y' \sin(q + \varepsilon) < \frac{r \cos q}{2k} (2 \sin^2 2q \operatorname{tg} q + \sin 4q - 2 \sin 2q) = 0,$$

т. е.

$$y' < 0;$$

поддерживающая сила лежит позади центра полной дуги крыла.

Что касается знака x' , то он может быть положительным и отрицательным; если

$$\sin \frac{\alpha - \gamma}{2} > 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

то надлежащим подбором углов α , β , γ всегда можно сделать $x' > 0$. В самом деле, умножив его выражение на $\sin(q + \varepsilon)$ и подставив y' , мы получим соотношение

$$\begin{aligned} I = \frac{2x' \sin^2(q + \varepsilon) k}{r \cos q} &= k^2 \operatorname{tg} q \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin(q + \varepsilon) + \frac{m}{2} \{\cos(q + \varepsilon - \eta) + \\ &+ \sin \eta \sin(q + \varepsilon)\} + k^2 \sin q \cos \varepsilon - \sin 2q \cos(q + \varepsilon). \quad (47) \end{aligned}$$

Так как при выполнении вышеприведенного неравенства мы на основании формулы (39) имеем

$$\frac{\beta}{4} < \varepsilon < \frac{\beta}{2}, \quad \eta > \frac{\beta}{2},$$

$$q + \varepsilon - \eta = q - \frac{\beta}{4} - \delta' + \delta < q - \frac{\beta}{4},$$

то

$$I > \frac{k^2}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \operatorname{tg} q + \frac{m}{2} \left\{ \cos \left(q - \frac{\beta}{4} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \right\} + k^2 \sin q \cos \frac{\beta}{2} - \sin 2q \cos \left(q + \frac{\beta}{4} \right).$$

Это неравенство можно переписать, пользуясь формулами (40), в виде

$$\frac{I}{\sin 2q} > \sin q (1 - \lambda) \left\{ \sin \frac{\beta}{2} \sin q \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) + \sin 2q \cos \frac{\beta}{2} \right\} + \\ + \sqrt{1 - \lambda'} \cos 2q \left\{ \cos \left(q - \frac{\beta}{4} \right) + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \right\} - \cos \left(q + \frac{\beta}{4} \right).$$

Из рассмотрения правой части ясно, что ввиду малости числа λ' и незначительной сравнительно стрелки крыла можно достичь того, чтобы эта часть была положительна, а тогда

$$I > 0$$

и, следовательно,

$$x' > 0.$$

Вычислим эту координату для второго примера, рассмотренного в § 5. Имеем

$$\alpha = 27, \quad \beta = 6, \quad \gamma = 3^\circ, \quad q = 7^\circ 30', \quad \lambda = 0,0059, \quad \varepsilon = 2^\circ 25'; \quad (48)$$

при помощи формул (40) находим

$$\lambda' = 0,02336, \quad \eta = 4^\circ 54'. \quad (49)$$

Подставив эти числа в формулу (47) и произведя подсчет, получим

$$x' = 0,264r.$$

Теперь мы имеем все, что нам нужно, для сравнения геометрических мест метacentра у нашего составного крыла и крыла сплошного, которое из него получится, если вырез закрыт. В этом последнем случае соответственная парабола получится, если мы в формулах для составного крыла положим сначала $\beta = 0$, а затем заменим q соответственной величиною $q_1 = q + \beta/4$, где β имеет прежнюю величину. Так как $\varepsilon = \eta = \lambda = \lambda' = 0$ при $\beta = 0$, то из формул (38), (39), (42), (43) и (44) соответственно находим

$$a_1 = r \cos^4 q_1, \quad b_1 = r \cos^3 q_1 \sin q_1, \quad c_1 = r \cos^3 q_1, \\ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - (x \cos q_1 - y \sin q_1 - c_1)^2 = 0, \quad (50)$$

$$x \cos q_1 - y \sin q_1 - c_1 = 0, \quad (51)$$

$$p = 2r \cos^3 q_1 \sin^2 q_1.$$

Подставив в уравнение (50) координаты начала координат, усматриваем, что уравнение удовлетворяется, и, стало быть, парабола проходит через

центр дуги. Она касается оси x . Сравнивая, далее, найденное значение c_1 со значением c в формуле (45) и имея в виду неравенства

$$k < \sin 2q, \quad \cos q_1 < \cos q,$$

убеждаемся, что

$$c > c_1.$$

Таким образом, директриса в случае составного крыла дальше отстоит от центра, чем в случае крыла сплошного.

Переходя к сравнению параметров парабол, имеем в результате простого преобразования формулы (44) при помощи формулы (39)

$$p = \frac{r \cos q}{2k} \left[(1 + \lambda) \sin^3 2q + (1 - \sqrt{1 - \lambda'}) \sin 4q \cos 2q - \right. \\ \left. - 2m \sin \frac{\eta - 2\varepsilon}{2} \sin \left(2q + \frac{2\varepsilon - \eta}{2} \right) \right].$$

Последнее слагаемое в скобках есть величина отрицательная, так как из формул (40) имеем

$$\frac{\cos 2\mu'}{\cos 2\mu} = \frac{\cos \left(\alpha + \beta - \frac{\gamma}{2} \right) + \cos \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} \right)}{\cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) + \cos \frac{\beta + \gamma}{2}} < 1,$$

поэтому

$$\delta' > 2\delta, \quad \eta > 2\varepsilon.$$

Таким образом,

$$p < p' = r \cos q \left\{ 2 \frac{1 + \lambda}{\sqrt{1 - \lambda}} \sin^2 q \cos^2 q + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda'}}{\sqrt{1 - \lambda}} \cos^2 2q \right\}.$$

Составим теперь отношение

$$\frac{p'}{p_1} = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{1 - \lambda}} \cdot \frac{\cos^3 q \sin^2 q}{\cos^3 q_1 \sin^2 q_1} + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda'}}{\sqrt{1 - \lambda}} \cdot \frac{\cos q \cos^2 2q}{2 \cos^3 q_1 \sin^2 q_1}.$$

При достаточной ширине отверстия в крыле первый член будет меньше единицы ввиду малости последнего его множителя, а второй является малым, так как число

$$1 - \sqrt{1 - \lambda'} < \frac{\lambda'}{2}$$

есть величина очень малая. Поэтому всегда можно подобрать ширину отверстия и его место на крыле так, чтобы было

$$p' < p_1,$$

а тогда а fortiori окажется

$$p < p_1.$$

В подтверждение сказанного приложим формулы к рассмотренному в § 5 второму примеру; полагаем по формулам (48) и (49):

$$q = 7^\circ 30'; \quad q_1 = 9^\circ; \quad \lambda = 0,0059; \quad \lambda' = 0,02336.$$

После подсчета оказывается

$$\frac{P'}{P_1} = 0,7121 + 0,2298 = 0,9419.$$

Стало быть, параметр параболы вследствие выреза в крыле уменьшается.

Принимая в соображение все высказанные замечания, приходим к следующему заключению о взаимном расположении сравниваемых геометрических мест. Парабола, соответствующая разрезному крылу, в той части, где расположены метацентры для углов встречи, близких к нулю, а также больших нуля, проходит ближе к заднему краю, чем в случае сплошного крыла. Так как вследствие меньшей величины параметра и более далекой директрисы ее вершина будет лежать вне параболы сплошного крыла, ось отклонена на угол ε назад и метацентр для направления потока по хорде лежит выше центра крыла и ближе к дуге, то это последнее обстоятельство будет справедливо для всех углов встречи. Таким образом, вырез в крыле делает его гораздо более устойчивым, чем крыло сплошное; разумеется, вырез этот должен быть достаточных размеров и иметь надлежащее место на крыле, располагаясь в передней его части.

Примерное расположение геометрических мест изображено на прилагаемой рис. 6, где пунктирная кривая есть парабола для сплошного крыла, а непрерывной линией намечена парабола для крыла с вырезом BC . Прямая M_1N_1 , проходящая через середину стрелки параллельно DE , представляет директрису, соответствующую первой параболе, MN изображает директрису второй.

§ 9. Заключение. На основании изложенной схематической теории разрезного крыла можно ожидать, что оно, не понижая существенно подъемной силы и, во всяком случае, при правильном устройстве давая аэроплану значительно большую поддержку по сравнению со сплошным крылом равной поверхности, должно весьма повысить устойчивость аппарата. Это — главное преимущество описываемого крыла.

Что касается лобового сопротивления, то наша теория по понятным причинам его совершенно не может определить. По этому поводу можно лишь наметить некоторые соображения качественного характера. Из прореза в крыле будут вырываться образующиеся благодаря вязкости вихри

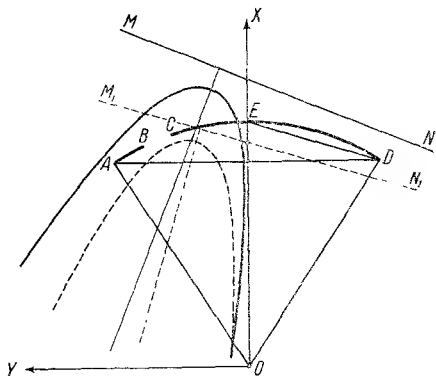


Рис. 6

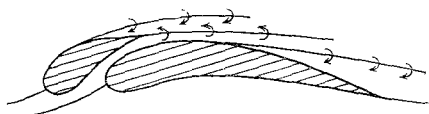


Рис. 7

(рис. 7). При этом вихрь, сбегаящий с нижней поверхности переднего пера, образовавшийся на большей обтекаемой поверхности, окажется более энергичным, чем тот, который будет отделяться с ограничивающей прорез части поверхности крыла, и все вихри будут убегать вдаль быстрее, чем в случае отсутствия прореза. По этой причине может оказаться, что лобовое сопротивление от устройства выреза в крыле не только не увеличится, но даже уменьшится, ибо не будет происходить накопления вихревого хвоста позади крыла. Сверх того, непосредственно над задним пером можно ожидать несколько меньшего давления, чем в случае отсутствия выреза, что должно повлечь возрастание поддерживающей силы.

Наконец, благодаря тому же понижению давления струйки будут лучше прилегать к верхней поверхности заднего пера, и потому возможно, что рост подъемной силы с возрастанием угла встречи будет наблюдаться в более широких пределах увеличения этого угла, чем это имеет место при сплошном крыле.

О ТРЕНИИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ШИПОМ И ПОДШИПНИКОМ¹

(совместно с Н. Е. Жуковским)

§ 1. Движение вязкой жидкости, заключенной в смазочном слое между шипом и подшипником, было сначала исследовано Н. П. Петровым, который положил основание гидродинамической теории трения шипа. Н. П. Петров ² принимал смазочный слой ограниченным двумя концентрическими цилиндрами. Влияние на рассматриваемое явление эксцентricности шипа и подшипника было с помощью приближенного анализа обстоятельно исследовано Осборном Рейнольдсом ³. В этом году довольно сложный анализ Рейнольдса упрощен Зоммерфельдом ⁴, который установил теоретическую зависимость между моментом сил трения, нагрузкою и скоростью шипа и показал, что пропорциональность момента сил трения его скорости или его нагрузке суть два предельных случая общего закона трения шипа в подшипнике, причем первый предельный случай получается при больших, а второй при малых скоростях шипа (сравнительно с нагрузкою). Зоммерфельд упоминает в начале своей статьи, что точное решение задачи о движении вязкой жидкости в двух измерениях между двумя эксцентricескими окружностями, равно как и решение аналитической задачи о равновесии упругой пластины, ограниченной двумя эксцентricескими окружностями, до сих пор еще не найдено. В предлагаемой статье мы даем это точное решение задачи о движении смазочного слоя и получаем из него при предположении, что слой весьма тонок, формулы Зоммерфельда.

§ 2. Мы будем пользоваться биполярными координатами Неймана, причем некоторые формулы, относящиеся к ним, здесь приведем. Связь между прямоугольными декартовыми координатами x, y и координатами Неймана ξ, η устанавливается следующими соотношениями между комплексными переменными $z = x + yi$ и $\zeta = \xi + \eta i$ (рис. 1):

$$\ln \frac{z - a}{z + a} = i\zeta, \quad z = ai \operatorname{ctg} \left(\frac{\zeta}{2} \right). \quad (1)$$

¹ Написано совместно с Н. Е. Жуковским и впервые опубликовано в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XIII, вып. 1, 1906, стр. 24—33.

² Трение в машинах и влияние на него смазывающих масел. Инженерный журнал, 1883.

³ *Reynolds Osborne*. Philos. Transactions of R. Soc. of London, 1886.

⁴ *Sommerfeld*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1904.

Первая из формул показывает, что

$$\xi' = \varphi - \varphi', \quad \eta = \ln \frac{\rho'}{\rho},$$

где ρ и ρ' — радиусы-векторы, проведенные к рассматриваемой точке от полюсов F и F' , отстоящих от начала координат O на расстоянии a , а φ и φ' суть углы между этими радиусами и осью абсцисс Ox .

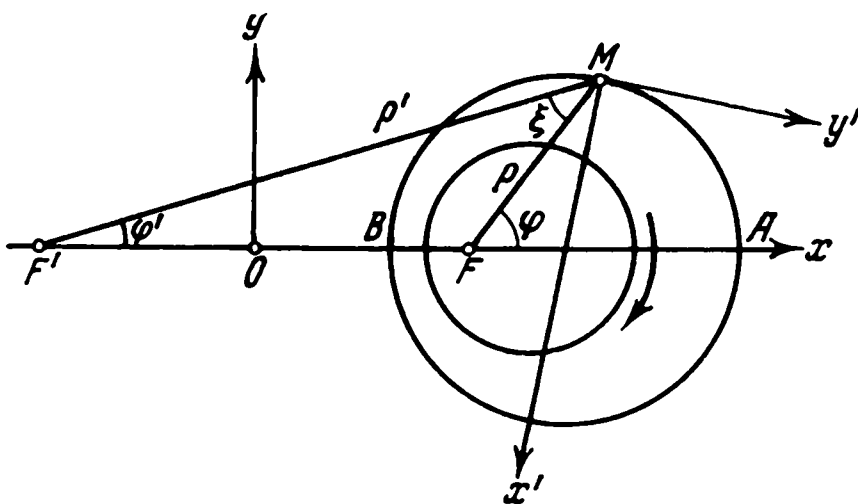


Рис. 1

Вторая из формул (1) приводится к виду

$$x + yi = ai \frac{\sin(\xi + \eta i)}{1 - \cos(\xi + \eta i)}$$

и дает по сравнении действительных и мнимых частей

$$x = a \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad y = a \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \quad (2)$$

Линии $\xi = \text{const}$ суть окружности, вмещающие хорду FF' , а линии $\eta = \text{const}$ суть ортогональные окружности, уравнения которых получаются через исключение ξ из формул (2). Это исключение удобно сделать, составляя сначала выражение

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{\operatorname{ch} \eta + \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}$$

и потом подставляя сюда

$$\cos \xi = \frac{x \operatorname{ch} \eta - a \operatorname{sh} \eta}{x}.$$

Мы получаем уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax \operatorname{cth} \eta + a^2 = 0,$$

которое показывает, что радиус r упомянутых кругов выражается формулой

$$r = \pm \frac{a}{\operatorname{sh} \eta}, \quad (3)$$

а их центры лежат на оси Ox на расстояниях

$$l = a \operatorname{cth} \eta \quad (4)$$

от начала координат O .

Величина H первого дифференциального параметра рассматриваемой изотермической системы координат найдется по формуле

$$\frac{1}{H^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

и будет на основании уравнений (2) такой:

$$H = \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi). \quad (5)$$

Вся рассматриваемая система криволинейных координат может быть охарактеризована величинами r_1 и r_0 радиусов двух ее кругов и разностью $\sigma = \eta_1 - \eta_0$ соответствующих им параметров. Определяем η_1 и η_0 по σ . Пусть $\delta = r_0 - r_1$, $k = \delta/r_1$. На основании уравнения (3)

$$\delta = \frac{r_1}{\operatorname{sh} \eta_0} (\operatorname{sh} \eta_1 - \operatorname{sh} \eta_0),$$

откуда

$$\operatorname{sh} \eta_1 = (1 + k) \operatorname{sh} \eta_0. \quad (6)$$

Далее,

$$\operatorname{sh} (\eta_0 + \sigma) = \operatorname{sh} \eta_1 = (1 + k) \operatorname{sh} \eta_0,$$

$$\operatorname{sh} (\eta_1 - \sigma) = \operatorname{sh} \eta_0 = \frac{\operatorname{sh} \eta_1}{1 + k}$$

и потому

$$\operatorname{cth} \eta_0 = \frac{1 + k - \operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh} \sigma}, \quad \operatorname{cth} \eta_1 = \frac{(1 + k) \operatorname{ch} \sigma - 1}{(1 + k) \operatorname{sh} \sigma}. \quad (7)$$

Так как наименьшая величина $\operatorname{cth} \eta_0$ получается при $\eta_0 = \infty$ и есть единица, то σ может изменяться от значения 0 до значения $\ln(1 + k)$.

На основании уравнения (4) эксцентрическое расстояние e между центрами рассматриваемых кругов будет

$$e = \frac{r_1 \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_0}, \quad (8)$$

так что, называя вместе с Зоммерфельдом через α отношение $\frac{e}{\delta}$, найдем:

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_1 - \operatorname{sh} \eta_0}. \quad (9)$$

К сказанному следует еще прибавить указание на некоторые определенные интегралы, которое будет весьма полезно в дальнейшем изложении.

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \operatorname{ch} m\eta + y \sin m\xi \operatorname{sh} m\eta) d\xi &= 2\pi a, \\ \int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \operatorname{sh} m\eta + y \sin m\xi \operatorname{ch} m\eta) d\xi &= 2\pi a, \\ \int_0^{2\pi} x \cos m\xi d\xi &= 2\pi a e^{-m\eta}, \end{aligned} \quad (10)$$

где m — какое-нибудь целое и положительное число, которое для первой и третьей формул может быть и нулем.

Третье из уравнений (10) получается через сложение первых двух, предварительно умноженных на $\operatorname{ch} m\eta$ и $-\operatorname{sh} m\eta$. Первое уравнение может быть выведено из рассмотрения интеграла

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \cos m\xi d\xi,$$

в котором при интегрировании η считаем постоянным. Этот интеграл на плоскости комплексного переменного $\xi + \eta i$ берется по отрезку прямой

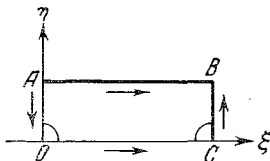


Рис. 2

$AB = 2\pi$, параллельной оси $O\xi$, и может быть заменен интегралом, взятым по контуру $AOCB$ с обходом точек бесконечности, падающих в O и C (рис. 2); при этом обходе мы пройдем по четвертям весьма малых кругов, имеющих центры в O и C . Так как в этих центрах имеем для точки O

$$\lim \left(\xi \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \cos m\xi \right) = 2$$

и для точки C

$$\lim \left[(\xi - 2\pi) \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \cos m\xi \right] = 2,$$

то при упомянутых обходах интеграл получает приращение $-\frac{\pi}{2}i \cdot 2$, и все приращение его при обходах будет $-2\pi i$. Что касается интегриации по отрезкам AO и CB , то здесь результаты интегриации уничтожатся, так как

от замены ξ на $\xi + 2\pi$ подынтегральная функция не изменяется. Точно так же результат интегрирования по отрезку OC будет нуль, так как в точках $(\xi, 0)$ и $(2\pi - \xi, 0)$ подынтегральная функция имеет значения, равные по величине, но противоположные по знаку. На основании всего сказанного

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \cos m\xi d\xi = -2\pi i,$$

что на основании уравнений (1) можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} (x + yi) (\cos m\xi \operatorname{ch} m\eta - i \sin m\xi \operatorname{sh} m\eta) d\xi = 2\pi a.$$

Сравнение действительных частей дает нам первое из уравнений (10). Чтобы получить второе уравнение (10), рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin m\xi d\xi.$$

Заменив интеграцию по прямой AB (фиг. 2) интеграцией по контуру $AOCB$, мы не должны будем обходить точки O и C , так как они не являются точками бесконечности. Результаты интеграции по AO и по CB взаимно уничтожаются, а результат интеграции по OC может быть представлен в виде

$$2 \int_0^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin m\xi d\xi$$

и, так как

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin m\xi d\xi = \pi,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \sin m\xi d\xi = 2\pi.$$

Подстановка сюда уравнения (1) и сравнение действительных частей дает нам второе уравнение (10).

§ 3. Уравнения движения вязкой жидкости в двух измерениях при отбрасывании сил инерции, которые малы сравнительно с силами трения, могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (11)$$

где ω представляет угловую скорость вихря, определенную по компо-

нентам u , v скорости жидкости формулой

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (12)$$

и считаемую положительной при вращении вихря по стрелке часов, p есть гидродинамическое давление, а μ — коэффициент вязкости жидкости.

Уравнения (11) показывают, что комплексная величина $\frac{p}{\mu} + 2\omega i$ есть аналитическая функция от z , а следовательно, и функция от ξ . Введем обозначения операций:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

на основании сказанного имеем

$$\Delta(2\omega) = 0, \quad (\nabla 2\omega) = 0. \quad (13)$$

Назовем через W функцию тока, т. е. количество жидкости, протекающей в единицу времени между двумя линиями тока, и положим

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}. \quad (14)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12), найдем по уравнению (5)

$$2\omega = \Delta(W) = \frac{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}{a^2} \nabla W, \quad (15)$$

вследствие чего по уравнению (13)

$$\Delta \Delta W = \nabla \{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2 \nabla W\} = 0. \quad (16)$$

Определив функцию тока W , удовлетворяющую уравнению (16) и граничным данным задачи, мы будем знать по уравнению (15) величину 2ω , а следовательно, и величину p/μ , так как

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial 2\omega}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\partial 2\omega}{\partial \xi}. \quad (17)$$

Функцию W мы представим в виде суммы членов, удовлетворяющих по-разному уравнению (16). Такими членами, очевидно, являются

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \eta, \frac{x^2 + y^2}{2a^2} + \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} &= \frac{\cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \frac{x\eta}{a} = \frac{\eta \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ \frac{2x \cos \xi \operatorname{ch} \eta}{a} &= \frac{\operatorname{sh} 2\eta \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} + \frac{2x \cos \xi \operatorname{sh} \eta}{a} &= \frac{\operatorname{ch} 2\eta \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом для оправдания сказанного относительно трех последних членов надо обратить внимание на формулы

$$\begin{aligned}\Delta f \cdot f_1 &= f \Delta f_1 + f_1 \Delta f + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right), \\ \nabla f \cdot f_1 &= f \nabla f_1 + f_1 \nabla f + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \right).\end{aligned}\quad (19)$$

Сумму из членов (18) мы возьмем в следующем виде:

$$W = D(\eta - \eta_0) + \frac{A \operatorname{sh}(\eta - \eta_0) + B(\eta - \eta_0) \operatorname{sh} \eta + C \cos \xi [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh} \sigma]}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \quad (20)$$

Здесь принимается, что $\eta = \eta_0$ есть окружность подшипника радиуса r_0 , $\eta = \eta_1$ есть окружность шипа радиуса r_1 , $\sigma = \eta_1 - \eta_0$, $\tau = \eta_1 + \eta_0$, а A, B, C, D суть четыре коэффициента, которые, как сейчас увидим, могут быть определены так, чтобы удовлетворить всем граничным данным нашей задачи.

Представим уравнение (20) в виде

$$W = \frac{M}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} + N$$

при

$$\begin{aligned}M &= A \operatorname{sh}(\eta - \eta_0) + B(\eta - \eta_0) \operatorname{sh} \eta + C \operatorname{ch} \eta [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh} \sigma], \\ N &= D(\eta - \eta_0) - C [\operatorname{sh}(\tau - 2\eta) - \operatorname{sh} \sigma].\end{aligned}\quad (21)$$

Граничные условия будут такие: на поверхности подшипника и шипа W постоянно; на поверхности подшипника тангенциальная скорость

$$H \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0,$$

на поверхности шипа

$$H \frac{\partial W}{\partial \eta} = -U,$$

где U — скорость точек окружности шипа, считаемая положительной при его вращении (рис. 1) по часовой стрелке.

Так как при $\eta = \eta_0$ (на поверхности подшипника) имеем

$$M = N = 0,$$

то W на этой поверхности постоянно. Мы удовлетворим всем остальным граничным условиям положениями

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial M}{\partial \eta}\right)_{\eta=\eta_0} &= 0, & (N)_{\eta=\eta_1} &= -Q, \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_{\eta=\eta_0} &= 0, & \left(\frac{\partial M}{\partial \eta}\right)_{\eta=\eta_1} &= -Ua, \\ (M)_{\eta=\eta_1} &= 0, & \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_{\eta=\eta_1} &= 0.\end{aligned}\quad (22)$$

где Q есть секундный объем жидкости, протекающей между шипом и подшипником.

Уравнения (21) показывают нам, что второе и шестое из написанных условий между собою тождественны и вместе с четвертым условием служат для определения D и Q по C :

$$D + 2C \operatorname{ch} \sigma = 0, \quad D\sigma + 2C \operatorname{sh} \sigma + Q = 0. \quad (23)$$

Для определения A , B и C у нас останутся еще первое, третье и пятое условия (22), которые напишутся так:

$$A + B \operatorname{sh} \eta_0 - 2C \operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{ch} \sigma = 0,$$

$$A \operatorname{sh} \sigma + B\sigma \operatorname{sh} \eta_1 - 2C \operatorname{ch} \eta_1 \operatorname{sh} \sigma = 0, \quad (24)$$

$$A \operatorname{ch} \sigma + B (\operatorname{sh} \eta_1 + \sigma \operatorname{ch} \eta_1) - 2C \operatorname{ch} (\eta_1 + \sigma) = -aU.$$

Уравнения (23) и (24) решают всю рассматриваемую задачу о движении смазочного слоя, кругом охватывающего шип, причем все коэффициенты могут быть определены по σ . Исключаем из первого и второго уравнений (24) коэффициент A :

$$B (\operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \eta_0 - \sigma \operatorname{sh} \eta_1) - 2C [\operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} (\sigma + \eta_0)] \operatorname{sh} \sigma = 0,$$

или

$$B (\operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \eta_0 - \sigma \operatorname{sh} \eta_1) + 2C \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{sh} \eta_0 = 0.$$

Эта формула по разделении на $\operatorname{sh} \eta_0$ и по упрощении на основании соотношения (6) приводится к следующей:

$$2C = \frac{B}{\operatorname{sh}^2 \sigma} [\sigma (1 + k) - \operatorname{sh} \sigma]. \quad (25)$$

Исключаем A из второго и третьего уравнений (24)

$$B (\sigma \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{sh} \sigma - \sigma \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \eta_1) - 2C [\operatorname{ch} \eta_1 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} (\eta_1 + \sigma)] = Ua \operatorname{sh} \sigma.$$

Делаем здесь преобразование

$$B (\sigma \operatorname{sh} \eta_0 - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \eta_1) + 2C \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{sh} \eta_1 = Ua \operatorname{sh} \sigma.$$

По разделении этой формулы на $\operatorname{sh} \eta_1$ на основании уравнений (6) и (3) найдем

$$B \left(\frac{\sigma}{1+k} - \operatorname{sh} \sigma \right) + 2C \operatorname{sh}^2 \sigma = Ur_1 \operatorname{sh} \sigma.$$

Если подставим сюда величину C из (25), то получим окончательно

$$B = \frac{Ur_1 (1+k) \operatorname{sh} \sigma}{\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma}, \quad (26)$$

а следовательно, по уравнению (25)

$$2C = \frac{Ur_1 (1+k) [\sigma (1+k) - \operatorname{sh} \sigma]}{\operatorname{sh} \sigma [\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma]}. \quad (27)$$

Теперь мы можем выразить через σ количество Q жидкости, протекающей между шином и подшипником. Мы имеем по уравнению (23)

$$Q = 2C (\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) = \frac{U r_1 (\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) [\sigma (1+k) - \operatorname{sh} \sigma] (1+k)}{[\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma] \operatorname{sh} \sigma}.$$

В предельном случае, когда шип и подшипник делаются концентрическими, надо в уравнении (7) принять $\eta_0 = \infty$, так что

$$\operatorname{sh} \sigma + \operatorname{ch} \sigma = e^\sigma = 1+k, \quad \sigma = \ln(1+k), \quad Q = \frac{U r_1 (\sigma e^\sigma - \operatorname{sh} \sigma)}{2 \operatorname{sh} \sigma}.$$

В случае очень тонкого слоя k близко к нулю и σ тоже очень близко к нулю. Так как при σ , приближающемся к нулю, можно принять

$$\frac{\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma}{\sigma (1+e^{2\sigma}) - 2e^\sigma \operatorname{sh} \sigma} = \frac{1}{2}, \quad \sigma e^\sigma - \operatorname{sh} \sigma = \sigma^2,$$

то определяемое значение Q будет

$$Q = \frac{U r_1 \sigma}{2} = \frac{U r_1 k}{2} = \frac{U \delta}{2}.$$

Это совпадает со случаем, рассмотренным Н. П. Петровым. В общем же случае количество протекающей жидкости определяется по параметру σ , который, как будет показано ниже, находится по радиусам шипа и подшипника и по нагрузке P на шип.

§ 4. Когда функция W найдена, то уравнением (15) сейчас же определяется 2ω . Совершаем операцию ∇ над членами, входящими в состав правой части уравнения (20); пользуясь при этом уравнениями (18) и (19), получаем

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\operatorname{sh} (\eta - \eta_0)}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{-2 \operatorname{sh} \eta_0}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{(\eta - \eta_0) \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{2 - 2 \cos \xi \operatorname{ch} \eta}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{\cos \xi \operatorname{sh} 2\eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{-2 \operatorname{sh} 2\eta \cos 2\xi + 4 \operatorname{sh} \eta \cos \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{\cos \xi \operatorname{ch} 2\eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{-2 \operatorname{ch} 2\eta \cos 2\xi + 4 \operatorname{ch} \eta \cos \xi}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{\cos \xi [\operatorname{sh} (\tau - 2\eta) - \operatorname{sh} \sigma]}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{-2 \cos 2\xi \operatorname{sh} (\tau - 2\eta) + 4 \cos \xi \operatorname{sh} (\tau - \eta) - 2 \operatorname{sh} \sigma}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, находим, что

$$2\omega a^2 = -2A \operatorname{sh} \eta_0 + 2B - 2C \operatorname{sh} \sigma - 2B \cos \xi \operatorname{ch} \eta + \\ + 4C \cos \xi \operatorname{sh} (\tau - \eta) - 2C \cos 2\xi \operatorname{sh} (\tau - 2\eta). \quad (28)$$

Рядом с 2ω согласно уравнению (17) сейчас же определяется давление

жидкости

$$\frac{p}{\mu} a^2 = -2B \sin \xi \operatorname{sh} \eta - 4C \sin \xi \operatorname{ch} (\tau - \eta) + 2C \sin 2\xi \operatorname{ch} (\tau - 2\eta). \quad (29)$$

Мы не прибавляем здесь произвольного постоянного, потому что имеем в виду рассматривать только переменную часть давления.

Так как нами определены только коэффициенты B и C уравнений (26) и (27), то исключим из уравнения (28) коэффициент A с помощью первого уравнения (24)

$$2\omega a^2 = 2B \operatorname{ch}^2 \eta_0 - 2C(\operatorname{sh} 2\eta_0 \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma) - 2B \cos \xi \operatorname{ch} \eta + \\ + 4C \cos \xi \operatorname{sh} (\tau - \eta) - 2C \cos 2\xi \operatorname{sh} (\tau - 2\eta).$$

Если теперь положим $\eta = \eta_0$, то найдем угловую скорость вихря и давление при поверхности подшипника. Представим их так:

$$2\omega a^2 = 2B \operatorname{ch} \eta_0 (\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \xi) - 2C [\operatorname{sh} \sigma (1 + \cos 2\xi - 2 \cos \xi \operatorname{ch} \eta_0) + \\ + \operatorname{ch} \sigma (\operatorname{sh} 2\eta_0 - 2 \cos \xi \operatorname{sh} \eta_0)], \quad (30)$$

$$\frac{p}{\mu} a^2 = -2 \left[B + 2C \frac{(1+k) \operatorname{ch} \sigma - 1}{\operatorname{sh} \sigma} \right] \operatorname{sh} \eta_0 \sin \xi + 2C \sin 2\xi \operatorname{ch} \sigma. \quad (31)$$

При этом для получения уравнения (31) мы воспользовались соотношениями (6) и (7).

Уравнение (31) показывает, что переменная часть гидродинамического давления зависит от двух членов с множителями $\sin \xi$ и $\sin 2\xi$. Для всех точек подшипника, соответствующих параметрам ξ и $2\pi - \xi$, давления одинаковы, но противоположны по знаку, так что равнодействующая всех этих давлений направлена перпендикулярно оси Ox (рис. 1). При очень малых k и σ уравнения (26) и (27) принимают вид

$$B = \frac{Ur_1}{k^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{k^2}\right)}, \quad 2C = \frac{Ur_1}{k\sigma \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{k^2}\right)},$$

и уравнение (31) обращается в такое:

$$\frac{p}{\mu} a^2 = \frac{Ur_1}{k^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{k^2}\right)} \left\{ -2 \left(1 + \frac{k^2}{\sigma^2}\right) \operatorname{sh} \eta_0 \sin \xi + \frac{k}{\sigma} \sin 2\xi \right\},$$

а так как при малых k и σ уравнение (7) дает нам

$$\operatorname{cth} \eta_0 = \frac{k}{\sigma},$$

то согласно уравнению (3)

$$\frac{p}{\mu} = \frac{U}{k^2 r_1 \operatorname{sh}^2 \eta_0} \frac{3 \operatorname{ch}^2 \eta_0}{1 + 2 \operatorname{ch}^2 \eta_0} (-2 \operatorname{ch} 2\eta_0 \sin \xi + \operatorname{ch} \eta_0 \sin 2\xi).$$

Эта величина p представляется графически отрезками ординат между

двумя синусоидами, из которых синусоида с аргументом 2ξ имеем меньшую амплитуду, нежели синусоида с аргументом ξ , так как $\operatorname{ch} 2\eta_0 > \operatorname{ch} \eta_0$. Заштрихованная часть на рис. 3 представляет отрицательное давление, а незаштрихованная — положительное. Во всей верхней части подшипника (изменение ξ от 0 до π) давление будет отрицательно, а во всей нижней (изменение ξ от π до 2π) — положительно. Самое большое изменение давления получается при приближении к точке B .

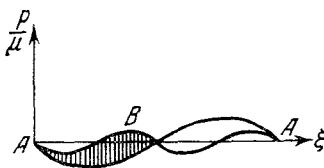


Рис. 3

§ 5. Обращаемся к определению силы P и момента L пары, с которыми смазочный слой действует на шип или, что все равно, с которыми подшипник действует на смазочный слой. На каждый элемент площади смазочного слоя, прилегающего к подшипнику, будут действовать некоторая нормальная и тангенциальная силы. Отнесем эти силы к единице площади и назовем их через n и t , причем эти величины мы будем считать положительными, когда соответствующие им силы направлены в сторону осей Mx' и My' , указанных на рис. 1. Если u' и v' суть проекции скорости точки движущейся вязкой жидкости на указанные оси, то по известным формулам движения вязкой жидкости найдем

$$n = p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad t = -\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right). \quad (32)$$

Легко усмотреть, что в нашей задаче для точки подшипника M имеют место условия

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0.$$

Действительно, если выразим функцию тока W в координатах x' и y' , то найдем, подобно уравнению (14),

$$u' = \frac{\partial W}{\partial y'}, \quad v' = -\frac{\partial W}{\partial x'}.$$

Так как во всех точках подшипника

$$u'^2 + v'^2 = 0,$$

то во всех этих точках

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y'} = 0.$$

Возьмем от написанных равенств полные производные по y' , предполагая, что x' выражено через y' с помощью уравнения окружности подшипника

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \frac{dx'}{dy'} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y' \partial x'} \frac{dx'}{dy'} = 0.$$

Так как для точки M' имеем $\frac{dx'}{dy'} = 0$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0.$$

Добавим, что угловая скорость вихря в точке M' будет

$$2\omega = \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial x'},$$

и представим уравнение (32) в следующем простом виде:

$$n = p, \quad t = 2\mu\omega. \quad (33)$$

Сила P образуется от действия сил n и t на каждый элемент смазочного слоя, прилегающего к подшипнику. Так как согласно уравнению (31) в точках подшипника, соответствующих значениям параметра ξ и $2\pi - \xi$, давление p одинаково по величине, но различно по знаку, а значения 2ω в этих точках одинаковы по величине и по знаку, то проекция равнодействующей на ось Ox (рис. 1) будет нуль, и вся равнодействующая P будет направлена по оси Oy . Косинусы углов, которые оси Mx' и My' образуют с Oy , будут даны формулами

$$H \frac{\partial y}{\partial \eta} = H \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad H \frac{\partial x}{\partial \eta} = -H \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Вследствие этого на основании уравнения (33)

$$\begin{aligned} P &= \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{\mu} \frac{\partial x}{\partial \xi} - 2\omega \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{\mu} x - 2\omega y \right) - \mu \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\mu} \right) - y \frac{\partial}{\partial \xi} (2\omega) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Вставка между пределами пропадает, и мы получаем

$$P = -\mu \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\mu} \right) - y \frac{\partial}{\partial \xi} (2\omega) \right] d\xi. \quad (34)$$

При составлении производных по ξ от вторых частей уравнений (30) и (31) раскроем гиперболические функции, содержащие τ , и напомним

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{p}{\mu} &= -2B \cos \xi \operatorname{sh} \eta_0 - 4C \{ \operatorname{ch} \tau (\cos \xi \operatorname{ch} \eta_0 - \cos 2\xi \operatorname{ch} 2\eta_0) - \\ &\quad - \operatorname{sh} \tau (\cos \xi \operatorname{sh} \eta_0 - \cos 2\xi \operatorname{sh} 2\eta_0) \}, \end{aligned}$$

$$a^2 \frac{\partial(2\omega)}{\partial \xi} = 2B \sin \xi \operatorname{ch} \eta_0 + 4C \{ \operatorname{ch} \tau (\sin \xi \operatorname{sh} \eta_0 - \sin 2\xi \operatorname{sh} 2\eta_0) - \\ - \operatorname{sh} \tau (\sin \xi \operatorname{ch} \eta_0 - \sin 2\xi \operatorname{ch} 2\eta_0) \}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (34) и воспользовавшись уравнением (10), увидим, что все члены при коэффициенте C уничтожаются, и у нас получается

$$P = \frac{4\pi\mu B}{a}. \quad (35)$$

Подставляем сюда величину B из уравнения (26)

$$P = \frac{4\pi\mu U r_1}{a} \frac{(1+k) \operatorname{sh} \sigma}{\sigma - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma + (1+k)^2 \sigma};$$

откуда, заменяя $r_1 = \frac{a}{\operatorname{sh} \eta_1}$ и воспользовавшись уравнением (7), найдем окончательно

$$P = \frac{4\pi\mu U \sqrt{(1+k)^2 + 1 - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma}}{\sigma [(1+k)^2 + 1] - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma}. \quad (36)$$

Переходим к определению момента L , который будем отыскивать в предположении, что сила P приложена в центре шипа. Приведем всю рассматриваемую систему сил к силе P , приложенной в центре подшипника, и к паре с моментом L' . При переносе силы P в центр шипа получается пара с несколько иным моментом L , причем

$$L = L' - Pe,$$

или по уравнению (8)

$$L = L' - P' \frac{r_1 \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_0}. \quad (37)$$

Что касается момента L' , то он будет согласно уравнению (33) иметь следующую величину:

$$L' = r_0 \int_0^{2\pi} \frac{2\mu\omega d\xi}{H},$$

или по уравнениям (5) и (2)

$$L' = \frac{\mu r_0}{\operatorname{sh} \eta_0} \int_0^{2\pi} 2\omega x d\xi.$$

Подставляя сюда 2ω из уравнения (30) и пользуясь последним уравнением (10), мы увидим, что коэффициент при $\operatorname{sh} \sigma$ сократится и получится

$$L' = \frac{4\pi\mu r_0}{a} (B \operatorname{ch} \eta_0 - 2C \operatorname{sh} \eta_0 \operatorname{ch} \sigma),$$

или по (3)

$$L' = 4\pi\mu (B \operatorname{cth} \eta_0 - 2C \operatorname{ch} \sigma).$$

Подставляем это выражение в уравнение (37), в котором P заменяем по уравнению (35),

$$L = 4\pi\mu \left(B \operatorname{cth} \eta_0 - 2C \operatorname{ch} \sigma - B \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh} \eta_0 \operatorname{sh} \eta_1} \right);$$

это дает

$$L = 4\pi\mu (B \operatorname{cth} \eta_1 - 2C \operatorname{ch} \sigma).$$

Подставляя сюда значения коэффициентов B и C из уравнений (26) и (27) и пользуясь уравнением (7), получаем

$$L = -4\pi\mu r_1 U \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cth} \sigma - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma + 1}{\sigma[(1+k)^2 + 1] - 2(1+k) \operatorname{sh} \sigma}. \quad (38)$$

Уравнения (36) и (38) решают нашу задачу. При данном P/U из (36) определяем σ и, подставив эту величину в (38), находим момент $(-L)$ пары, поглощаемый трением. Величина σ , как было сказано, изменяется от значения 0 до значения $\sigma_0 = \ln(1+k)$. Пользуясь величиной σ_0 , представим P в таком виде:

$$\frac{\sqrt{2}P}{4\pi\mu U} e^{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma}}{\sigma \operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{sh} \sigma}. \quad (39)$$

Посмотрим, как будет изменяться отношение P/U при непрерывном изменении σ от 0 до σ_0 . При $\sigma = 0$ знаменатель обращается в нуль и при дальнейшем возрастании σ возрастает до тех пор, пока

$$\frac{d}{d\sigma} (\sigma \operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{sh} \sigma) = \operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma > 0,$$

т. е. до значения $\sigma = \sigma_0$. Числитель дроби (39) идет, убывая от значения $\sigma = 0$ до значения $\sigma = \sigma_0$. Таким образом при изменении σ от 0 до σ_0 дробь P/U убывает от бесконечности до нуля.

Составим величину коэффициента трения λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-L}{Pr_1} = \\ &= \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cth} \sigma + 1 - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma}{\sqrt{(1+k)^2 + 1 - 2(1+k) \operatorname{ch} \sigma}} = \frac{\left(\frac{(1+k)^2 \operatorname{cth} \sigma + 1}{2(1+k)} - \operatorname{ch} \sigma \right) \sqrt{2(1+k)}}{\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma}}. \quad (40) \end{aligned}$$

Легко показать, что производная от λ до σ при небольших σ_0 имеет отрицательную величину для малых σ , а при σ , приближающемся к σ_0 , она положительна и неограниченно возрастает; вследствие этого λ имеет непременно минимум между значениями $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_0$; около этого минимума λ можно рассматривать как величину постоянную и считать момент силы трения пропорциональным силе нагрузки шипа P , как это следует из закона

трения твердых тел. Другой предельный случай получается при σ , близком к σ_0 . При этом уравнение (40) преобразуем так:

$$\lambda = \sqrt{2(1+k)} \left[\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma} + \frac{(1+k)(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma)}{2 \operatorname{sh} \sigma \sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma}} \right].$$

При σ , близком к σ_0 , первый член пропадает перед вторым, и мы получаем на основании уравнения (39)

$$\lambda = 2\pi\mu \frac{1+k}{\operatorname{sh} \sigma_0} \frac{U}{P} = 4\pi\mu \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1} \frac{U}{P}.$$

При заданном P рассматриваемый предельный случай соответствует значительным скоростям U . Это дает нам гидродинамический закон трения шипа в подшипнике, по которому момент сил, поглощенных трением смазочного слоя, пропорционален окружной скорости U и не зависит от давления P .

§ 6. Переходим к предположению, что k есть малая величина. На основании соотношения

$$\sigma_0 = \ln(1+k)$$

σ_0 будет порядка малости k , а следовательно, и переменная величина σ , заключенная в пределах 0 и σ_0 , будет малая величина порядка малости k . Преобразуем уравнение (39) через отбрасывание малых величин высших порядков перед малыми величинами низших порядков:

$$\frac{P}{U} = \frac{12\pi\mu \sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)}, \quad (41)$$

$$\frac{-L}{r_1 U} = \frac{4\pi\mu(3\sigma_0^2 - 2\sigma^2)}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)}, \quad (42)$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \frac{3\sigma_0^2 - 2\sigma^2}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}.$$

Наименьшее значение λ , о котором мы упоминали в предыдущем параграфе, здесь находится очень просто. Оно получается при $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_0$ и таково:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sigma_0 = 0,94\sigma_0.$$

При малом k уравнение (7) дает нам

$$\operatorname{cth} \eta_0 = \frac{k}{\sigma} = \frac{\sigma_0}{\sigma}, \quad \sigma = \sigma_0 \operatorname{th} \eta_0.$$

Подставляя это в уравнения (41) и (42), получаем

$$\frac{P}{U} = \frac{12\pi\mu \operatorname{ch}^2 \eta_0}{\sigma_0^2 \operatorname{sh} \eta_0 (2\operatorname{ch}^2 \eta_0 + 1)}, \quad \frac{-L}{r_1 U} = \frac{4\pi\mu (\operatorname{ch}^2 \eta_0 + 2)}{\sigma_0 (2\operatorname{ch}^2 \eta_0 + 1) \operatorname{th} \eta_0}.$$

Так как при весьма малом k уравнение (9) дает нам

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta_0}$$

и в то же время

$$\sigma_0 = \ln(1 + k) = k = \frac{\delta}{r_1},$$

то

$$\frac{P}{U} = 12\pi\mu \frac{r_1^2}{\delta^2} \frac{\alpha}{(2 + \alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad \frac{-L}{r_1 U} = 4\pi\mu \frac{r_1}{\delta} \frac{1 + 2\alpha^2}{(2 + \alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Это суть приближенные формулы Зоммерфельда.

II

МАТЕМАТИКА

НОВЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ИЗДАНИЮ 1932 ГОДА

Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений есть один из основных вопросов технической математики, а потому всякий шаг в этой области, если он дает сколько-нибудь новое освещение процесса, представляет интерес. Вот почему я считал правильным собрать воедино свои работы по этому вопросу, частью помещенные в виде журнальных статей в периодической печати, частью изданные в виде отдельных брошюр. Все эти издания стали библиографической редкостью, а между тем, по моему мнению, в намеченном мною направлении работу следовало бы продолжить.

Публикуемые ныне четыре работы впервые появились в печати в виде отдельных брошюр в 1919—1920 гг., и в настоящий момент переиздаются в несколько переработанной форме, с некоторыми дополнениями и исправлениями замеченных неточностей.

С. А. Чаплыгин

І. ОСНОВАНИЯ НОВОГО СПОСОБА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При отыскании приближенного интеграла данного дифференциального уравнения обычно ставится один из двух вопросов: либо требуется с возможной точностью построить аналитическое выражение искомой функции, либо вычислить ее числовую величину при заданном значении независимого переменного.

Для решения первого вопроса единственным, дающим практически удобный прием вычисления способом является разложение интеграла в ряд. Прием этот, однако даже в простейших случаях, приводит обычно к чрезвычайно сложным, а при значительном числе подлежащих подсчету членов — практически едва преодолимым трудностям вычисления, — обстоятельство тем более тягостное, что при пользовании лишь этим приемом большею частью не оказывается возможным установить величину остающейся погрешности и узнать, насколько удовлетворительно разрешена поставленная задача.

Для отыскания числовых значений интеграла уравнения с числовыми коэффициентами известен ряд способов, наилучшим из которых нам представляется метод Адамса (Adams) — Штёрмера (Störmer), позволяющий быстро подойти к решению достаточной точности. Пределы остающейся ошибки, однако, и при этого рода приемах не устанавливаются с достаточной строгостью и точностью. Что же касается характера интегральной кривой,

то ее при этом приходится вычерчивать по точкам и, следовательно, лишь графически определять ее ход, опять-таки без ясного представления о тех отклонениях от истинных значений ординат, которые при этом имеют место.

Предлагаемый нами прием по идее существенно отличается от известных до сих пор. Мы ставим себе следующую задачу: по данному дифференциальному уравнению, разрешенному относительно высшей производной,

$$y^{(n)} - f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (1)$$

отыскать две функции, $z = z(x)$ и $u = u(x)$, равные искомому интегралу в начальной точке $x = x_0$, так, чтобы на прилегающем к этой точке участке соблюдалось двойное неравенство

$$z > y > u.$$

Переводя это требование на геометрический язык, мы можем сказать, что на плоскости OXY надлежит выделить ленту ABC , по возможности узкую, внутри которой необходимо должна лежать интегральная кривая Ay (рис. 1). Само собою ясно, что уравнения $y = z(x)$ и $y = u(x)$ определяют в таком случае граничные кривые AB и AC .

1. Решить поставленную задачу позволяет нижеследующая основная теорема.

Теорема 1. Допустим, что мы нашли функцию $z = z(x)$ с такими свойствами:

1) при $x = x_0$

$$z = y = y_0, \quad z' = y' = y'_0, \quad z'' = y'' = y''_0, \dots, z^{(n-1)} = y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)};$$

2) всюду на участке (x_0, x) , прилегающем к x_0 , где значения x более x_0 , результат подстановки z на место y в уравнение (1) более нуля, т. е.

$$z^{(n)} - f(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) > 0. \quad (2)$$

Предположим, далее, что на этом участке искомый интеграл и его производные до порядка n конечны и непрерывны, что такими же свойствами обладает функция z и что функция f и ее частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в области интересующих нас значений перечислен-

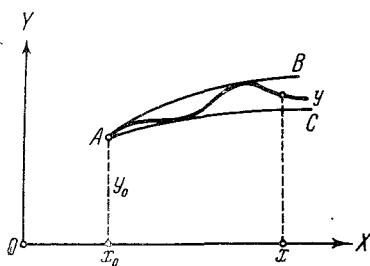


Рис. 1

ных аргументов и независимого переменного также всюду конечны; тогда для всех x , больших x_0 и не превосходящих некоторого определенного предела, будет существовать неравенство

$$z > y.$$

Знак этого неравенства был бы обратный в случае противоположного знака в неравенстве (2); неравенство будет также обратного знака в области прилегающих к точке x_0 значений независимого переменного, меньших x_0 для n нечетного.

Будем называть определенную таким образом функцию *верхней* или *нижней границей* интеграла, смотря по знаку неравенства, и условимся в последующем через z обозначать именно верхнюю, а через u — нижнюю границу, так что интеграл y будет заключен между z и u :

$$z > y > u.$$

Обратимся к доказательству теоремы и проведем его, последовательно переходя от более простых к более сложным случаям.

1. Дано уравнение первого порядка

$$y' - f(x, y) = 0$$

и неравенство

$$z' - f(x, z) > 0 \quad (3)$$

при условии $x > x_0$, причем $z = y = y_0$ для $x = x_0$. Данные соотношения приводят к неравенству

$$z' - y' - p(z - y) > 0,$$

где

$$p = \frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}$$

представляет собою на основании наложенных на z и y условий вполне определенную, хотя и неизвестную нам функцию x , всюду конечную в области интересующих нас значений переменных: для $x = x_0$ функция эта, очевидно, имеет значение

$$p = \left(\frac{df}{dz} \right)_{x=x_0}.$$

Умножим построенное нами неравенство на положительный в наших условиях множитель

$$s dx = e^{-\int_{x_0}^x p dx} dx;$$

интегрируя результат в пределах x_0 и x , получаем

$$\int_{x_0}^x (z - y) s > 0;$$

так как $z = y$ при $x = x_0$, то по упрощении это неравенство приводит к искомому результату

$$z > y.$$

Если бы x было менее x_0 , то на пути интегриации dx было бы отрицательно, и, следовательно, при умножении на $s dx$ неравенства (3) в нем пришлось бы изменить знак, а это повело бы к изменению знака результата. Само собою ясно, что функция u , удовлетворяющая неравенству

$$u' - f(x, u) < 0,$$

будет нижнею границею интеграла.

Приведенное нами доказательство, как мы увидим ниже, с соответственным изменением распространяется и на уравнения высших порядков; что же касается, в частности, уравнений первого порядка, то для

них можно дать другое, почти очевидное, геометрическое доказательство, на возможность которого обратил мое внимание Н. Е. Жуковский. Для ясности и полноты приведем такое доказательство. Уравнением

$$y' - f(x, y) = 0$$

на плоскости OXY определяется семейство кривых, идущих, вообще говоря, раздельно, так что через каждую точку проходит определенная кривая. Ряд таких линий изображен на рис. 2. Пусть AC есть та из интегральных кривых $y = y(x)$, которая соответствует начальным данным $x = x_0$, $y = y_0$, т. е. проходит через точку A с координатами x_0 , y_0 . Кривая $y = z(x)$, изображенная на чертеже линией ADB , удовлетворяющая неравенству

$$z' - f(x, z) > 0$$

и проходящая через ту же точку A , вправо от A необходимо должна подниматься вверх над интегральной кривой, пересекая последовательные кривые интегрального семейства, и, как легко усмотреть, не может пересечь линию AC прежде, чем прикоснется к одной из последующих линий семейства в точке B ; после этого, если знак неравенства меняется, она начинает вновь встречать те интегральные линии, которые пересекла ранее. Ясное дело, что неравенство

$$z > y$$

будет справедливо на некотором участке за точкою B . В нашем распоряжении, однако, нет средств ответить на вопрос, как далеко будет еще простирается этот участок.

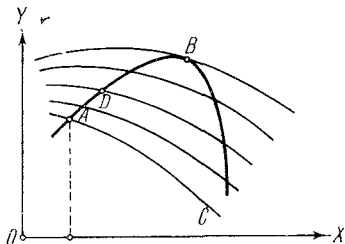


Рис. 2

2. Обратимся теперь к линейным уравнениям высших порядков и начнем с уравнения второго порядка

$$y'' - py' - p_1y = q, \quad (4)$$

в котором p , p_1 и q суть конечные и непрерывные функции x на прилегающем к точке $x = x_0$ участке. Пусть найдена функция

$$z = z(x),$$

имеющая при $x = x_0$ значение $z = y = y_0$, причем $z' = y' = y'_0$. Функция z на некотором участке, прилегающем к x_0 , будет верхней границей интеграла, если

$$z'' - pz' - p_1z - q > 0. \quad (5)$$

Чтобы в этом убедиться, составляем при помощи уравнения (4) неравенство

$$z'' - y'' + \sigma(z' - y') - (\sigma + p)(z' - y') - p_1(z - y) > 0,$$

где σ — подлежащая определению функция x . Определим σ так, чтобы удовлетворялось условие

$$\frac{d}{dx}(\sigma + p)s = p_1s, \quad (6)$$

где

$$s = e^{\int_{x_0}^x \sigma dx}$$

Умножив неравенство (5) на $s dx$, мы можем переписать его в виде

$$\frac{d}{dx}s(z' - y') - \frac{d}{dx}s(\sigma + p)(z - y) > 0.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах x_0 и x , мы по упрощении результата приходим к неравенству

$$z' - y' - (\sigma + p)(z - y) > 0,$$

откуда, так же как в п. 1, заключаем о справедливости неравенства

$$z - y > 0$$

для значений переменного $x > x_0$.

Приведенное рассуждение справедливо до тех пор, пока множитель s остается положительным, что будет иметь место, пока определенная выше функция σ сохраняет конечные значения. Уравнение (6), определяющее эту функцию, в раскрытой форме напишется в виде

$$\sigma' + \sigma^2 + p\sigma + p' - p_1 = 0.$$

Таким образом, пределом применимости неравенства явится то значение x , для которого σ приобретает бесконечно большую величину, короче говоря, полюс функции σ . В этой точке функция s обращается в нуль и может

переменить знак. Сама функция s , как нетрудно убедиться, удовлетворяет линейному уравнению

$$s'' + (ps)' - p_1s = 0,$$

сопряженному с (4), если из этого последнего удалить вторую часть.

Итак, пределом применимости теоремы будет значение x , являющееся полюсом σ и в то же время представляющее собою корень функции s ; при этом необходимо иметь в виду, что присутствие в функциях σ и s произвольных постоянных позволяет до известной степени отодвинуть отмеченный предел. Однако предел этот может и в некоторых случаях будет существовать, хотя бы неравенство (5) было справедливо при всяком x , большем начального x_0 .

Для значений $x < x_0$ в результате приведенного выше рассуждения мы пришли бы по интегриации неравенства (5) к неравенству

$$z' - y' - (\sigma + p)(z - y) < 0,$$

откуда следовало бы по п. 1, что и здесь опять

$$z - y > 0.$$

Таким образом, для уравнения второго порядка z будет верхнюю границу интеграла по обе стороны начальной точки x_0 .

3. Доказательство теоремы для линейного уравнения порядка n может быть проведено способом перехода от $n - 1$ к n . Пусть, в самом деле, известна функция z , которая по вставке на место y в уравнение

$$y^{(n)} - py^{(n-1)} - p_1y^{(n-2)} - \dots - p_{n-1}y = q \quad (7)$$

дает в результате неравенство

$$z^{(n)} - pz^{(n-1)} - p_1z^{(n-2)} - \dots - p_{n-1}z - q > 0, \quad (8)$$

удовлетворяя в то же время условиям

$$z = y = y_0, \quad z' = y' = y'_0, \dots, \quad z^{(n-1)} = y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

при

$$x = x_0.$$

Само собою разумеется, что общие условия непрерывности, приведенные в тексте основной теоремы, соблюдаются и в рассматриваемом частном случае, как это предполагалось в ранее рассмотренных и будет предполагаться в дальнейшем.

Составляем вытекающее из соотношений (7) и (8) неравенство

$$z^{(n)} - y^{(n)} + \sigma[z^{(n-1)} - y^{(n-1)}] - (\sigma + p)[z^{(n-1)} - y^{(n-1)}] + \sigma_1[z^{(n-2)} - y^{(n-2)}] - (\sigma_1 + p_1)[z^{(n-2)} - y^{(n-2)}] + \dots - (\sigma_{n-2} + p_{n-2})[z' - y'] - p_{n-1}[z - y] > 0 \quad (9)$$

приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} s'' + (ps)' &= -s\sigma_1, \\ -(s\sigma_1)' + (p_1s)' &= +s\sigma_2, \\ (s\sigma_2)' + (p_2s)' &= -s\sigma_3, \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^{n-2}[(s\sigma_{n-2})' + (p_{n-2}s)'] &= (-1)^{n-1}sp_{n-1}. \end{aligned}$$

Продифференцировав первое из этих уравнений $n - 2$ раза, второе — $n - 3$, третье — $n - 4$ раза и т. д. и сложив результаты, получим

$$s^{(n)} + (ps)^{(n-1)} - (p_1s)^{(n-2)} + (p_2s)^{(n-3)} - \dots + (-1)^{n-1}sp_{n-1} = 0, \quad (13)$$

уравнение, сопряженное заданному уравнению (7) без его второй части. Предельным значением независимого переменного, до которого z остается верхнюю границу интеграла уравнения (7), будет корень функции s , являющийся в то же время полюсом для σ , σ_1 , $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-2}$. Отмеченный предел может быть отодвинут в известной мере путем подбора частного интеграла уравнения (13) в качестве интегрирующего множителя неравенства (9), как это было замечено выше при доказательстве теоремы для линейного уравнения второго порядка.

В заключение этого пункта отметим, что неравенство (12) изменит знак в точках $x < x_0$; нетрудно будет убедиться, что при n четном z будет верхней границей по обе стороны от $x = x_0$, а при n нечетном та же самая функция при $x < x_0$ окажется уже нижней границей интеграла. В самом деле, будем считать теорему доказанной для уравнений порядка $n - 1$; тогда при $n - 1$ нечетном (стало быть, при четном n) неравенство (12) приводит к соотношению $z > y$ при $x > x_0$; это же самое соотношение должно иметь место и для $x < x_0$ ввиду того, что здесь неравенство (12) будет иметь противоположный знак. Если же $n - 1$ четное, а n — нечетное число, то из неравенства (12) будет следовать $z - y > 0$ при $x > x_0$; но при $x < x_0$ тогда окажется уже $z < y$, так как в этих точках опять-таки знак неравенства (12) изменится, а с ним ввиду четности числа $n - 1$ должен измениться и знак неравенства, связывающий функцию z с интегралом.

4. Перейдем теперь к рассмотрению нелинейных уравнений высших порядков и начнем опять с уравнения второго порядка

$$y'' - f(x, y, y') = 0, \quad (14)$$

предполагая, что y и f удовлетворяют всем условиям, указанным в тексте основной теоремы. Пусть конечная и непрерывная вместе с двумя своими первыми производными функция z удовлетворяет в начальной точке $x = x_0$ требованию $z = y = y_0$, $z' = y' = y'_0$ и оправдывает на участке (x_0, x) неравенство

$$z'' - f(x, z, z') > 0.$$

Это соотношение при помощи уравнения (14) мы можем привести к виду

$$z'' - y'' - p(z' - y') - p_1(z - y) > 0, \quad (15)$$

положив

$$\frac{f(x, z, z') - f(x, z, y')}{z' - y'} = p, \quad \frac{f(x, z, y') - f(x, y, y')}{z - y} = p_1.$$

Так как по условиям, наложенным на y, z, f , функции p и p_1 всюду в интересующей нас области конечны и непрерывны, то из линейного неравенства (15) на основании п. 2 приходим к выводу, что z будет верхней границей интеграла уравнения (14) при $x > x_0$, пока значение x не пре-
взойдет некоторого предела.

5. Последний шаг, доказательство теоремы для общего случая, при-
водится к рассуждению, совершенно аналогичному с только что изложен-
ным для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.
Уравнение порядка n

$$y^{(n)} - f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

будет иметь верхней границей величину z , удовлетворяющую сверх на-
чальных условий неравенству

$$z^{(n)} - f(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) > 0$$

на участке (x_0, x) ; а это неравенство приводится к линейному неравенству

$$z^{(n)} - y^{(n)} - p[z^{(n-1)} - y^{(n-1)}] - p_1[z^{(n-2)} - y^{(n-2)}] - \dots - p_{n-1}[z - y] > 0,$$

если мы введем обозначения

$$\begin{aligned} p &= \frac{f(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}) - f(x, z, z', \dots, z^{(n-2)}, y^{(n-1)})}{z^{(n-1)} - y^{(n-1)}}, \\ p_1 &= \frac{f(x, z, z', \dots, z^{(n-2)}, y^{(n-1)}) - f(x, z, z', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})}{z^{(n-2)} - y^{(n-2)}}, \\ &\dots \dots \dots \\ p_{n-1} &= \frac{f(x, z, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})}{z - y}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства на основании п. 3 вытекает соотношение

$$z - y > 0,$$

так как по условиям непрерывности $p, p_1, \dots, p_{n-1}$ суть функции, всюду в интересующей нас области конечные и непрерывные.

К изложенному добавим, что z будет верхней границей интеграла по обе стороны от точки $x = x_0$, если данное дифференциальное уравнение четного порядка; в противном случае неравенство, связывающее z и y , меняет знак при переходе через $x = x_0$. Доказательство этого положения в общем

случае ничем не отличается от того, которое мы привели в случае уравнений линейных.

6. Развитое нами доказательство основной теоремы намечает одновременно и путь, которым следует идти для того, чтобы отыскать предел применимости доказываемого положения; предел этот, как было выяснено, определяется полюсами системы функций, которые сами определяются дифференциальными уравнениями. Разыскание таких полюсов само по себе представляет сложную и трудную задачу, которая нами лишь ставится.

Если бы мы задались лишь целью показать справедливость основной теоремы, не вдаваясь в определение путей к отысканию пределов ее применимости, то самое доказательство можно было бы до чрезвычайности упростить и при этом пользоваться либо аналитическим, либо геометрическим методом.

Аналитическое доказательство можно свести к следующему рассуждению. Допустим, что на участке значений независимого переменного, прилегающем к начальной точке $x = 0$ (для простоты принимаем $x_0 = 0$), интеграл дифференциального уравнения

$$y^{(n)} - f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \quad (16)$$

имеет значение

$$y = y_0 + y'_0 x + y''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} + y_0^{(n)} \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = R_n;$$

допустим, далее, что для функции z , которая при $x = 0$ удовлетворяет соотношениям $z = y_0$, $z' = y'_0$, ..., $z^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, оправдывается неравенство

$$z^{(n)} - f(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) > 0 \quad (17)$$

при x , достаточно близком к нулю. В таком случае мы будем иметь

$$z = y_0 + y'_0 x + y''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} + z_0^{(n)} \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + S_n,$$

а тогда по условию (16)

$$z - y = [z_0^{(n)} - y_0^{(n)}] \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + S_n - R_n.$$

Так как S_n и R_n заключают в себе множитель x^{n+1} , то при достаточно малом x знак $z - y$ зависит от первого члена; но по условию (17)

$$z_0^{(n)} - y_0^{(n)} > 0,$$

а, следовательно, для x , отличного от нуля, мы получим

$$z - y > 0$$

при n четном; если же n есть число нечетное, то при $x > 0$ и z будет

более y , т. е.

$$z - y > 0,$$

а при $x < 0$ окажется

$$z - y < 0.$$

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы. Пусть интегральная кривая данного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

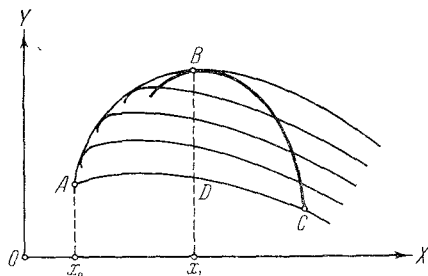


Рис. 3

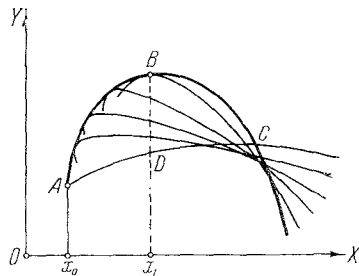


Рис. 4

изображается линией ADC , и пусть ABC представляет собою верхнюю границу интеграла (рис. 3). Неравенство

$$z^{(n)} - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) > 0, \quad (18)$$

существование которого мы предполагаем на участке оси OX вправо от x_0 , показывает, что интегральные кривые, проведенные во всех точках границы так, чтобы они имели с нею наитеснейшее возможное прикосновение порядка $n - 1$, будут справа от точки касания уходить под граничную кривую, оказываясь слева выше или ниже этой кривой в зависимости от того, будет ли порядок прикосновения четным или нет. Это вытекает из приведенного выше аналитического рассуждения. При пересечении граничной кривой с интегральной могут представиться два различных случая, которые мы и рассмотрим последовательно.

Первый случай изображен на рис. 3 и имеет место, если последовательно прикасающиеся к граничной кривой интегральные кривые не пересекаются и не пересекают линии ADC ; тогда по мере отступления от начальной интегральной линии ADC последующие интегральные линии будут встречать границу в точках, все более близких между собою, пока для некоторой определенной линии они не сольются в одну точку B ; в этом месте соответственная интегральная кривая будет иметь с граничной кривой прикосновение порядка высшего, чем $n - 1$, и вправо от B выйдет наружу из-под границы. Очевидно, в этой самой точке B нарушится и основное неравенство (18), и, следовательно, теорема наша оказывает

ся справедливою на всем участке, находящемся влево от точки x_1 , где неравенство соблюдается, ибо здесь граничная кривая всюду выше интегральной линии ADC .

Второй случай, изображенный на рис. 4, представится, если последовательные, прикасающиеся к границе интегральные кривые пересекаются между собою. Легко видеть, что при таком ходе кривых встреча граничной кривой с линией ADC может иметь место и в пределах соблюдения неравенства (18); однако ближайшая к начальной точка пересечения C не может лежать ближе, чем та точка D , где первая из интегральных кривых пересекается с бесконечно близкой к ней последующей. Точка D , очевидно, может быть также определена как предельная точка пересечения начальной интегральной кривой ADC с другой, также интегральной линией, проходящей через ту же начальную точку A и имеющей здесь с кривою ADC прикосновение $(n - 2)$ -го порядка, причем производные порядка $n - 1$ для обеих указанных кривых отличаются на бесконечно малую величину. Заметим, что, предположив иное расположение последовательных пересечений интегральных кривых, или, говоря иначе, при ином ходе их огибающей, мы неминуемо пришли бы к прерывности высшей производной интеграла в пределах изменения x .

2. Способ, при помощи которого, опираясь на доказанную теорему, можно приближенно проинтегрировать данное дифференциальное уравнение, очевиден: все сводится к отысканию верхней и нижней границ интеграла. Для уравнений высших порядков вопрос весьма осложняется отысканием предела приложимости теоремы; для уравнений же первого порядка этого затруднения не существует. Что касается условий непрерывности интеграла, то исследовать их в приложениях, которые мы главным образом имеем в виду, обычно никакой необходимости не встречается, так как физическое значение определяемой функции бывает известно, а этим значением вполне характеризуются пределы непрерывности.

Итак, предположив, что мы имеем дело с уравнением

$$y' - f(x, y) = 0, \quad (19)$$

поступаем так: меняя по возможности мало вид уравнения, стремимся привести его к интегрируемой форме; интеграл измененного уравнения, имеющий то же начальное значение, как искомое решение уравнения (19), подставляем в это последнее и определяем знак результата; если он положителен, то мы нашли верхнюю границу интеграла уравнения (19) для x , превышающих начальную величину; противоположный знак результата показал бы, что мы имеем дело с нижнею границею. Установив обе границы и воспользовавшись ими как первым приближением, можно в том или другом частном случае ближе подойти к интегралу, подставив в некоторые члены функции $f(x, y)$ на место y его верхнюю или нижнюю границу. Знак результата подстановки найденного таким образом второго приближения позволит судить, имеем ли мы дело с нижнею или верхнею границею искомого интеграла.

Указанный прием оставляет значительное место интуиции во всякой реальной задаче и с этой точки зрения представляется как бы не вполне выработанным. Мы, со своей стороны, однако, усматриваем в этом лишь большое удобство и гибкость метода, позволяющего направить анализ по наиболее простому пути во всяком определенном частном случае. С другой стороны, возможно использовать основную теорему и таким образом, чтобы дать способ, если не всегда удобный, то во всяком случае применимый: стоит только для определения границ интеграла пользоваться его разложением в тот или иной ряд. Подстановка известной группы первых членов ряда в левую часть уравнения (10) своим знаком определит нам, будем ли мы иметь верхнюю или нижнюю границу интеграла, если остановимся на этой группе, как приближенном выражении искомой функции. Практически, однако, такой путь весьма часто может оказаться чрезвычайно громоздким ввиду крайней сложности вычислений.

Примеры реального применения к отдельным задачам всего лучше иллюстрируют метод. В дальнейшем мы даем такое применение к интеграции уравнения движения поезда, почему считаем себя вправе в предлагаемом изложении общих оснований способа примеров не касаться.

3. В заключение этой части считаем полезным изложить еще одну теорему, которая показывает, как могут расшириться перспективы в приложениях аналогичного метода, примененного, как оказывается, и к некоторым уравнениям с частными производными.

Теорема 2. Пусть мы имеем уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - p\varphi = 0, \quad (20)$$

где p — существенно положительная в данной области функция координат или нуль. Пусть, далее, мы нашли некоторую функцию координат φ , внутри области конечную и непрерывную вместе со своими первыми частными производными и имеющую конечные вторые производные, на границах области всюду равную искомому интегралу φ уравнения (20), который должен обладать в той же степени свойствами непрерывности. Функция φ будет нижней границей интеграла для внутренних точек области, если результат ее подстановки в уравнение (20) всюду положителен; верхней границе соответствует обратный знак указанного результата.

Будем для краткости письма в дальнейшем обозначать операцию

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

знаком Δ , так что уравнение (20) переписывается в виде

$$\Delta \varphi - p\varphi = 0,$$

а φ внутри области удовлетворяет неравенству

$$\Delta \varphi - p\varphi > 0; \quad (21)$$

условимся также в обозначениях

$$D\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(y, n) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(z, n),$$

где (x, n) есть угол между осью OX и внутренней нормалью к данной замкнутой поверхности, (y, n) и (z, n) — подобные же углы осей OY и OZ с внутренней нормалью; $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ есть так называемая производная функция φ по нормали. Из формул (20) и (21) вытекает неравенство

$$\Delta(\psi - \varphi) - p(\psi - \varphi) > 0. \quad (22)$$

Составим выражение

$$(\psi - \varphi) \{ \Delta(\psi - \varphi) - p(\psi - \varphi) \} dx dy dz$$

и проинтегрируем его по всему объему области. Теорема Грина позволяет изобразить результат в форме тождества

$$\begin{aligned} \iiint (\psi - \varphi) \{ \Delta(\psi - \varphi) - p(\psi - \varphi) \} dx dy dz &\equiv - \iint (\psi - \varphi) \frac{\partial(\psi - \varphi)}{\partial n} ds - \\ &- \iiint \{ D(\psi - \varphi) + p(\psi - \varphi)^2 \} dx dy dz < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение, стоящее в последней строке, непременно отрицательно, так как двойной интеграл, распространенный по поверхности области, есть нуль по условию равенства $\psi - \varphi = 0$ на границах, а в тройном интеграле подынтегральная функция существенно положительна. Таким образом, преобразуемый тройной интеграл первой строки уравнения (23) есть величина отрицательная, а так как выражение, стоящее в витых скобках, по условию (22) более нуля, то $\psi - \varphi$ не может быть всюду положительно. Таким образом, относительно этой функции может быть сделано два предположения: или 1) она всюду внутри области отрицательна, или 2) объем разбивается на части, из которых в некоторых $\psi - \varphi < 0$, а в других имеет место обратное неравенство. Легко показать, что второе предположение не может иметь места в действительности; в самом деле, на поверхности, ограничивающей ту часть объема, где $\psi - \varphi$ менее нуля, от части, где имеет место обратное неравенство, должно иметь место равенство $\psi - \varphi = 0$; а отсюда ясно, что, применив к последней части объема соотношение (23), мы придем к противоречию, так как на основании сделанного предположения и неравенства (22) выражение, стоящее в верхней строчке рассматриваемого соотношения, оказалось бы положительным, тогда как нижняя строчка содержала бы по-прежнему отрицательное количество ввиду обращения в нуль двойного интеграла. Итак, единственное, не приводящее к противоречию предположение, которое можно сделать

о знаке функции $\psi - \varphi$, приводит к неравенству

$$\psi - \varphi < 0.$$

Заметим еще, что изложенная теорема допускает некоторое обобщение. В самом деле, легко усмотреть, что она применима и в том случае, если дифференциальное уравнение, определяющее функцию φ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - p\varphi = 0, \quad (24)$$

где A, B, C, p — какие угодно знакоположительные функции. Доказательство в этом случае ничем не отличается от предыдущего, с той разницей, что в преобразованном неравенстве вместо производной по нормали от разности $\psi - \varphi$ будет стоять количество

$$A \frac{\partial (\psi - \varphi)}{\partial x} \cos \widehat{(x, n)} + B \frac{\partial (\psi - \varphi)}{\partial y} \cos \widehat{(y, n)} + C \frac{\partial (\psi - \varphi)}{\partial z} \cos \widehat{(z, n)},$$

а это обстоятельство не поведет ни к каким изменениям в заключении, вытекающем из неравенства.

Как частный пример уравнения типа (24) укажем уравнение установившегося течения газа при обычном предположении, что давление есть функция плотности. В таком случае мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0;$$

если $\rho = k\rho^n$, то

$$\rho = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right)^m, \quad m = \frac{1}{n-1},$$

и мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right)^m \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right)^m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right)^m \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

где

$$v^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 < v_0^2.$$

Отметим еще одно интересное обстоятельство. Предположим, что мы нашли две функции ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие условиям нашей теоремы и имеющие равные с основной функцией значения на границах области. Таким образом, пусть

$$f_1 = \Delta \psi_1 - p\psi_1 > 0, \quad f_2 = \Delta \psi_2 - p\psi_2 > 0, \quad \Delta \varphi - p\varphi = 0.$$

По теореме

$$\psi_1 > \varphi, \quad \psi_2 > \varphi.$$

Тогда из приведенного доказательства теоремы можно непосредственно

усмотреть, что при $f_1 > f_2$ мы имеем

$$f_1 - f_2 = \Delta (\psi_1 - \psi_2) - p (\psi_1 - \psi_2) > 0, \quad \psi_1 < \psi_2$$

и, следовательно, функции по величине во всех точках области располагаются в таком порядке:

$$\psi_1 < \psi_2 < \varphi.$$

Изложенная теорема в частном случае, когда φ не зависит ни от y , ни от z , позволяет установить верхнюю и нижнюю границы решения обыкновенного линейного уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = p\varphi$$

для того случая, когда интегральная кривая должна проходить через две заданные точки. Любопытно отметить, что никакого ограничения, вроде предела приложимости, который проявляется при применении основной теоремы, на этот раз мы не встречаем.

II. НОВЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДА

§ 1. Общая постановка задачи. При исследовании влияния профиля на работу железнодорожных поездов приходится искать зависимость основных переменных движения поезда: времени t , пути s и скорости v от того независимого переменного, через которое мы условимся выражать влияние профиля. В самом общем виде, когда профиль представляет собою произвольную кривую, влияние его на движение поезда состоит в том, что в каждый данный момент, если все остальные условия движения остаются прежними, благодаря изменению профиля, появляется слагающая силы тяжести отдельных элементов поезда, т. е. паровоза, тендера и вагонов, направление которой либо совпадает с направлением движения при уклонах, либо противоположно последнему при подъемах. Так как профиль мы берем криволинейный, то направление движения поезда, а также обратное направление в каждый момент для отдельных элементов поезда совпадают с положительным или отрицательным направлением касательных к кривой профиля в различных точках. Если считать, что силы тяжести каждого отдельного элемента поезда приложены в центре тяжести соответствующего элемента, то означенные точки будут точками пересечения кривой профиля с отвесными линиями, проходящими через отдельные центры тяжести.

Если взять начало координат в какой-либо точке кривой профиля и ось абсцис OX направить по горизонтали [в сторону движения], а ось ординат OY — по вертикали вниз, то кривая профиля изобразится каким-либо уравнением

$$f(x, y) = 0.$$

Касательная к этой кривой в произвольной точке (x, y) будет составлять с осью OX угол, который обозначим через φ , причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Так как сила тяжести направлена по вертикали, т. е. по оси OY , то ее слагающая по направлению касательной будет равна самой силе тяжести, помноженной на $\sin \varphi$, причем

$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds}.$$

При обозначении веса отдельного элемента поезда через Q_n слагающая этого веса по касательной к кривой профиля в точке (x_n, y_n) будет равна

$$F_n = Q_n \frac{dy}{ds}.$$

Так как углы φ для различных точек кривой будут различны, то для нахождения равнодействующей [касательных] слагающих [сил тяжести] от всех элементов поезда следовало бы спроектировать все [касательные составляющие] силы на оси координат. Однако ввиду того, что означенные проекции получаются весьма сложного вида

$$\sum Q_n \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} \text{ и } \sum Q_n \left(\frac{dy}{ds} \right)^2,$$

приходится прибегать к упрощениям, вытекающим из характера кривой профиля. Самой существенной чертой этой кривой является то, что ее абсциссы x значительно превосходят ее ординаты y , конечно, если только железная дорога не представляет собою типа фуникулерного пути. Ввиду сказанного с большой степенью точности для железных дорог, проходящих по равнинам, всегда можно принять, что на расстоянии от 1 до 2 км от точки, выбранной за начало координат, абсцисса x по горизонтали весьма мало отличается по величине от дуги кривой s . А так как длина поезда не превосходит 1 км, то для всех элементов его можно допустить, что

$$\frac{dx}{ds} = 1,$$

т. е. что сумма проекций касательных слагающих сил тяжести отдельных элементов на ось OX равна

$$F_x = \sum Q_n \frac{dy}{ds},$$

а сумма проекций тех же сил на ось OY равна

$$F_y = \sum Q_n \left(\frac{dy}{ds} \right)^2.$$

Но раз мы сделали допущение, что $dx = ds$, то это значит, что на протяжении, равном длине поезда, профиль представляет собою прямую линию,

наклоненную к горизонту под углом φ , для которого

$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds}.$$

Отсюда следует, что

$$F_s = \frac{dy}{ds} \sum Q_n = Q \frac{dy}{ds},$$

$$F_y = \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \sum Q_n = Q \left(\frac{dy}{ds} \right)^2,$$

где Q — вес всего поезда; относя слагающие силы тяжести по касательной к одной тонне веса поезда, получим, разделив предыдущие выражения на Q ,

$$f_s = \frac{dy}{ds}, \quad (1)$$

$$f_y = \left(\frac{dy}{ds} \right)^2. \quad (2)$$

Таким образом, мы представляем кривую профиля в виде наклоненных к горизонту под различными углами отрезков прямой линии, длина которых не превосходит длины поезда. Но это представление можно откинуть и рассматривать любой криволинейный профиль, если только допустить предположение, что и по криволинейному профилю поезд движется так же, как и по прямолинейному, т. е. как одна материальная точка с массой, равной массе всего поезда, сосредоточенной в центре тяжести всего поезда. В этом случае касательные слагающие силы тяжести, появляющиеся благодаря наклону профиля, выразятся теми же формулами (1) и (2).

При прямолинейном профиле, если принять во внимание, что $ds = dx$, формула (1) дает

$$f_s = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \pm i,$$

где величина i есть уклон (+) или подъем (—) в промиллях (‰), иначе, число килограммов добавочной силы на 1 m веса поезда.

§ 2. Различные формы приведенного уравнения движения поезда. Зная выражение величины f_s , можно теперь при исследовании влияния профиля применить основное дифференциальное уравнение движения поезда, представив его в следующем виде:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{\xi} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\xi} v \frac{dv}{ds} = a - bv + cv^2 - \frac{dy}{ds}; \quad (3)$$

здесь по принятому в инженерной практике обозначению

$$\xi = \frac{g}{1000} = 127 \text{ км/час}^2,$$

где g — ускорение силы тяжести, выраженное в км/час^2 . Разрешить это

уравнение в таком общем виде невозможно, но если задаться кривой профиля и выразить ординату ее y как функцию пути s или времени t , то решение для многих случаев вполне возможно, т. е. возможно, например, определить скорость v в зависимости от t или s или вообще одно из трех переменных определить в зависимости от двух других и от некоторых параметров. Мало того, если нам даже неизвестна кривая профиля, но известна лишь производная $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}$ как функция от t или от s , то и в этом случае мы можем определить одну переменную через две другие и через параметры, а также определить неизвестную кривую профиля.

Итак положим, что мы задались соотношением

$$\frac{dy}{ds} = F(s),$$

где $F(s)$ есть произвольная заданная функция от s ; тогда, очевидно,

$$y = \int_{s_0}^s F(s) ds$$

представляет кривую профиля, и дифференциальное уравнение (3) изобразится следующим образом:

$$\frac{1}{\xi} v \frac{dv}{ds} = a - bv + cv^2 - F(s), \quad (4)$$

т. е. нелинейным уравнением первого порядка, разрешенным относительно $\frac{dv}{ds}$. Если бы $\frac{dy}{ds}$ было задано в функции времени, то мы должны были бы интегрировать уравнение

$$\frac{1}{\xi} \frac{dv}{dt} = a - bv + cv^2 + f(t). \quad (5)$$

Из изложенного видно, что исследование влияния профиля на движение поезда сводится к вопросу о том, какой функцией мы можем выразить переменную величину i подъема или уклона профиля. В дальнейшем рассмотрим частные виды уравнений (4) и (5), соответствующие частным предположениям о виде функций, которыми характеризуется профиль пути; рассмотрим в виде примера уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \xi (a - bv + cv^2 - k \sin nt). \quad (6)$$

§ 3. Приближенное интегрирование уравнения. Полагаем $v = a + u$, где постоянной a можно придать значение начальной скорости v_0 или какой-либо из последующих скоростей; u будем считать количеством настолько малым, что cu^2 можно отбросить по сравнению с остальными членами при первом приближении. Числовой пример покажет, что такое предположение весьма возможно, если подъем не слишком длинен и изме-

нение скорости не выходит из некоторых довольно, впрочем, широких границ. Предположим, например, что начальная скорость перед подъемом $v_0 = 40$ км/час, скорость в конце подъема $v_1 = 20$ км/час. Положив $\alpha = 30$ км/час, для u будем иметь максимальный предел 10 км/час. При $a = 16$, $b = 0,47$, $c = 0,003$ имеем

$$\begin{aligned} a - bv + cv^2 &= a - b\alpha + c\alpha^2 - (b - 2c\alpha)u + cu^2 = \\ &= 16 - 14,1 + 2,7 - (0,47 - 0,18)u + 0,003u^2, \end{aligned}$$

и последний член при $u = 10$ значительно меньше предыдущих. Преобразовав уравнение (6) указанной подстановкой в следующее:

$$\frac{du}{dt} = \xi \{a - b\alpha + c\alpha^2 - (b - 2c\alpha)u + cu^2 - k \sin nt\}, \quad (7)$$

и рассматривая взамен его уравнение

$$\frac{du_1}{dt} = \xi \{a - b\alpha + c\alpha^2 - (b - 2c\alpha)u_1 - k \sin nt\},$$

находим его интеграл в виде

$$(b - 2c\alpha)u_1 = a - b\alpha + c\alpha^2 + Ce^{-\beta t} + h \cos nt + l \sin nt, \quad (8)$$

где $\beta = \xi(b - 2c\alpha)$, C — произвольное постоянное интегриации, а h и l имеют такие значения:

$$h = \frac{kn\beta}{n^2 + \beta^2}, \quad l = -\frac{k\beta^2}{n^2 + \beta^2}.$$

Эти значения показывают, что чем короче промежуток неровности пути, тем меньше h и l , тем меньше меняется скорость, что и должно быть. Подставив теперь выражение u_1 из равенства (8) на место u в член cu^2 в уравнение (7), мы найдем по интегриации полученного таким образом уравнения второе приближение, а затем можем снова повторить процесс, если это понадобится.

Что касается связи между полученными таким образом приближенным и истинным интегралами уравнения (6), то о ней можно судить на основании моей теоремы о дифференциальных неравенствах, а именно: если в результате подстановки в левую часть уравнения

$$\frac{dv}{dt} - \xi(a - bv + cv^2 - k \sin nt) = 0,$$

вместо v , такой функции t , которая при $t = 0$ имеет должную начальную величину $v = v_0$ и всюду непрерывна, получится результат, больший нуля, то указанная функция больше истинного v ; если же результат подстановки окажется отрицательным, то это значит, что подставленная функция меньше v .

В нашем случае результат подстановки первого приближенного значения будет

$$-\xi cu_1^2 < 0;$$

следовательно, это приближение даст нижний предел интеграла.

При помощи той же теоремы убеждаемся, что и второе приближение — результат интеграции уравнения

$$\frac{du}{dt} = \xi(a - bv + cu_1^2 - k \sin nt), \quad (9)$$

получающегося из уравнения (7) заменой в нем члена cu^2 через cu_1^2 , также окажется менее истинного значения u (всегда предполагается, что при $t = 0$ приближенное и истинное значения u совпадают). Третье приближение будет, в свою очередь, нижним пределом интеграла и т. д.

Если бы в уравнении (9) u_1 имело иное значение, именно, если бы оно представляло собою численно наибольшую предельную величину истинного значения u , то интеграция уравнения (9) дала бы верхнюю границу искомого интеграла. Легко видеть, что вместо истинного максимального значения можно вставить и вообще какую-либо постоянную, заведомо превышающую численно это количество; такая постоянная найдется, например, из рассмотрения выражения (8) для u_1 . В самом деле, так как $\alpha + u_1$ есть величина, меньшая истинной скорости $\alpha + u$, то при убывании v от начального значения v_0 функция u_1 будет все время величиной отрицательной, численно большей u , после того как перейдет через нуль (если $\alpha = v_0$, то это будет иметь место с самого начала); поэтому крайнее значение u_1 , даваемое формулой (8), может послужить для определения верхней границы u , а стало быть и v .

Верхнюю границу v можно было бы определить и иначе: в самом деле, достаточно в основном уравнении (6) заменить cv^2 через cv_0v , чтобы получить интегрируемое уравнение для определения интересующей нас функции, т. е. верхнего предела v .

Любопытно отметить несколько иную форму основного уравнения, которая поддается точной интеграции; в некоторых случаях она могла бы оказаться полезной. Дело в следующем: при переходе поезда с горизонтального пути на подъем он лишь короткое время будет находиться на участке криволинейного профиля. Это обстоятельство позволяет всякую функцию $f(t)$ на этом участке представить в виде $\alpha + \beta t$, где $\alpha = f(0)$, $\beta = f'(0)$. Имея это в виду, мы можем приближенно при любом профиле на криволинейном участке уравнение движения поезда изобразить в виде

$$c \frac{dv}{dt} = \xi \left\{ a'c - \frac{b^2}{4} + \left(cv - \frac{b}{2} \right)^2 + \xi \lambda t \right\},$$

где

$$a' = a + \alpha, \quad \xi \lambda = bc.$$

Положив затем

$$\sigma = \xi t + \frac{a'c - \frac{b^2}{4}}{\lambda}, \quad z = e^{-\int (cv - \frac{b}{2}) d\sigma},$$

$$\frac{dz}{d\sigma} = -\left(cv - \frac{b}{2}\right)z, \quad \frac{d^2z}{d\sigma^2} = \left[\left(cv - \frac{b}{2}\right)^2 - c \frac{dv}{d\sigma}\right]z,$$

мы преобразуем вышеприведенное уравнение так:

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} = -\lambda \sigma z. \quad (10)$$

Введя обозначения

$$z_1 = 1 - \frac{\lambda \sigma^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda^2 \sigma^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{\lambda^3 \sigma^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots,$$

$$z_2 = \sigma \left(1 - \frac{\lambda \sigma^3}{3 \cdot 4} + \frac{\lambda^2 \sigma^6}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{\lambda^3 \sigma^9}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots\right),$$

мы изобразим интеграл z в виде

$$z = Az_1 + Bz_2,$$

после чего найдем

$$cv - \frac{b}{2} = -\frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2},$$

$$C = \frac{B}{A},$$

$$\xi \left(cs - \frac{bt}{2}\right) = -\ln(z_1 + Cz_2),$$

если через s обозначить пройденный путь.

Вышеприведенный ряд можем вычислить и табулировать, руководясь аргументом $\lambda \sigma^3 = \tau$, и тогда вычисления всякий раз весьма просто доводятся до конца при любых частных значениях входящих в задачу постоянных.

Если бы в уравнении (10) коэффициент при z был $\lambda \sigma^u$, то в z_1 и z_2 пришлось бы заменить σ^3 через σ^{2+u} и в знаменателях $2 \cdot 3; 5 \cdot 6; 8 \cdot 9; \dots$ через

$$(1 + \mu)(2 + \mu); (4 + \mu)(5 + \mu); (7 + \mu)(8 + \mu), \dots,$$

т. е. всякое n через $n - 1 + \mu$.

§ 4. Приближенная интеграция уравнения движения поезда. Уравнение

$$v \frac{dv}{ds} - \xi \left(a - bv + cv^2 - \sum k_n \sin \frac{2\pi s}{l_n}\right) = 0, \quad (11)$$

где $\xi = \frac{g}{1000}$; g — ускорение силы тяжести в единицах км/час².

Требуется привести закон изменения скорости на криволинейном подъеме, где

$$y = h + \sum h_n \cos \frac{2\pi s}{l_n};$$

в этом случае

$$\frac{dy}{ds} = - \sum \frac{2\pi h_n}{l_n} \sin \frac{2\pi s}{l_n};$$

в написанном выше уравнении

$$k_n = 1000 \frac{2\pi h_n}{l_n}.$$

Для нахождения приближенного интеграла пользуемся нашей теоремой; если в уравнение

$$\frac{dy}{ds} - f(s, y) = 0$$

подставим функцию $z(s)$, имеющую при $s = s_0$ значение $z = y_0$, и получим результат, больший нуля, то на участке $s > s_0$ и z будет больше y :

$$z > y;$$

в противном случае знак последнего неравенства будет обратный. Вместо уравнения (11) рассмотрим уравнение

$$v \frac{dv}{ds} = \xi \left\{ a - \frac{bv_0}{2} + \left(c - \frac{b}{2v_0} \right) v^2 - \sum k_n \sin \frac{2\pi s}{l_n} \right\}, \quad (12)$$

получаемое из уравнения (11) путем умножения члена $-bv$ во второй части на $\frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{v_0}{v} \right)$; v_0 может не совпадать с начальной скоростью; множитель этот близок к единице, если поле изменения v не очень широко; так, если большее из крайних значений превосходит меньшее даже в два раза и если за v_0 мы примем среднюю скорость, то при

$$v_{\max} = 2v_{\min}, \quad 2v_0 = v_{\max} + v_{\min},$$

$$v_{\max} = \frac{4}{3} v_0, \quad v_{\min} = \frac{2}{3} v_0$$

наш множитель колеблется в пределах 1 и $1^{13/12}$; при более близких $v_{\max}$ и $v_{\min}$ его отличие от единицы будет еще менее значительно. Например, при

$$v_{\max} = \frac{3}{2} v_{\min}, \quad v_0 = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}$$

получится

$$v_{\max} = \frac{6}{5} v_0, \quad v_{\min} = \frac{4}{5} v_0$$

и, следовательно,

$$1 < \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{v_0}{v} \right) < \frac{41}{40}.$$

Еще более тесные пределы изменения множителя получатся, если за v_0 мы будем принимать среднее геометрическое между $v_{\max}$ и $v_{\min}$: если

$$v_0^2 = v_{\max} v_{\min},$$

то

$$1 < \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{v_0}{v} \right) < \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{v_{\max}}{v_{\min}}} + \sqrt{\frac{v_{\min}}{v_{\max}}} \right);$$

тогда при $v_{\max} = 2v_{\min}$

$$1 < \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{v_0}{v} \right) < \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,06;$$

при $v_{\max} = \frac{3}{2} v_{\min}$

$$1 < \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{v_0}{v} \right) < \frac{5\sqrt{6}}{12} \approx 1,02.$$

Итак, при правильном выборе v_0 , даже и при широких пределах изменения v , уравнение (12) оказывается весьма близким к уравнению (11). Интеграл его, как ясно из его вида, весьма просто получается в форме

$$v^2 + \frac{2a - bv_0}{2cv_0 - b} = C e^{ms} + \sigma,$$

$$m = 2 \left(c - \frac{b}{2v_0} \right) \xi,$$

где C — произвольная интегрирования, а σ — частный интеграл уравнения (12), который будет иметь вид

$$\sigma = \sum \left(H_n \cos \frac{2\pi s}{l_n} + K_n \sin \frac{2\pi s}{l_n} \right).$$

Подстановка его в уравнение (12) даст для определения H и K уравнения

$$\frac{2\pi K_n}{l_n} = m H_n, \quad -\frac{2\pi H_n}{l_n} = m K_n - 2\xi k_n;$$

отсюда

$$S H_n = \frac{4\pi \xi k_n}{l_n}, \quad S K_n = 2m \xi k_n, \quad S = m^2 + \frac{4\pi^2}{l_n^2}.$$

Произвольная постоянная C определяется так, чтобы при $s = s_0$ скорость v имела должную величину.

Полученное таким образом выражение $v = v'$ будет *менее истинного* на основании теоремы о дифференциальных неравенствах, так как в результате подстановки его в уравнение (11) мы получаем в левой части выражение

$$-\frac{\xi b}{2v_0}(v - v')^2,$$

меньшее нуля.

Составим теперь новое дифференциальное уравнение; заменив в уравнении (11) член bv через bv' , будем иметь

$$v \frac{dr}{ds} = \xi \left(a - bv' + cv^2 - \sum k_n \sin \frac{2\pi s}{l_n} \right). \quad (13)$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем значение $v = v''$ интеграла, который имеет должную величину при $s = s_0$. Нетрудно убедиться, что истинное v будет меньше v'' , ибо результат подстановки истинного значения v в уравнение (13) даст $-\xi b(v - v')$, что по предшествующему менее нуля; поэтому истинное значение v менее интеграла уравнения (13), т. е. менее v'' . Итак,

$$v'' > v > v'.$$

Вставляя v' вместо v_0 в уравнение (12), мы по интеграции получили бы более точное значение нижнего предела; проинтегрировав уравнение (13), в котором v' заменено более точным значением, мы нашли бы более близкий к истинному значению интеграла верхний предел и т. д.

Однако указанное интегрирование на деле привело бы к чрезвычайно сложным квадратурам, и потому для практического применения нужно найти иной путь. Можно поступить так: можно подставить в то же самое уравнение (13) на место v' более грубый нижний предел функции v , меняющийся с s . Для этого надо найти такую функцию от s , которая давала бы по подстановке в левую часть основного уравнения отрицательную величину, по возможности малую. Для приискания такой функции можно поступать различно. Один из путей таков: полагаем $v = \beta + u$, где β — некоторое значение скорости, которое, в частности, можно положить равным начальной скорости. Получаем

$$\beta \frac{du}{ds} = \xi \left\{ a - b\beta + c\beta^2 - (b - 2c\beta)u - \sum k_n \sin \frac{2\pi s}{l_n} \right\} - u \left(\frac{du}{ds} - \xi c u \right).$$

Отбросим последний член в правой части и интегрируем остающееся уравнение; его интеграл имеет вид

$$(b - 2c\beta)u = a - b\beta + c\beta^2 + Ce^{-hs} + \sum \left(H'_n \cos \frac{2\pi s}{l_n} + K'_n \sin \frac{2\pi s}{l_n} \right),$$

$$h = \frac{\xi}{\beta}(b - 2c\beta).$$

Коэффициенты определяются путем подстановки. Подставив затем резуль-

тат в отброшенный член и определив его значение на участке, прилегающем к точке $s = s_0$, мы на основании теоремы о дифференциальных неравенствах узнаем, по какую сторону истинного значения интеграла лежит найденное приближение.

§ 5. Приближенное интегрирование уравнения $v \frac{dv}{ds} = \xi(a - bv + cv^2 - \gamma is)$

Среди различных частных случаев, представляющихся вниманию исследователя при изучении уравнения движения поезда, естественно обращает на себя внимание тот, когда поезд, схематизируемый как определенной длины материальная цепь, входит с горизонтального пути на наклон. Нетрудно составить уравнение, соответствующее промежутку времени, когда совершается этот переход. Обозначив через L длину поезда и полагая $\gamma L = 1$, назвав, кроме того, через s длину той части поезда, которая уже поднялась на подъем i (или спустилась под уклон $-i$), мы, очевидно, будем иметь

$$v \frac{dv}{ds} = \xi(a - bv + cv^2 - \gamma is). \quad (14)$$

Этим уравнением определится движение в промежутке от $s = 0$ до

$$s = \frac{1}{\gamma} = L.$$

Полагаем в уравнении (14) для определенности $a = 15$; $b = 0,5$; $c = 0,004$; $\xi = 125$; $\gamma = 2,5$; $i = 5$; $s_{\max} = 0,4$; $v_0 = 50$;

$$a - bv_0 + cv_0^2 = 0.$$

Нижний предел $v = u$ находим из уравнения

$$u \frac{du}{ds} = \xi \left\{ a - \frac{bh}{2} - \left(\frac{b}{2h} - c \right) u^2 - \gamma is \right\}, \quad (15)$$

приняв во внимание, что $\frac{1}{2} \left(\frac{v}{h} + \frac{h}{v} \right)$ близко к единице, если h принадлежит к числу имевших место в действительности скоростей. В данном случае ввиду обращения в нуль $\frac{du}{ds}$ в уравнении (14) при $s = 0$ правильнее всего принять $h = v_0$, так как тогда и $\frac{du}{ds}$ в уравнении (15) удовлетворяет тому же условию $\frac{du}{ds} = 0$ при $s = 0$.

Обозначим для краткости u^2 через z ; введя все принятые числовые значения, найдем из уравнения (15)

$$\frac{dz}{ds} = 625 - \frac{z}{4} - 3125s.$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$u^2 = z = Ae^{-\frac{s}{4}} + 52\,500 - 12\,500s.$$

Произвольное постоянное A в нашем случае ввиду соотношений

$$z_0 = v_0^2 - 2500, \quad s_0 = 0$$

имеет величину $-50\,000$. Итак,

$$z = 52\,500 - 12\,500s - 50\,000e^{-\frac{s}{4}}. \quad (16)$$

При максимуме $s = 0,4$ достаточно взять разложение показательной функции, сохранив степени s до четвертой включительно:

$$e^{-\frac{s}{4}} = 1 - \frac{s}{4} + \frac{s^2}{32} - \frac{s^3}{3 \cdot 128} + \frac{s^4}{3 \cdot 8 \cdot 256};$$

поэтому формулу (16) можно переписать в виде

$$u^2 = z = 2500 - 3125 \frac{s^2}{2} + \frac{3125}{3} \frac{s^3}{8} - \frac{3125}{3} \frac{s^4}{128}.$$

При вычислении нижнего предела интеграла нужно в разложении показательной функции остановиться на положительном члене, уменьшая, таким образом, этот предел, как явствует из формулы (16). Минимальное значение $z_{\min} = z_1$ найдется из уравнения (16) при подстановке $s = 0,4$:

$$z_1 = 2500 - 250 + 8 \frac{1}{3} - \frac{5}{24} = 2258,125;$$

$$u_1 = \sqrt{z_1} \approx 47,52 \text{ км/час}.$$

При нахождении нижнего предела в сущности мы из правой части уравнения (14) вычли выражение $\frac{\xi}{2v_0} b (v - v_0)^2$, которое при $v = v_0$ обращается в нуль, а при близких к этому значению величинах скорости имеет очень малое значение по сравнению с остающимся ускорением, особенно с последним членом $-\gamma is$. Уравнение (14) может быть переписано в форме

$$v \frac{dv}{ds} - \xi \left[a - \frac{bv_0}{2} - \left(\frac{b}{2v_0} - c \right) v^2 - \gamma is \right] - \xi \frac{b}{2v_0} (v - v_0)^2 = 0,$$

которая и показывает, что в результате подстановки в уравнение (14) значения u , определенного из уравнения (15), получается отрицательная величина

$$-\frac{\xi b}{2v_0} (u - v_0)^2 < 0.$$

Для нахождения верхнего предела можно поступить аналогичным образом, именно прибавить к правой части

$$\xi \frac{b(v_0 - v)(v - v_1)}{v_0 + v_1}$$

выражение, обращающееся в нуль при $v = v_0$ и $v = v_1$ (где v_1 — нижний предел скорости) и положительное при промежуточных значениях скорости. Уравнение (14) может быть переписано в виде

$$v \frac{dv}{ds} - \xi \left[a - b \frac{v_0 v_1}{v_0 + v_1} - \left(\frac{b}{v_0 + v_1} - c \right) v^2 - \gamma i s \right] + \\ + \xi \frac{b}{v_0 + v_1} (v_0 - v)(v - v_1) = 0. \quad (17)$$

Легко видеть, что интеграл уравнения

$$w \frac{dw}{ds} - \xi \left[a - b \frac{v_0 v_1}{v_0 + v_1} - \left(\frac{b}{v_0 + v_1} - c \right) w^2 - \gamma i s \right] = 0, \quad (18)$$

имеющий начальное значение $w = v_0$, и будет давать верхний предел истинной скорости, определяемой из уравнения (14), ибо результат подстановки w в уравнение (17), тождественно совпадающее с уравнением (14), дает

$$\frac{b}{v_0 + v_1} (v_0 - w)(w - v_1) > 0.$$

За v_1 мы можем принять определенное выше $v_1 = 47,52$ или, проще, 47,5; после чего, по замене букв числами, уравнение (18) дает

$$\frac{dZ}{ds} = 2500 \frac{11}{39} - \frac{11}{39} Z - 3125s,$$

где $Z = w^2$. Отсюда

$$w^2 = Z = 3125 \left(\frac{39}{11} \right)^2 + 2500 - 3125 \frac{39}{11} s - 3125 \left(\frac{39}{11} \right)^2 e^{-\frac{11}{39}s},$$

или, по разложении в ряд показательной функции,

$$Z = 2500 - \frac{3125}{2} s^2 + \frac{3125}{3} \frac{s^3}{2} \frac{11}{39} - \frac{3125}{3} \frac{s^4}{8} \left(\frac{11}{39} \right)^2 + \frac{3125}{3} \frac{s^5}{40} \left(\frac{11}{39} \right)^3.$$

Здесь при разложении показательной функции необходимо было остановиться на отрицательном члене, опять-таки ввиду формулы (16).

При $s = 0,4$

$$Z_1 = 2250 + 8 \frac{1}{3} \left(1 + \frac{5}{39} \right) - \frac{5}{24} \left(1 + \frac{10}{39} + \frac{25}{39^2} \right) + \frac{4}{15} \left(\frac{11}{39} \right)^3 \approx 2259,145.$$

Но

$$Z_1 = z_1 + \varepsilon,$$

где ε есть единица с небольшой дробью, что меняет лишь сотые доли

километра в скорости, и мы получаем верхний предел часовой скорости

$$w_1 = \sqrt{Z_1} = 47,53 \text{ км/час.}$$

§ 6. Нахождение вторых, более близких пределов. Итак, положим, что мы нашли две функции u и w , между которыми заключается искомая функция v и которые суть первые пределы. Как найти более тесные пределы для v , т. е. такие функции u_1 и w_1 , которые с большим приближением подходят к v снизу и сверху на заданном участке от $s = 0$ до $s_{\max}$?

Напомним, что нижний предел u определяется из уравнения

$$u \frac{du}{ds} - \xi \left[a - \frac{bv_0}{2} - \left(\frac{b}{2v_0} - c \right) u^2 - \gamma is \right] = 0, \quad (19)$$

причем основное уравнение (14) преобразуется для этого случая в следующее:

$$v \frac{dv}{ds} - \xi \left[a - \frac{bv_0}{2} - \left(\frac{b}{2v_0} - c \right) v^2 - \gamma is \right] - \xi \frac{b}{2v_0} (v - v_0)^2 = 0; \quad (20)$$

а верхний предел w определяется из уравнения

$$w \frac{dw}{ds} - \xi \left[a - b \frac{v_0 u'}{v_0 + u'} - \left(\frac{b}{v_0 + u'} - c \right) w^2 - \gamma is \right] = 0, \quad (21)$$

где u' есть наименьшее значение u , соответствующее наибольшему s . Основное уравнение (14) преобразуется при этом так:

$$v \frac{dv}{ds} - \xi \left[a - b \frac{v_0 u'}{v_0 + u'} - \left(\frac{b}{v_0 + u'} - c \right) v^2 - \gamma is \right] + \xi \frac{b}{v_0 + u'} (v_0 - v) (v - u') = 0. \quad (22)$$

Если теперь в последний член уравнения (20) вместо v внесем верхний предел w , то это равенство нарушится. Для восстановления его мы должны уже взять не v , а другую функцию, назовем ее через u_1 ; для ее определения имеем следующее уравнение:

$$u_1 \frac{du_1}{ds} - \xi \left[a - \frac{bv_0}{2} - \left(\frac{b}{2v_0} - c \right) u_1^2 - \gamma is \right] - \xi \frac{b}{2v_0} (w - v_0)^2 = 0. \quad (23)$$

Подставим в последнее уравнение вместо u_1 искомую функцию v ; тогда, принимая во внимание уравнение (20), найдем, что уравнение (23) преобразуется в следующее неравенство:

$$\xi \frac{b}{2v_0} (v - v_0)^2 - \xi \frac{b}{2v_0} (w - v_0)^2 = \xi \frac{b}{2v_0} (v + w - 2v_0) (v - w) > 0,$$

так как множители $v - w$ и $v + w - 2v_0$ оба отрицательны на всем участке. Поэтому по теореме о дифференциальных неравенствах мы заключаем, что

$$u_1 < v.$$

Подставляя в уравнение (23) вместо u_1 функцию u , на основании уравнения (19) получим в результате подстановки

$$-\xi \frac{b}{2v_0} (w - v_0)^2 < 0,$$

т. е. $u < u_1$; иначе говоря, u_1 будет более близким нижним пределом к v , чем u .

Подставляя в тот же последний член уравнения (20) вместо v функцию u , получим следующее уравнение для определения новой функции w_1 :

$$w_1 \frac{dw_1}{ds} - \xi \left[a - \frac{bv_0}{2} - \left(\frac{b}{2v_0} - c \right) w_1^2 - \gamma is \right] - \xi \frac{b}{2v_0} (u - v_0)^2 = 0; \quad (24)$$

внося же сюда вместо w_1 искомое v , на основании уравнения (20) получим

$$\xi \frac{b}{2v_0} (v - u)(v + u - 2v_0) < 0,$$

так как $v - u$ положительно, а $v + u - 2v_0$ отрицательно на всем участке. Поэтому по теореме о дифференциальных неравенствах заключаем, что

$$w_1 > v;$$

это показывает, что w_1 есть верхний предел интеграла v . Но будет ли $w_1 < w$, т. е. будет ли w_1 более близким пределом к v , чем ранее определенный w , об этом нельзя судить на основании анализа в алгебраическом виде. В самом деле, подставляя в уравнение (24) вместо w_1 функцию w , на основании уравнения (21) получим в результате подстановки, что на всем участке

$$\frac{(v_0 - u)(u - u')}{v_0 + u'} - (w^2 - u^2) \frac{v_0 - u'}{2v_0(v_0 + u')} \geq 0, \quad (25)$$

так как при $u = v_0$ неравенство (25) имеет такой вид:

$$-(w^2 - v_0^2) \frac{v_0 - u'}{2v_0(v_0 + u')} \geq 0,$$

а при $u = u'$ оно имеет вид

$$-(w^2 - u'^2) \frac{v_0 - u'}{2v_0(v_0 + u')} < 0.$$

Следовательно, теорему о дифференциальных неравенствах в данном случае применить нельзя; тем не менее, в результате подстановки числовых величин получается $w > w_1$, что не противоречит соображениям, на основании которых выведена теорема о дифференциальных неравенствах.

Что касается уравнений (21) и (22), то, проделав с последним из них аналогичную операцию подстановки, как вышеизложенная, найдем в результате неравенство, знак которого будет изменяться с изменением s на рассматриваемом участке, и потому к нему не может быть приложена теорема о дифференциальных неравенствах.

Подсчет пределов и здесь не представляет труда, но я не нахожу нужным выписывать всех этих вычислений. Замечу только, что в результате второго приближения оказывается возможным в точке наибольшего расхождения обычно определить часовую скорость до долей метра.

§ 7. Случай $v=0$. Данный нами путь приближенного интегрирования уравнения

$$v \frac{dv}{ds} - \xi(a - bv + cv^2 - \gamma is) = 0 \quad (26)$$

неприложим в одном частном случае, именно если $v_0 = 0$. Тогда все приведенные выше рассуждения падают. Но в этом случае легко усмотреть совершенно иной, столь же естественный подход. Заметим, что [интервал изменения расстояния] s , на котором имеет место уравнение (26), не превышает длины поезда, почему и время, в течение которого происходит исследуемый процесс, также в общем невелико. Пока скорость не превосходит 10—15 км/час, член cv^2 мал по сравнению с bv ; в самом деле, при $b = 0,5$ и $c = 0,004$, как было принято выше, имеем

$$\text{для } v = 10: bv = 5,0; cv^2 = 0,4;$$

$$\text{» } v = 15: bv = 7,5; cv^2 = 0,9;$$

поэтому для первого приближения мы отбрасываем квадратичный член. Остающееся уравнение

$$u \frac{du}{ds} - \xi(a - bu - \gamma is) = 0 \quad (27)$$

преобразуем к виду

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \xi\left(a - b \frac{ds}{dt} - \gamma is\right) = 0$$

и интегрируем его точно, как линейное уравнение с постоянными коэффициентами, потребовав, чтобы при $t = 0$ было

$$s = \frac{ds}{dt} = u = 0.$$

Отысканную таким образом функцию

$$\frac{ds}{dt} = u$$

мы можем принять за нижнюю границу скорости v , ибо подстановка в уравнение (26) функции u вместо v дает в левой части $-\xi cv^2$; стало быть,

$$u < v.$$

Более близкий нижний предел найдется из уравнения (26) по замене в нем v в квадратичном члене ξcv^2 через найденное u . В самом деле, обозначив функцию, удовлетворяющую преобразованному таким образом уравнению, через u_1 , легко находим, что

$$u_1 > u,$$

так как по замене в уравнении

$$u_1 \frac{du_1}{ds} - \xi(a - bu_1 + cu^2 - \gamma is) = 0 \quad (28)$$

u_1 через u мы получаем в левой части, как это вытекает из уравнения (27), величину

$$-\xi cu^2 < 0.$$

С другой стороны, подстановка в уравнение (28) вместо u_1 скорости v дает

$$\xi c(v^2 - u^2) > 0.$$

Таким образом,

$$v > u_1 > u.$$

Чтобы найти верхнюю границу интеграла, рассуждаем так. Обозначим эту функцию через w ; по условию $w_0 = 0$; что же касается конечного значения w , то оно вообще неизвестно. Назовем его через α . Легко усмотреть, что интегрирование уравнения

$$w \frac{dw}{ds} - \xi[a - (b - c\alpha)w - \gamma is] = 0 \quad (29)$$

определит искомую верхнюю границу; в самом деле, подстановка $w = v$ в уравнение (29) дает

$$\xi c(v - \alpha)v < 0,$$

ибо α во всяком случае более v .

Для отыскания α будем иметь выражение скорости w , в конце процесса равной α , через известные величины и через то же α . Таким образом, получим некоторое определенное уравнение, из которого и найдем α . Через замену в квадратичном члене уравнения (27) функции u через найденную функцию w найдем новое дифференциальное уравнение

$$w_1 \frac{dw_1}{ds} - \xi(a - bw_1 + cw^2 - \gamma is) = 0, \quad (30)$$

которое определит нам следующую, более близкую к искомой скорости верхнюю границу ее w_1 . Это вытекает из того соображения, что в результате замены w_1 через w в левой части уравнения (30) мы получаем

$$\xi cw(\alpha - w) > 0;$$

следовательно,

$$w > w_1.$$

С другой стороны, подстановка v на место w_1 дает

$$\xi c(v^2 - w^2) < 0,$$

а стало быть,

$$w_1 > v.$$

Таким образом, мы получаем первое и второе приближения, а именно

$$w > w_1 > v > u_1 > u.$$

III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ БАЛЛИСТИКИ ПРИ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ДАННОМ ЛОРЕНЦОМ

§ 1. В предлагаемой статье мы даем прием для приближенного интегрирования уравнения баллистики в случае выражения силы сопротивления формулой

$$R = kmgv^2 \left[1 + \frac{Av^4}{(v^2 - a^2)^2 + c^2v^2} \right],$$

где a — скорость звука, c — особая скорость затухания колебаний, v — скорость снаряда, m — масса снаряда. Для простоты я рассматриваю лишь случай отлогой стрельбы. При навесной придется пользоваться разбивкой траектории на участки обычными приемами баллистики. Все дело в интеграции основного уравнения между скоростью и углом наклона (уравнения годографа). Если этот угол будем обозначать через θ и скорость через v , то

$$\begin{aligned} m \frac{d(v \cos \theta)}{dt} &= -R \cos \theta, & v^2 \frac{d\theta}{ds} &= \frac{v^2}{\rho} = -g \cos \theta, \\ g \cos \theta &= -v \frac{d\theta}{dt}, & mg \frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} &= vR. \end{aligned} \quad (1)$$

Последнее уравнение и надо интегрировать прежде всего. Разумеется, можно говорить лишь о приближенном интегрировании этого уравнения.

Я опираюсь на следующую доказанную мною теорему: пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0, \quad (2)$$

разрешенное относительно производной искомой функции; пусть, далее, z — некоторая функция x , имеющая при начальном значении переменной $x = x_0$ то же значение y_0 , которое должен иметь искомый интеграл; пусть, далее, в результате подстановки z на место y в наше дифференциальное уравнение получается величина, бóльшая нуля при всех значениях переменной x на интересующем нас участке, примыкающем к точке $x = x_0$; тогда, если этот участок лежит в области обыкновенных точек функции $f(x, y)$ и если как z , так и y по смыслу задачи не обладают здесь особыми точками, то мы будем иметь $z > y$ для $x > x_0$ и $z < y$ при $x < x_0$.

§ 2. Приведем уравнение (1) годографа к общему виду (2) уравнения первого порядка. Его можно преобразовать двумя способами.

а) Избрав новые переменные

$$x = \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right), \quad y = \frac{a^2}{v^2},$$

будем иметь

$$dx = \frac{d\theta}{\cos \theta}, \quad dy = -2a^2 \frac{dv}{v^3};$$

$$\sin \theta = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \operatorname{th} x$$

и

$$\frac{R}{mgv^2} = k \left[1 + \frac{A}{(1-y)^2 + b_f} \right],$$

где

$$b = \frac{c^2}{a^2}.$$

Подставляя в уравнение (1) годографа в раскрытом виде

$$mg \left(\cos \theta \frac{dv}{d\theta} - v \sin \theta \right) - vR = 0$$

и преобразовывая его к новым переменным, получим:

$$\frac{dy}{dx} + 2y \operatorname{th} x + n \left[1 + \frac{A}{(1-y^2) + by} \right] = 0, \quad (3)$$

где

$$n = 2ka^2.$$

б) Подставляя

$$v \cos \theta = a\sigma^{-\frac{1}{2}},$$

или

$$\sigma = \frac{a^2}{v^2 \cos^2 \theta},$$

то же уравнение представим в виде

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{n}{\cos^3 \theta} \left[1 + \frac{A}{(1 - \sigma \cos^2 \theta)^2 + b\sigma \cos^2 \theta} \right] = 0. \quad (4)$$

§ 3. С точки зрения теории, пожалуй, прямее путь приближенного интегрирования уравнения (3), особенно если иметь в виду только это уравнение, не обращая пока внимания на прочие уравнения баллистики.

При отлогой стрельбе величина x , начиная с начального значения x_0 , все время убывает. Заметим, что и гиперболическая функция $\operatorname{th} x$ будет убывать. Проинтегрируем уравнение

$$\frac{dz}{dx} + 2z \operatorname{th} x_0 + n \left[1 + \frac{A}{(1-z^2) + bz} \right] = 0. \quad (5)$$

Возьмем интеграл, который при $x = x_0$ равен y_0 , и подставим его в уравнение (3). Получим в левой части, приняв во внимание равенство (5):

$$H = 2z (\operatorname{th} x - \operatorname{th} x_0);$$

так как $x_0 > x$, то $H < 0$, и, следовательно, по приведенной теореме $z > y$. При

$$x = x_0, \quad z_0 = y_0$$

по дифференциальному уравнению следует

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0;$$

поэтому искомая интегральная кривая, прикоснувшись в точке $x = x_0$ к кривой $z = z(x)$, должна далее идти ниже ее.

Так как в нашем случае, по условию вопроса, y должно с течением времени, т. е. с убыванием переменного x , возрасти, то x , вычисленное из уравнения $z = z(x)$, будет более x , которое получилось бы из интегрального соотношения $y = y(x)$ при $y = z$; это видно непосредственно на рис. 5, на которой OA соответствует интегральной функции y , а OB — функции z .

На этом основании, назвав через $x_1 = x(z)$ выраженное в зависимости от z решение уравнения

$$z = z(x),$$

будем иметь

$$\text{th } x_1 > \text{th } x;$$

но, с другой стороны, ясно, что

$$\text{th } x_0 > \text{th } x_1,$$

так как $x_0 > x_1$; на чертеже $Ox_0 > OB$; лишь в начальный момент $x_1 = x_0$.

Представим теперь себе, что мы проинтегрировали уравнение

$$\frac{dz_1}{dx} + 2z_1 \text{th } x_1 + n \left[1 + \frac{A}{(1 - z_1)^2 + bz_1} \right] = 0, \quad (6)$$

где переменные опять разделяются, так как $x_1 = x_1(z_1)$. Подставив интеграл уравнения (6), имеющий начальное значение $z_0 = y_0$, в уравнение (3), мы получим в результате подстановки

$$H_1 = 2 (\text{th } x - \text{th } x_1) z_1 < 0,$$

так как

$$x < x_1, \quad z_1 > 0,$$

а следовательно, $y < z$; но подстановка z_1 в уравнение (5), определяющее z , дает

$$H_2 = 2 (\text{th } x_0 - \text{th } x_1) z_1 > 0,$$

так как $x_0 > x$. Поэтому $z_1 < z$. Окончательно

$$y < z_1 < z.$$

Итак, мы приблизились к искомому интегралу. Повторив операцию, мы найдем z_2 такое, что

$$y < z_2 < z_1,$$

и так далее.

С другой стороны, если за исходное уравнение вместо (5) мы возьмем уравнение

$$\frac{dz'}{dx} + 2z' \text{th } x' + n \left[1 + \frac{A}{(1 - z')^2 + bz'} \right] = 0,$$

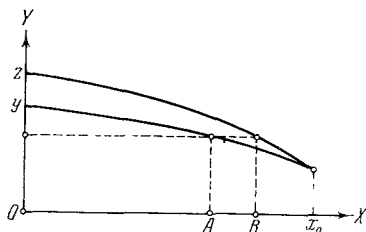


Рис. 5

в котором x' есть постоянное, определяемое углом падения θ_1 , заранее неизвестное, подлежащее определению по прочим уравнениям баллистики и удовлетворяющее неравенству $x > x'$, то интеграл этого уравнения, имеющий значение y_0 при $x = x_0$, даст нам нижний предел интегральной кривой; мы будем иметь $y > z'$; переходя от z' к z'_1 и z'_2 аналогично тому, как мы выше переходили от z к z_1 и z_2 , будем иметь

$$y > z'_2 > z'_1 > z'.$$

Ясно, что таким образом мы можем постепенно подходить к искомому интегралу.

§ 4. Изложенный прием, совершенно ясный с математической стороны, неудобен по причине значительных вычислительных трудностей. С точки зрения возможного упрощения вычислений удобнее исходить из другой формы основного баллистического уравнения, именно уравнения (4):

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{n}{\cos^3 \theta} \left[1 + \frac{A}{(1 - \sigma \cos^2 \theta)^2 + b\sigma \cos^2 \theta} \right] = 0. \quad (7)$$

Назовем через σ_0 значение σ при $\theta = \theta_0 = \alpha$. Отыскав интеграл уравнения

$$\frac{d\tau}{d\theta} + \frac{n}{\cos^3 \theta} \left[1 + \frac{A}{1 - (2 - b)\tau \cos^2 \alpha + \tau^2} \right] = 0, \quad (8)$$

который имеет значение $\tau = \sigma_0$ при $\theta = \alpha$, и подставив его в уравнение (7), получим в результате

$$G = \frac{nA [\tau (2 - b) (\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha) + \tau^2 (1 - \cos^4 \theta)]}{\cos^3 \theta [1 - (2 - b)\tau \cos^2 \theta + \tau^2 \cos^4 \theta] [1 - (2 - b)\tau \cos^2 \alpha + \tau^2]}.$$

Ясно, что $G > 0$ пока $\cos^2 \theta > \cos^2 \alpha$, $\theta < \alpha$, и, следовательно, по основной теореме здесь τ менее σ . На участке пути, где $\cos^2 \theta < \cos^2 \alpha$, т. е. в точках, близких к месту падения снаряда, числитель G будет также более нуля, потому что в этих точках, вообще говоря, τ , отношение квадрата скорости звука к квадрату [проекции] скорости снаряда [на горизонталь], уже значительно более единицы, и мы будем иметь в числителе в самой неблагоприятной точке, точке падения ($\theta = \alpha'$),

$$(2 - b) (\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha') + \tau \sin^2 \alpha' (1 + \cos^2 \alpha') > 0,$$

по причине указанного значения количества $\tau > 2 - b$. Если бы τ не было более единицы вблизи точки падения, то можно было бы в формуле (8) ввести вместо начального угла α угол падения α' , и тогда никаким сомнениям о знаке выражения G не осталось бы места.

Вместо τ можно взять мало отличающуюся от него функцию s , меньшую τ , которая найдется в результате интегрирования уравнения

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{n}{\cos^2 \theta} \left[1 + \frac{A}{1 - (2 - b)s \cos^2 \alpha + s^2} \right] \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} - \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{8} \right) = 0. \quad (9)$$

Интеграл этого уравнения, равный σ_0 при $\theta = \alpha$, наверное меньше τ . В самом деле, результат его подстановки в уравнение (8) дает

$$G' = H^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{8} \right) > 0,$$

так как

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} - \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} - \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{8} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^6 \theta}{8} - \frac{\operatorname{tg}^8 \theta}{64} > 0.$$

Начать можно с интеграла уравнения, которое получится из уравнения (9) заменю последней скобки просто единицей, стало быть, уравнения

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{n}{\cos^2 \theta} \left[1 + \frac{A}{1 - (2-b)s \cos^2 \alpha + s^2} \right] = 0.$$

Проинтегрировав его и найдя $\operatorname{tg} \theta = F(s)$, в интеграле уравнения (9) член

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{6} - \frac{\operatorname{tg}^5 \theta}{40}$$

можем заменить выражением

$$\frac{1}{6} F^3(s) - \frac{1}{40} F^5(s).$$

Таким образом, мы придем к более точному значению $\operatorname{tg} \theta$ и найдем s , т. е. нижний предел

$$\sigma > s.$$

Далее можно поступать способом, аналогичным тому, который мы употребляли при интегрировании уравнения (3). А именно, так как θ_1 и θ_2 , определенные для равных значений s и σ из уравнений

$$s = f(\theta), \quad \sigma = \varphi(\theta),$$

будут, как видно из рис. 6, удовлетворять неравенству

$$\theta_1 < \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = \theta = f^{-1}(s), \quad \theta_2 = \theta = \varphi^{-1}(\sigma),$$

то, проинтегрировав уравнение

$$\frac{ds_1}{d\theta} + \frac{n}{\cos^2 \theta_1} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_1}{2} - \frac{\operatorname{tg}^4 \theta_1}{8} \right) \left[1 + \frac{A}{1 - (2-b)s_1 \cos^2 \theta_1 + s_1^2} \right] = 0,$$

мы опять найдем $s_1 < \sigma$ и подойдем несколько ближе к искомому интегралу, так как s_1 будет более s . Но легко видеть, что мы не в состоянии будем повторением этого приема подойти как угодно близко к искомому

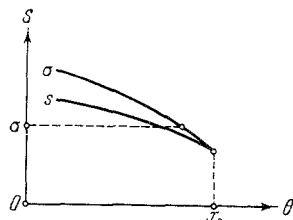


Рис. 6

интегралу, так как коэффициент при s^2 в знаменателе дроби

$$\frac{A}{1 - (2 - b)s \cos^2 \theta + s^2}$$

приходится оставлять равным единице, что существенно меняет вид уравнения.

Другая, а именно, верхняя граница σ найдется интегрированием уравнения

$$\frac{d\tau'}{d\theta} + \frac{n}{\cos^3 \theta} \left(1 + \frac{A}{1 - (2 - b)\tau' + \tau'^2 \cos^4 \alpha'} \right) = 0,$$

причем $\tau_0 = \sigma_0$, где α' — угол падения; вместо этого уравнения можно взять

$$\frac{ds'}{d\theta} + \frac{n}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{A}{1 - (2 - b)s' + s'^2 \cos^4 \alpha'} \right) = 0.$$

Будем иметь $s' > \tau' > \sigma$, если $s'_0 = \tau'_0 = \sigma_0$. От s' можно перейти к $s'_1 < s'$ путем интегриации уравнения

$$\frac{ds'_1}{d\theta} + \frac{n}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{A}{1 - (2 - b)s'_1 + s'^2_1 \cos^4 \theta} \right) = 0,$$

где θ нужно определить через s'_1 из уравнения $s'_1 = F_1(\theta)$, полученного путем замены s' через s'_1 в интеграле предшествующего уравнения.

Таким образом, окончательно найдем

$$s' > s'_1 > \sigma > s_1 > s.$$

Пределы s'_1 и s_1 будут ближе друг к другу, чем начальные приближенные интегралы s' и s .

§ 5. Практически окажется, может быть, более удобным следующий прием приближенной интеграции уравнения (7), т. е.

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{n}{\cos^3 \theta} \left(1 + \frac{A}{1 - (2 - b)\sigma \cos^2 \theta + \sigma^2 \cos^4 \theta} \right) = 0. \quad (10)$$

Что касается количества $\frac{1}{\cos \theta}$, то его по-прежнему будем заменять через

$$p_* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \quad \text{или} \quad p_* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^4 \theta,$$

смотря по тому, определяем ли мы верхний или нижний предел интеграла. Знаменатель же дроби, стоящей в скобках, заменим через $1 - (2 - b)h\sigma + h'\sigma^2$, где количества h и h' суть правильные дроби, чрезвычайно мало отступающие от единицы, так как они должны лежать в пределах $1 > h > \cos^2 \alpha$ и $1 > h' > \cos^4 \alpha'$.

Проинтегрировав уравнения

$$\frac{d\sigma'}{d\theta} + \frac{np'}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{A}{1 - (2-b)h_{\sigma'} + h_{\sigma'}^2} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\sigma''}{d\theta} + \frac{np''}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{A}{1 - (2-b)h_{\sigma''} + h_{\sigma''}^2} \right) = 0, \quad (12)$$

интегралы этих уравнений, имеющие значения $\sigma' = \sigma'' = \sigma_0$ при $\theta = \alpha$, подставим затем в левую часть уравнения (10); в результате получим соответственно G' и G'' . Затем подыскиваем коэффициенты h и h' (лежащие в указанных пределах) под условием, чтобы было $G' < 0$; коэффициенты же h'' и h''' должны приводить к неравенству $G'' > 0$. Тогда $\sigma' > \sigma > \sigma''$. Разумеется, чем ближе к равенству количества h' и h'' , с одной стороны, h и h'' — с другой, тем пределы будут теснее и тем точнее будет искомым интеграл.

Однако это уравнение (10) само по себе не даст возможности с достаточной точностью определить коэффициент h . Для этого придется обратиться к другим уравнениям баллистики и определить по ним сначала пределы, в которых лежат σ' и $-\alpha'$, значения величин σ и θ в точке падения. Лишь тогда мы будем иметь перед собою всю область изменения величин σ и θ , а стало быть, лишь тогда вполне строго можно судить о знаках выражений G' и G'' в пределах изменения переменных при изучаемом движении.

§ 6. Подводя окончательное резюме сказанному, намечаем нижеследующий путь решения задачи. Интегрируем уравнение (11). Найденное значение функции σ_1 будет более σ при должном подборе подлежащих определению величин h и h' . Далее, обращаемся к уравнениям

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{a} \sqrt{\sigma} \cos^2 \theta, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{\sigma}}, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta,$$

которые дают

$$[dt = -\frac{a}{g} \frac{dp}{\sqrt{\sigma}}, \quad dx = -\frac{a^2}{g} \frac{dp}{\sigma}, \quad dy = -\frac{a^2}{g} \frac{p dp}{\sigma},$$

где для краткости письма введено обозначение

$$p = \operatorname{tg} \theta.$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{dt}{dp} + \frac{a}{g \sqrt{\sigma}} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{a^2}{g} \frac{1}{\sigma} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dy}{d(p^2)} + \frac{a^2}{2g\sigma} = 0. \quad (15)$$

Допустим что мы вместо σ подставим в эти уравнения количество σ_1 , которое для ясности рассуждений будем себе представлять выраженным через p , и таким образом определим приближенное время t_1 и координаты снаряда x_1 и y_1 . Чтобы охарактеризовать соотношение между этими приближенными и истинными значениями функций t, x, y , подставим отысканные их выражения в уравнения (13), (14), (15), в которых будем под σ понимать его истинную величину. Соответственные значения левых частей

$$\frac{a}{g} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \right), \quad \frac{a^2}{g} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_1} \right)$$

и

$$\frac{a^2}{2g} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_1} \right)$$

все будут положительны, если $\sigma_1 > \sigma$; следовательно, мы нашли нижние пределы значений искомых функций.

Исходя из интегралов σ_u уравнения (12), найдем таким же способом t_2, x_2, y_2 ,

которые при надлежащем выборе h_u и h_u' явятся верхними границами количеств t, x и y . В обоих случаях σ определяется при одном и том же угле θ , или, что все равно, неизменном значении количества $p = \operatorname{tg} \theta$.

Положив $y_1 = 0$, найдем $p_1' = -\operatorname{tg} \alpha'$, т. е. тангенс угла падения, который будет, как нетрудно сообразить, численно менее истинного p' . Из уравнения $y_2 = 0$ найдем $p_2' > p'$ (не надо забывать, что p' отрицательно). Эти соотношения пояснены на рис. 7, где A будет истинная точка падения (OA — истинная траектория); здесь $p = p', x = x', y = y', A$, и A_u будут неизвестные нам положения снаряда, характеризуемые значением $p = p' = -\operatorname{tg} \alpha'$ переменного p на приближенных траекториях OB, A , и $OB_u A_u$. Значение $p = p_1'$ соответствует точке B , траектории I , p_2' — точке B_u траектории II ; соответственно σ , и σ_u в этих точках будут равны σ' , и σ_u' .

Теперь обращаемся, наконец, к выражениям G , и G_u на предыдущей странице. Так как G , должно быть менее нуля, то, отыскав в найденных пределах σ_0 и σ' изменения σ максимальное значение G , приравняем его нулю; тогда условие, наложенное на G , будет удовлетворено, и мы найдем одно соотношение между h , и h' .

Таким же образом, требуя, чтобы наименьшая величина G_u была нулем, найдем соответствующее соотношение между h_u и h_u' . Два остальных соотношения между h могут быть определены из различных соображений, если иметь в виду возможное сближение найденных пределов изменения величин, фигурирующих в задаче. Кажется, всего естественнее было бы требовать, чтобы границы, найденные для дальности полета снаряда ($x_1 = X_1$ и $x_2 = X_2$ при соответственных ординатах, равных нулю) и для времени его нахождения в воздухе T , были возможно ближе между собою,

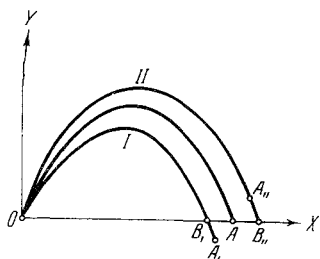


Рис. 7

т. е. $X_2 - X_1$ и $T_2 - T_1$ должны иметь наименьшую возможную для них величину. Может быть, вместо $T_2 - T_1$ практичнее рассматривать разность ординаты Y_1 , которую кривая I имеет в точке X_2 , и Y_2 — ординаты кривой II , определенной для точки $X = X_1$, и требовать наименьшего числового значения разности

$$Y_2 - Y_1 \quad (Y_1 < 0, Y_2 > 0).$$

Что задача, которая нами поставлена, имеет решение искомого типа, явствует из следующих соображений: при интегрировании уравнения (10) ранее рассмотренным нами приемом были найдены значения функций s' и s , из которых первая представляет верхний предел σ и соответствует σ_1 , вторая, как и σ_0 , является нижним пределом для σ :

$$s' > \sigma > s.$$

Легко видеть, что s есть частное значение σ_1 , получаемое при $h_1 = 1$, $h'_1 = \cos^4 \alpha_1$, а σ_0 — частное значение s , соответствующее $h_0 = \cos^2 \alpha$, $h'_0 = 1$.

Кстати сделаем здесь еще замечание об определении α' . После того как по найденному s' будет найдено y , из равенства $y = 0$ мы найдем соответственное значение угла $\theta = -\alpha'$ путем совместного решения уравнения $y = 0$ с уравнением $\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \alpha' = f(s')$.

Если пределы σ_1 и σ_0 , между которыми находится искомым интеграл, недостаточно близки, то, подставив в уравнение (10) вместо $\sigma \cos \theta$ по очереди значения этого количества и определив их в функции σ при помощи уравнений $\operatorname{tg} \theta_1 = F(\sigma_1)$, $\operatorname{tg} \theta_0 = F(\sigma_0)$, мы получим путем его интегрирования более близкое значение σ ; при этом для решения вопроса о том, в каком соотношении стоят новые значения s с истинной величиной σ , должно опять воспользоваться нашей основной теоремой о дифференциальных неравенствах.

IV. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. В брошюре автора «Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений»¹ изложена основная теорема, на которую опирается способ, и в общих чертах охарактеризован порядок интегрирования. Здесь я приведу доказательство этой теоремы, называемой мною также теоремой о дифференциальных неравенствах, ограничиваясь уравнением первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0. \quad (1)$$

¹ Журнальная статья в повременном издании НКПС, Москва, 1919 [стр. 307—322 настоящего издания].

Теорема. Допустим, что мы нашли функцию $t = t(x)$ с такими свойствами:

- 1) $t_0 = y_0$ при $x = x_0$;
- 2) всюду на участке (x_0, X) , прилежащем к x_0 , где значения x более x_0 , результат подстановки t на место y в уравнение (1) более нуля, т. е.

$$\frac{dt}{dx} - f(x, t) > 0. \quad (2)$$

Предположим, далее, что на этом участке искомый интеграл y и функция t не обладают особенными точками. Тогда для всех x , больших x_0 и не превосходящих определенного выше предела X , будет существовать неравенство

$$t > y.$$

Знак этого неравенства был бы обратный в случае противоположного знака в неравенстве (2); неравенство будет также обратного знака в области прилежащих к точке x_0 значений независимого переменного, меньших x_0 .

Для доказательства теоремы из выражений (1) и (2) составим неравенство

$$\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx} - p(t - y) > 0,$$

где

$$p = \frac{f(x, t) - f(x, y)}{t - y}$$

представляет собою на основании наложенных на t и y условий вполне определенную, хотя и неизвестную нам функцию x , всюду конечную в области интересующих нас значений переменных; для $x = x_0$ функция эта, очевидно, имеет значение

$$p = \left(\frac{df}{dt} \right)_{x=x_0}.$$

Умножим построенное нами неравенство на положительный в наших условиях множитель

$$s dx = e^{-\int_{x_0}^x p dx}.$$

Интегрируя в пределах x_0 и x , получаем

$$\int_{x_0}^x (t - y) s > 0.$$

Так как $t_0 = y_0$, то по упрощении это неравенство приводит к искомому результату

$$t > y.$$

Если бы x было менее x_0 , то на пути интегриции dx было бы отрицательно, и, следовательно, при умножении на sdx неравенства в нем пришлось бы изменить знак, а это повело бы к изменению знака результата.

Само собою ясно, что функция z , удовлетворяющая неравенству

$$\frac{dz}{dx} - f(x, z) < 0$$

и условию

$$z_0 = y_0,$$

даст

$$z < y.$$

Будем называть определенную таким образом функцию верхней или нижней границей интеграла, смотря по знаку неравенства, так как интеграл y будет заключен между t и z :

$$t > y > z.$$

Ясно, что для приближенного интегрирования уравнения (1) достаточно тем или иным путем определить верхнюю и нижнюю границы интеграла так, чтобы разность между значениями t и z при всех значениях независимого переменного была возможно меньше. Переводя это на геометрический язык, мы можем сказать, что на плоскости OXY надлежит выделить

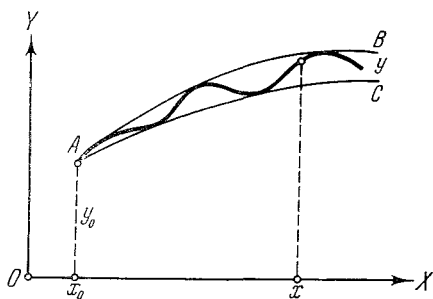


Рис. 8

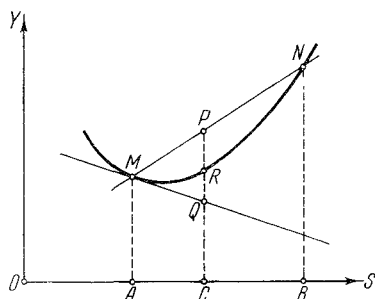


Рис. 9

ленту ABC , по возможности узкую, внутри которой необходимо должна лежать интегральная кривая Ay (рис. 8). Понятно, что уравнения $t = t(x)$ и $z = z(x)$ определяют в таком случае граничные кривые AB и AC .

Способ, при помощи которого, опираясь на доказанную теорему, можно приближенно проинтегрировать данное дифференциальное уравнение, очевиден: все сводится к отысканию верхней и нижней границ интеграла.

Имея дело с уравнением (1), можно поступить так. Меняя по возможности мало вид уравнения, стремимся привести его к интегрируемой форме; интеграл измененного уравнения, имеющий то же начальное значение,

как искомое решение уравнения (1), подставляем в это последнее и определяем знак результата; если он положителен, то мы нашли верхнюю границу интеграла уравнения (1) для x , превышающих начальную величину; противоположный знак результата показал бы, что мы имеем дело с нижней границей.

Установив обе границы и воспользовавшись ими как первым приближением, можно в том или другом частном случае ближе подойти к интегралу, подставив в некоторые члены $f(x, y)$ на место y его верхнюю или нижнюю границы. Знак результата подстановки найденного таким образом второго приближения позволит судить, имеем ли мы дело с нижней или верхней границей искомого интеграла.

Указанный прием оставляет значительное место интуиции во всякой реальной задаче, и с этой точки зрения представляется как бы не вполне выработанным. В настоящей заметке я даю совершенно определенный метод, применимый ко всякому уравнению первого порядка, удовлетворяющему условиям основной теоремы, и позволяющий как угодно близко подойти к интегралу данного уравнения.

§ 2. Итак, пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0.$$

Допустим, что, опираясь на основную теорему о дифференциальных неравенствах, мы нашли функции x , представляющие собою верхний и нижний пределы интеграла. Тогда мы будем иметь на участке значений x , заключенных между x_0 и X , большем x_0 , следующие соотношения:

$$t_0 = z_0 = y_0 \text{ при } x = x_0, \quad (3)$$

$$t > y > z, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dx} - f(x, z) = \varphi(x) < 0, \quad (5)$$

$$\frac{dt}{dx} - f(x, t) = \psi(x) > 0, \quad (6)$$

причем три последние справедливы для всякого x , лежащего на участке (x_0, X) , т. е. при $x_0 < x < X$.

Допустим сначала, что пределы z и t сближены между собою настолько, что $\frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2}$ по замене s каким угодно числом, лежащим между соответствующими значениям x величинами t и z , при любом возможном x сохраняет неизменный знак. Будем для определенности предполагать, что знак этот — плюс. Впоследствии мы увидим, как изменяется решение задачи в противоположном случае.

Введем обозначения

$$y - z = \zeta, \quad t - y = \tau.$$

В силу соотношения (5) имеем

$$\frac{d\xi}{dx} - f(x, y) + f(x, z) + \varphi(x) = 0;$$

а отсюда

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \xi + \varphi(x) = \alpha, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \xi^2 > 0,$$

так как по теореме Тейлора

$$f(x, y) = f(x, z) + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \xi^2,$$

где s — величина, промежуточная между y и z ; на рассматриваемом же участке значений независимого переменного x вторая производная, входящая в остаточный член, по условию положительна. Отметим, что при $x = x_0$ мы должны иметь $\xi_0 = 0$ в силу соотношения (3), а при прочих значениях x получим $\xi > 0$ на основании условия (4).

Отыскиваем обращающийся в нуль при $x = x_0$ интеграл линейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \xi + \varphi(x) = 0; \quad (8)$$

он будет таков:

$$\xi = -e^{\int_{x_0}^x f'_z dx} \int_{x_0}^x \varphi(x) e^{-\int_{x_0}^x f'_z dx} dx,$$

где через f'_z обозначена для краткости частная производная $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$.

Подстановка нуля на место ξ в уравнение (8) дает результат, меньший нуля, так как $\varphi(x) < 0$; поэтому по теореме о дифференциальных неравенствах

$$0 < \xi;$$

та же теорема ввиду того, что замена ξ через ζ в уравнении (8) по равенству (7) дает в результате $\alpha > 0$, приводит к неравенству

$$\zeta > \xi,$$

или

$$y - z > \xi.$$

Резюмируя отмеченные неравенства, мы приходим к следующему окончательному результату:

$$y > z + \xi > z, \quad (9)$$

и, стало быть, мы нашли новый, также нижний предел

$$z_1 = z + \xi,$$

более близкий к интегралу. По теореме о дифференциальных неравенствах мы должны иметь

$$\frac{dz_1}{dx} - f(x, z_1) = \varphi_1(x) < 0, \quad (10)$$

так как, кроме неравенства (9), z_1 удовлетворяет также и требованию

$$z_{10} = z_0 = y_0 \quad \text{при } x = x_0.$$

Повторяя по отношению к уравнению (10) тот же процесс, мы получим новый, еще более близкий нижний предел интеграла $z_2 = z_1 + \xi_1$ и т. д.

Обратимся к изысканию более близкого верхнего предела. На основании уравнения (6), имея в виду, что $t = y + \tau$, получаем

$$\frac{d\tau}{dx} - f(x, t) + f(x, y) - \psi(x) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, приняв во внимание, что по условию сохранения знака второй производной функции f кривая

$$Y = f(x, s),$$

где Y и s — текущие координаты, при всяком данном x обращена своею вогнутостью в сторону положительных y , как это изображено на рис. 9: здесь

$$\begin{aligned} OA = z, & \quad OB = t, & \quad OC = y, \\ RC = f(x, y), & \quad MA = f(x, z), & \quad NB = f(x, t). \end{aligned}$$

MQ — касательная в точке M . Легко усматриваем, что

$$RQ = f(x, y) - f(x, z) - \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \zeta = \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \frac{\zeta^2}{2} = \alpha,$$

$$PR = f(x, t) - f(x, y) - \frac{f(x, t) - f(x, z)}{t - z} \tau = \beta > 0.$$

Последняя строка дает

$$f(x, t) - f(x, y) = F(x)\tau + \beta,$$

если для краткости письма в дальнейшем воспользоваться обозначением

$$\frac{f(x, t) - f(x, z)}{t - z} = F(x).$$

Преобразуя при помощи приведенного соображения вышеуказанное дифференциальное уравнение для t , найдем

$$\frac{d\tau}{dx} - F(x)\tau - \psi(x) = \beta > 0. \quad (11)$$

Отмечаем также, что τ_0 , т. е. значение τ при $x = x_0$, есть нуль и что во всей области значений x , кроме начальной точки, τ положительно. Отыскиваем

обращающееся в нуль при $x = x_0$ частное решение линейного уравнения

$$\frac{d\eta}{dx} - F(x)\eta - \psi(x) = 0. \quad (12)$$

Такое решение выражается формулой

$$\eta = e^{\int_{x_0}^x F dx} \int_{x_0}^x \psi(x) e^{-\int_{x_0}^x F dx} dx.$$

Легко усмотреть, что $\eta > 0$, как это и должно быть, так как результат подстановки нуля в уравнение (12) отрицателен вследствие неравенства $\psi(x) > 0$. Наоборот, замена η через τ в силу уравнения (11) приводит к положительному результату, а потому

$$\tau = t - \eta > \eta > 0;$$

отсюда

$$t > t - \eta > y.$$

Таким образом, функция

$$t_1 = t - \eta$$

дает верхний предел интеграла, более близкий, чем ранее найденная функция t .

По основной теореме будем им. гь

$$\frac{dt_1}{dx} - f(x, t_1) = \psi_1(x) > 0.$$

Применив только что описанный процесс к этому новому уравнению, найдем в результате следующее, еще более тесное приближение t_2 , которое также будет верхнею границею интеграла, и т. д. В конце концов у нас будет налицо два ряда функций

$$t, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots,$$

$$z, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots,$$

из которых первые для одного и того же значения независимого переменного убывают с возрастанием индекса, а последние возрастают при том же условии. Способом, указанным Н. Н. Лузиным, можно обнаружить, что разность $t_n - z_n$ при этом быстро стремится к нулю.

В заключение отметим, что если бы мы приняли противоположное предположение о знаке второй производной функции $f(x, s)$ в пределах изменения s , то нам пришлось бы переместить данные нами два процесса обработки первых приближений, применив на этот раз к верхнему пределу тот способ, которым мы воспользовались в приведенном изложении для нижней границы, и наоборот. Как видно из самого характера ме-

тогда, он весьма напоминает способ Ньютона — Фурье для отыскания корней.

§ 3. Обратимся теперь к случаю, когда наше допущение о неизменности знака второй производной $f(x, s)$ по s не имеет места и пусть кривая $Y = f(x, s)$ при данном x между точками $s = z$ и $s = t$ имеет точки перегиба. Будем обозначать, как это было сделано на рис. 9, через M точку кривой, соответствующую $s = z$, и через N — ту точку, для которой $s = t$. Через

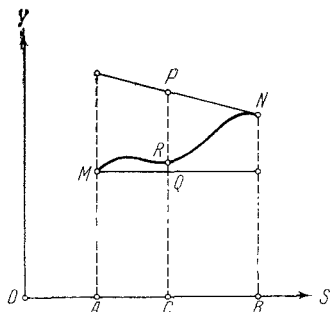


Рис. 10

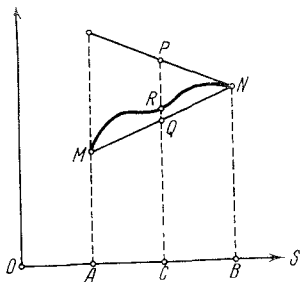


Рис. 11

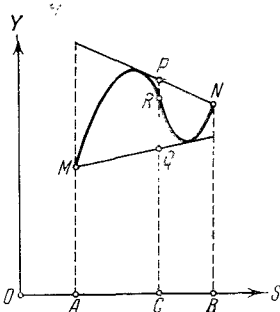


Рис. 12

точку M проведем прямую линию MQ так, чтобы дуга кривой, заключенная между M и N , ни в какой из своих точек не оказывалась ниже этой прямой; через N , наоборот, проведем такую прямую NP , ординаты которой нигде не будут менее соответственных ординат дуги MN . В таком случае, как это представлено на прилагаемых примерных рис. 10, 11 и 12, где буквы расставлены так же, как на рис. 9, дуга MN будет всецело заключена между прямыми MQ и NP .

Иногда одна из граничных прямых может оказаться касательной в одной из конечных точек, как это имеет место для прямой NP на рис. 10 и 11; на рис. 11, кроме того, вторая граничная прямая совпадает с хордой MN , так что здесь мы имеем случай, совершенно аналогичный изображенному на рис. 9. Наконец, рис. 12 предусматривает такое более общее предположение, когда граничные прямые не столь просто связаны с ходом кривой в ее конечных точках M и N . Следует иметь в виду, что приведенными рисунками отнюдь не исчерпываются все возможные, весьма разнообразные, вообще говоря, случаи и особенности хода кривой между точками M и N . На рисунки эти нужно смотреть лишь как на иллюстрации разных типов течения кривой.

Угловые коэффициенты прямых NP и MQ будут иметь совершенно определенные величины при данном значении x и изменяются вместе с изменением этого переменного. Обозначим поэтому через $A(x)$ угловой коэффициент прямой MQ и через $B(x)$ — то же количество для NP ; при этом, как обыкновенно, будем угол каждой из граничных прямых отсчитывать от оси OS в сторону, противоположную часовой стрелке, иными словами,

от OS к OY . Непосредственно из рисунка мы легко выводим

$$\begin{aligned} CP &= f(x, t) - B(x)\tau, \\ CQ &= f(x, z) + A(x)\xi, \\ QR &= f(x, y) - f(x, z) - A(x)\xi = \alpha > 0, \\ RP &= f(x, t) - B(x)\tau - f(x, y) = \beta > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где по-прежнему

$$\tau = t - y, \quad \xi = y - z.$$

Затем преобразуем уравнения (5) и (6). По формуле (5) имеем

$$\frac{d\xi}{dx} - f(x, y) + f(x, z) + \varphi(x) = 0,$$

а по формуле (6)

$$\frac{d\tau}{dx} - f(x, t) + f(x, y) - \psi(x) = 0.$$

Функции φ и ψ определяются теми же соотношениями, что и в предшествующем § 2. Отсюда на основании формул (13)

$$\frac{d\xi}{dx} - A(x)\xi + \varphi(x) = \alpha, \quad (14)$$

$$\frac{d\tau}{dx} - B(x)\tau - \psi(x) = \beta. \quad (15)$$

Проинтегрировав уравнения

$$\frac{d\xi}{dx} - A(x)\xi + \varphi(x) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d\eta}{dx} - B(x)\eta - \psi(x) = 0 \quad (17)$$

и отыскав их частные решения, обращающиеся в нуль для $x = x_0$, убеждаемся, прилагая теорему о дифференциальных неравенствах, из сопоставления уравнений (14) и (16), что

$$\xi = y - z > \xi,$$

а из сопоставления уравнений (15) и (17), что

$$\tau = t - y > \eta.$$

Так как, заменив нулями ξ и η в определяющих их уравнениях, мы в обоих случаях получаем результаты отрицательные, то ξ и η должны быть более нуля. Приняв во внимание сказанное, мы приходим к окончательному неравенству

$$t > t - \eta > y > z + \xi > z. \quad (18)$$

Неравенство (18) показывает, что $t_1 = t - \eta$ и $z_1 = z + \xi$ суть новые, при этом более тесные пределы интеграла y .

Исходя из t_1 и z_1 и повторив процесс, мы получим функции t_2 и z_2 , еще более тесно охватывающие интегральную функцию, и т. д., так же как в случае, описанном в § 2. Разница будет лишь в том, что дифференциальные уравнения для второго и последующих приближений нельзя указать в раскрытой форме, так как функции $A(x)$ и $B(x)$ могут иметь весьма разнообразный характер в конкретных случаях, и выразить их в общей форме и зависимости от $f(x, z)$ и $f(x, t)$ не представляется возможным. Лишь в одном случае можно это сделать, несмотря на то, что требование § 2 не будет соблюдено: именно, если дуга MN в направлении от M к N переходит из вогнутой в выпуклую (в сторону положительных y), и если на ней имеется не более одной точки перегиба. Тогда дуга будет лежать или между касательными в концах ее, или между касательною в одном из концов и хордою, и вид функции $A(x)$ и $B(x)$ определяется так же, как и в § 2.

В заключение заметим, что прямые MQ и NP можно было бы заменить иными прямыми, не проходящими через концы дуги M и N , лишь бы дуга MN целиком лежала между этими линиями. Если мы условимся для угловых коэффициентов этих прямых сохранить прежние обозначения $A(x)$ и $B(x)$, то, как нетрудно усмотреть, все изменение, которое будет в таком случае внесено в уравнения (16) и (17), определяющие поправки первого приближения, сведется к добавлению в левых частях определенных функций от x .

§ 4. Для пояснения описанного метода на конкретных случаях рассмотрим два простых примера.

В качестве первого примера возьмем уравнение Рикатти

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 - x = 0 \quad (19)$$

и будем отыскивать интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условию

$$y = 1 \text{ при } x = 0.$$

В первом грубом приближении примем

$$z = 1, \quad t = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Подстановка этих значений в уравнение (19) дает функции, определяемые формулами (5) и (6); в данном случае

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -x, \\ \psi(x) &= x^2 + \frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Функция f уравнения (19) есть

$$f(x, y) = 1 + x - y^2,$$

так что

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2 < 0,$$

и мы находимся в условиях, предусматриваемых § 2. А так как отмеченная производная отрицательна, то для верхнего предела придется применить прием, описанный подробно в § 2 для изыскания нижней границы интеграла, и наоборот [для нижнего предела использовать указание для нахождения верхней границы], как это было указано в § 2. Составив поэтому выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= -2t = -2 - x^2, \\ F(x) &= \frac{f(x, t) - f(x, z)}{t - z} = -2 - \frac{x^2}{2},\end{aligned}\quad (20)$$

мы будем иметь для определения поправок по формулам (8) и (12) (в обращенном порядке) следующие линейные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dx} + \left(2 + \frac{x^2}{2}\right)\xi - x &= 0, \\ \frac{d\eta}{dx} + (2 + x^2)\eta - x^2 - \frac{x^4}{4} &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду обращения в нуль искомым поправок в начальной точке $x = 0$ получим

$$\xi = e^{-S} \int_0^x x e^S dx, \quad \eta = e^{-T} \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^4}{4}\right) e^T dx,$$

если

$$S = 2x + \frac{x^3}{6}, \quad T = 2x + \frac{x^3}{3}.$$

По совершении в формуле для ξ одной интеграции по частям, составим затем

$$\begin{aligned}z_1 = z + \xi &= 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-S} \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^4}{4}\right) e^S dx, \\ t_1 = t - \eta &= 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-T} \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^4}{4}\right) e^T dx.\end{aligned}\quad (24)$$

Если мы предположим x заключенным в пределах 0 и 1, то функции

$$e^{\frac{x^3}{6}} \quad \text{и} \quad e^{\frac{x^3}{3}} \quad (22)$$

не будут далеко уклоняться от единицы. Приняв во внимание это замечание и несколько раздвигая пределы, определяемые формулами (24),

мы можем за новые границы интеграла считать функции

$$z_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-2x}J + \frac{1}{2}e^{-2x}J' - \frac{1}{4}e^{-2x} \int_0^x x^2 J' dx, \quad (23)$$

$$t_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-2x}J + e^{-2x}J';$$

здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} J &= \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^4}{4} \right) e^{2x} dx = \frac{7}{16} (e^{2x} - 1) - \frac{e^{2x}}{8} (7x - 7x^2 + 2x^3 - x^4), \\ J' &= \int_0^x x^2 J dx = \frac{145}{64} (e^{2x} - 1) - \frac{7}{48} x^3 + \\ &\quad + \frac{e^{2x}}{32} (145x^2 - 145x - 92x^3 + 39x^4 - 10x^5 + 2x^6). \end{aligned} \quad (24)$$

Так же просто составится и формула для

$$J''(x) = \int_0^x x^2 J' dx.$$

Я не выписываю ее в развернутом виде ввиду ее громоздкости.

Формулы (23) получаются из равенств (21) путем интегрирования по частям, причем показательные функции (22), стоящие перед знаками интегралов, принимаются за дифференцируемые множители, а остающиеся выражения — за интегрируемые. Такое интегрирование совершается в первой из формул (21) два раза, а во второй — один раз; затем в последних членах полученных формул показательные функции (22) выносятся из-под знаков интегралов, что ведет к увеличению числовых значений указанных членов; а следствием этого явится уменьшение z_1 и увеличение t_1 ; таким образом, новые пределы, выраженные формулами (23), далее отстоят от искомого интеграла уравнения, чем приведенные в формулах (21).

Формулы (24) получаются из общего соотношения

$$\int M e^{nx} dx = e^{nx} \left(\frac{M}{n} - \frac{M'}{n^2} + \frac{M''}{n^3} - \frac{M'''}{n^4} + \dots \right),$$

правая часть которого будет содержать конечное число членов, если буквою M без штрихов обозначим какой-либо многочлен, а тою же буквою со штрихами — его производные соответственных порядков.

Для характеристики приближений в смысле числового определения интеграла уравнения рассмотрим крайнюю точку участка изменения независимого переменного $x = 1$, в которой пределы наиболее расходятся.

Здесь будем иметь

$$e^{-2}J = \frac{5}{16} - \frac{7}{16}e^{-2}, \quad \frac{3}{2} - Je^{-2} = \frac{19}{16} + \frac{7}{16e^2} = 1,2467,$$

$$e^{-2}J' = \frac{23}{64} - \frac{463}{192e^2} = 0,0330, \quad e^{-2}J''(1) = \frac{129}{64} - \frac{17141}{1152e^2} = 0,0015,$$

$$z_1 = 1,2617, \quad t_1 = 1,2797.$$

Приняв

$$y = \frac{z_1 + t_1}{2} = 1,2707,$$

мы будем иметь максимальную ошибку менее трех четвертей процента от определяемой величины, тогда как первое приближение приводило к ошибке, которая могла возрасти при том же способе определения числовой величины интеграла до 20%.

В точках, более близких к началу, ошибка весьма резко уменьшается. Само собою разумеется, что она была бы во втором приближении гораздо менее значительна, если бы мы исходили из первого приближения, более близкого к интегралу уравнения; например, мы могли бы, оставив тот же верхний предел, принять за нижнюю границу функцию

$$z = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

что привело бы к гораздо лучшему результату во втором приближении.

Насколько быстро падает величина возможной ошибки в процентном отношении к определяемой функции в отдельных случаях, показывает пример следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} + y^3 - x^2 = 0,$$

для которого мы постараемся изыскать предел интеграла, обращающегося в нуль при $x = 0$. Приняв в первом приближении

$$z = 0, \quad t = \frac{x^3}{3},$$

так что ошибка в

$$y = \frac{z + t}{2} = \frac{x^3}{6}$$

может достигнуть 100% определяемого количества, перейдем к определению второго приближения. По правилам § 2 составляем

$$\varphi(x) = -x^2, \quad F(x) = -\frac{x^6}{9},$$

$$\psi(x) = \frac{x^9}{27}, \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{x^6}{3}.$$

Затем для определения поправок получим уравнения

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{x^6}{9}\xi - x^2 = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} + \frac{x^6}{3}\eta - \frac{x^9}{27} = 0,$$

откуда

$$\xi = e^{-\frac{x^7}{63}} \int_0^x x^2 e^{\frac{x^7}{63}} dx, \quad \eta = e^{-\frac{x^7}{21}} \int_0^x \frac{x^9}{27} e^{\frac{x^7}{21}} dx.$$

После совершения в этих формулах потребного количества интегриаций по частям, несколько уменьшая поправки ξ , η и раздвигая соответственно пределы, найдем

$$z_1 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} + \frac{x^{17}}{270 \cdot 153} - \frac{x^{24}}{270 \cdot 153 \cdot 216},$$

$$t_1 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} + \frac{x^{17}}{270 \cdot 54}$$

и можем принять для y :

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} + \frac{x^{17}}{135 \cdot 153}.$$

При $x = 1$ ошибка в процентном отношении будет менее 0,073 % искомой величины.

III

ОБЩАЯ МЕХАНИКА

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ¹

В томе XX № 10 Acta Societatis scientiarum Fennicae за 1895 г. напечатана статья Э. Линделёфа (Ernst Lindelöf) «Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal». В этой работе автор, казалось бы, решает поставленную себе задачу в полном ее объеме, причем все вычисления сводит к выполнению некоторых квадратур. Но на первых же страницах, при самом выводе дифференциальных уравнений, Линделёф допустил важную ошибку, вследствие которой найденные им уравнения оказались проще истинных, чем и объясняется весь кажущийся успех автора. Содержание первой части предлагаемой статьи, послужившее предметом сообщения моего в заседании Физического отделения Общества любителей естествознания 13 октября 1895 г., заключается в разборе метода Линделёфа; во второй части я даю собственный способ решения задачи, причем свожу ее к квадратурам лишь в том случае, когда оказывается приводимым выставляемое мною основное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Пусть некоторая механическая система во всякий момент времени определяется n параметрами $q_1, q_2, \dots, q_n$, на вариации которых наложено m условий вида

$$A_1^{(k)} \delta q_1 + A_2^{(k)} \delta q_2 + \dots + A_n^{(k)} \delta q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

где $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots$ — функции параметров; уравнения (1) предполагаются *неинтегрируемыми*. Ясно, что между обобщенными скоростями $\dot{q}_s$ будут иметь место соотношения вида

$$A_1^{(k)} \dot{q}_1 + A_2^{(k)} \dot{q}_2 + \dots = 0. \quad (2)$$

Начало Даламбера дает

$$\sum_{s=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} \right\} \delta q_s = 0, \quad (3)$$

где T — живая сила, а U — силовая функция. Работа сил реакции связей, обуславливающих уравнение (1), есть нуль для всех тех возможных перемещений системы, для которых уравнения имеют место.

¹ Первые напечатано в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IX, 1897 г.

Пусть $A_i^{(k)}$ зависят лишь от $q_{m+1}, \dots, q_n$; тогда уравнения (1) и (2) дают возможность выразить $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_m$ и $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ через остальные параметры, их производные и вариации в виде

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= B_{m+1}^{(1)} \dot{\zeta}_{m+1} + \dots + B_n^{(1)} \dot{\zeta}_n, \\ \dot{\zeta}_2 &= B_{m+1}^{(2)} \dot{\zeta}_{m+1} + \dots + B_n^{(2)} \dot{\zeta}_n, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\delta q_1 &= B_{m+1}^{(1)} \delta q_{m+1} + \dots, \\ \delta q_2 &= B_{m+1}^{(2)} \delta q_{m+1} + \dots, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}\quad (5)$$

где $B_i^{(k)}$ суть функции $q_{m+1}, \dots, q_n$.

Если U не зависит от первых m параметров, а T зависит лишь от их производных, то уравнения (4) и (5) позволяют совершенно исключить эти параметры из уравнения (3). Вводя в это уравнение выражения $\delta q_1, \delta q_2, \dots$ и приравняв затем нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^m B_s^{(i)} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (s = m+1, \dots, n). \quad (6)$$

Обозначая через (T) результат исключения $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_m$ из выражения T через посредство уравнений (4), получим

$$\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} B_s^{(i)}, \quad \frac{\partial (T)}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_s},$$

причем

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_s} = \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s} \dot{\zeta}_k.$$

На основании этих уравнений имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^n B_s^{(i)} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} B_s^{(i)},$$

и уравнение (6) переписывается в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial (T)}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left\{ \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial q_k} \right) \dot{\zeta}_k \right\} = 0. \quad (7)$$

Ясно, что эти уравнения принимают вид обычных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial (T)}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (8)$$

лишь в том случае, если функции B тождественно удовлетворяют соотношениям вида

$$\frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s} = 0$$

при всевозможных значениях указателей i, k, s ; а в таком случае уравнения (1) и (2) были бы интегрируемы, и между параметрами $q, q_2, \dots, q_n$, противно предположению, существовали бы конечные соотношения. Случай, когда уравнения (1) приводятся к виду

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 0, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = 0,$$

вследствие чего произошло бы совпадение систем (7) и (8), есть исключительный и в последующем места не имеет.

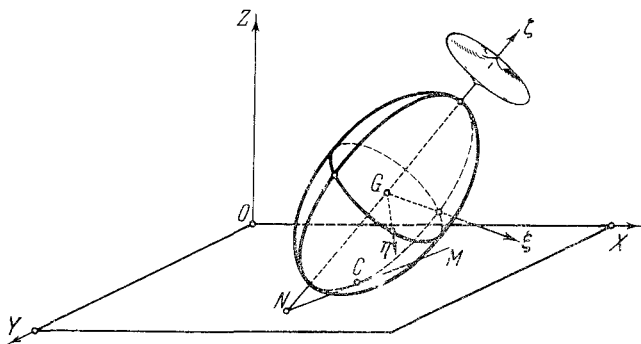


Рис. 1

Посмотрим же, как составляет Линделёф дифференциальные уравнения своей задачи. Пусть твердое тело, симметричное по форме и расположению масс относительно оси $G\zeta$, имеющее в G свой центр тяжести, опирается в точке C на неподвижную горизонтальную плоскость OXY (рис. 1); обозначим через α угол ζNM оси тела с горизонтальной касательной NM его меридиана $C\zeta$, через β — угол плоскости этого меридиана с какою-нибудь меридиональной плоскостью тела и через γ — угол линии NM с неподвижной осью OX ; положение тела будет вполне определено углами α, β, γ и координатами x, y точки C . Так как скольжение по плоскости OXY не предполагается возможным, то скорость точки тела, находящейся в C , равна нулю; это обстоятельство дает возможность написать уравнения, связывающие вариации и производные по времени от параметров [определяющих положение тела]; эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= A\delta\alpha + B\delta\beta + C\delta\gamma, & dy &= A_1\delta\alpha + B_1\delta\beta + C_1\delta\gamma; \\ \dot{x} &= A\dot{\alpha} + B\dot{\beta} + C\dot{\gamma}, & \dot{y} &= A_1\dot{\alpha} + B_1\dot{\beta} + C_1\dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A, B, \dots, C_1$ не зависят от x и y ; эти уравнения не могут быть интегрированы, так как по существу x и y не суть функции α, β, γ . При составлении выражения живой силы тела Линделёф уже принял в расчет уравнения (9); пользуясь затем этим выражением (T), он написал дифференциальные уравнения не в форме (7), как следовало бы, а в форме (8); в этом и состоит его ошибка.

Переходим теперь к изложению собственного анализа вопроса. Берем две системы осей координат (рис. 1): $OXYZ$ — неподвижные и $G\xi\eta\zeta$ — подвижные; ось $G\xi$ этих последних все время лежит в плоскости вертикального меридиана, ось $G\eta$ перпендикулярна к этой плоскости. Определяя положение тела теми же параметрами, как и у Линделёфа, обозначим через u, v, w слагающие по подвижным осям скорости точки G , через p_1, q_1, r_1 — компоненты угловой скорости этих осей, через p, q, r — проекции угловой скорости самого тела на те же оси; для большей общности присоединим к телу еще гироскоп, ось которого совпадает с осью $G\zeta$ [и который обладает по отношению к телу постоянною угловою скоростью; главный] момент количеств движения этого гироскопа около его оси обозначим через s ; ясно, что s есть величина постоянная: трение в подшипниках оси гироскопа не принимается в расчет. Пусть затем M — масса тела и гироскопа, G — центр тяжести системы, A — ее момент инерции вокруг осей $G\xi$ и $G\eta$, B — момент инерции одного тела, а B' — одного гироскопа относительно оси симметрии; пусть, далее R есть проекция задерживающей силы трения в точке C на ось $G\eta$, ξ и ζ — координаты точки C , лежащей в плоскости меридиана $C\zeta$.

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то

$$p = p_1, \quad q = q_1; \quad (10)$$

что касается r_1 , то оно легко выражается через p ; в самом деле, плоскость $G\zeta\xi$ остается все время вертикальной, а потому проекция угловой скорости подвижных осей на NM есть нуль; отсюда

$$r_1 = -p_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (11)$$

Так как точка C тела не имеет скорости, то

$$u + q\zeta = 0, \quad v + r\xi - p\zeta = 0, \quad w - q\xi = 0. \quad (12)$$

Легко составить уравнения

$$\begin{aligned} M \left(\frac{dv}{dt} + r_1 u - p_1 w \right) &= R, \\ A \frac{dp}{dt} + (Br + s) q_1 - A q r_1 &= -\zeta R, \\ B \frac{dr}{dt} + A q p_1 - A p q_1 &= \xi R, \end{aligned}$$

которые, на основании уравнений (10), (11) и (12), переписываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p\xi - r\xi) + pq(\xi \operatorname{tg} \alpha - \xi) &= \frac{R}{M}, \\ A \frac{dp}{dt} + (Br + s + Ap \operatorname{tg} \alpha) q &= -\xi R, \\ B \frac{dr}{dt} &= \xi R.\end{aligned}\quad (13)$$

Так как

$$q = -\frac{d\alpha}{dt}, \quad (14)$$

то по исключении R из уравнений (13) и некотором упрощении получим

$$\begin{aligned}A \frac{dp}{d\alpha} + B \frac{\xi}{\xi} \frac{dr}{d\alpha} &= Br + s + Ap \operatorname{tg} \alpha, \\ \xi \frac{dp}{d\alpha} - \frac{B + M\xi^2}{M\xi} \frac{dr}{d\alpha} &= r \frac{d\xi}{d\alpha} - p \left(\frac{d\xi}{d\alpha} + \xi - \xi \operatorname{tg} \alpha \right).\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь ξ и ζ мы считаем определенными функциями α , зависящими от вида меридиана. Уравнения (15) приводят к линейному уравнению второго порядка; интеграция его дает зависимость p и r от α с двумя произвольными постоянными; затем задача заканчивается в квадратурах. В самом деле, составим выражение живой силы системы T :

$$2T = A(p^2 + q^2) + Br^2 + Mq^2(\xi^2 + \zeta^2) + M(p\xi - r\xi)^2 + \frac{s^2}{B'}.$$

Силовая функция U имеет вид

$$U = -Mgz,$$

где

$$z = \xi \cos \alpha - \zeta \sin \alpha$$

есть высота центра тяжести над плоскостью OXY . Приняв в расчет, что живая сила, зависящая от вращения гироскопа вокруг его оси $\frac{s^2}{2B'}$, есть величина постоянная, будем иметь

$$\begin{aligned}Ap^2 + Br^2 + M(p\xi - r\xi)^2 + \{A + M(\xi^2 + \zeta^2)\}q^2 + \\ + 2Mg(\xi \cos \alpha - \zeta \sin \alpha) &= \text{const.}\end{aligned}\quad (16)$$

Это уравнение послужит для определения q в функции α . Зависимость α от времени получится из уравнения

$$dt = -\frac{d\alpha}{q}. \quad (17)$$

Далее, уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= r - r_1 = r + p \operatorname{tg} \alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -p \cos \alpha + r_1 \sin \alpha = -\frac{p}{\cos \alpha}\end{aligned}\quad (18)$$

определяют β и γ . Что касается x и y , то они даются формулами

$$dx = ds' \cos \gamma - ds'' \sin \gamma, \quad dy = ds' \sin \gamma + ds'' \cos \gamma,$$

где ds' и ds'' суть соответственно элементарные дуги меридиана и параллели в точке C , отсчитываемые: ds' от N к M и ds'' вперед чертежа; легко видеть, что

$$ds' = -\sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\alpha}\right)^2} d\alpha, \quad ds'' = -\xi d\beta. \quad (19)$$

Обратимся теперь к рассмотрению уравнений (15), от интеграции которых зависит решение задачи. Заметим, что существует один частный случай, когда эти уравнения неприменимы и задачу приходится решать, пользуясь непосредственно уравнениями (13); это будет, если

$$q = \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \alpha = \text{const};$$

в таком случае уравнения (13) легко дают

$$R = 0, \quad p = \text{const}, \quad r = \text{const};$$

соотношение, необходимо существующее между введенными постоянными, определится остальными тремя дифференциальными уравнениями задачи, которых я здесь не выписываю; соотношение это получится в результате исключения из указанных уравнений силы нормального давления тела на плоскость OXY и слагающей силы трения по направлению касательной меридиана; оно выразит то обстоятельство, что равнодействующая силы тяжести и сил инерции пройдет через точку опоры.

Целью этого рассмотрения уравнений (15) является изыскание тех простейших частных случаев, когда указанные уравнения легко интегрируются, но прежде всего отметим следующую интересную их особенность: линейное уравнение второго порядка, к которому они приводятся, не будет иметь второй части при $s = 0$, т. е. в случае отсутствия гироскопа в движущемся теле; если бы задача о движении тела при таком условии была решена, то прибавка гироскопа ввела бы лишь определенного вида вторую часть в вышеупомянутое линейное уравнение, а следовательно, и в этом случае вопрос мог бы быть разрешен до конца.

1. Изобразим уравнения (15) в виде

$$A \frac{d}{d\alpha} (p \cos \alpha) + \frac{B\xi}{\xi} \cos \alpha \frac{dr}{d\alpha} = (Br + s) \cos \alpha, \\ \frac{d}{d\alpha} p \cos \alpha \cdot \xi e^{\int \frac{\xi}{\xi} d\alpha} - \frac{B + M\xi^2}{M\xi} \cos \alpha \cdot e^{\int \frac{\xi}{\xi} d\alpha} \cdot \frac{dr}{d\alpha} = r \cos \alpha \frac{d\xi}{d\alpha} e^{\int \frac{\xi}{\xi} d\alpha}. \quad (20)$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$Br + s = 0, \quad p \cos \alpha = \text{const} = a,$$

если меридиональное сечение тела таково, что имеем

$$a \frac{d}{d\alpha} \zeta e^{\int \frac{\xi}{\zeta} d\alpha} = -\frac{s}{B} e^{\int \frac{\xi}{\zeta} d\alpha} \cos \alpha \frac{d\xi}{d\alpha}, \quad (24)$$

или иначе

$$\frac{d\xi}{d\alpha} + \xi = -m \cos \alpha \frac{d\xi}{d\alpha},$$

где $m = \frac{s}{aB}$. Сопоставляя это уравнение с очевидным уравнением $\frac{d\xi}{d\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, получим для определения зависимости между ξ и α уравнение

$$\cos \alpha \frac{d\xi}{d\alpha} \left[m + \frac{1}{\sin \alpha} \right] + \xi = 0.$$

Простейшим и, мне кажется, наиболее интересным случаем этого рода является тот, когда мы имеем гироскоп, поставленный на диске; в этом случае

$$\xi = \operatorname{const} = b,$$

$$\zeta = \operatorname{const} = c,$$

и уравнение (24) удовлетворится, если $a = 0$, следовательно, и $p = 0$.

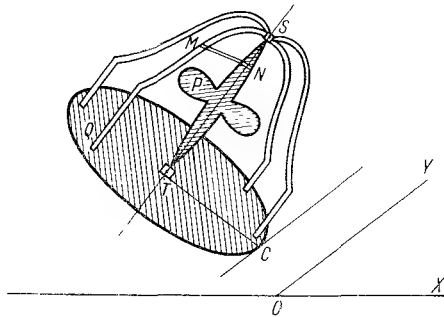


Рис. 2

Такого рода движение можно осуществить на следующем приборе: пусть имеем гироскоп P на диске Q (рис. 2); диск снабжен четырьмя стойками, сходящимися в точке S ; в S и T , центре диска, гироскоп вставлен в углубления остриями своей оси; на одну из стоек в точке M и на гироскоп в N намотана крепкая резинка, концы которой не закреплены; поддерживая резинку натянутою, мы подносим прибор к столу и бросаем его, отпустив резинку; благодаря таким начальным обстоятельствам, будет иметь место соотношения

$$Br + s = 0, \quad p = 0,$$

и прибор придет в отмеченное нами движение. Для определения зависимости параметров от времени будем иметь

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{2Mg}{A + M(b^2 + c^2)} (b \cos \alpha - c \sin \alpha) = h,$$

откуда, обозначая через α_0 один из углов α , при которых $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, и полагая

$$b = \rho \cos \mu, \quad -c = \rho \sin \mu, \quad k = \frac{2Mg\rho}{A + M(b^2 + c^2)},$$

найдем

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = k [\cos(\alpha_0 - \mu) - \cos(\alpha - \mu)];$$

уравнение это показывает, что α изменяется по закону маятника. Уравнения (18) дают

$$\beta = rt + \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0 = 0,$$

причем равенство $\gamma_0 = 0$ обуславливается надлежащим выбором направления осей OX и OY ; точка C описывает прямую линию, ибо

$$dx = 0, \quad dy = -br dt.$$

2. В указанном случае диска, несущего на себе гироскоп, и общее решение уравнений (15) представляется относительно простым. В самом деле, обозначив $\frac{Br + s}{A}$ через r' и полагая по-прежнему $\xi = b$, $\zeta = c$, мы найдем для определения p и r' уравнения

$$\frac{dp}{d\alpha} + \frac{c}{b} \frac{dr'}{d\alpha} = r' + p \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{dp}{d\alpha} - \frac{B + Mb^2}{Mbc} \cdot \frac{A}{B} \frac{dr'}{d\alpha} = p \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{b}{c} \right),$$

откуда

$$\left\{ \frac{c}{b} + \frac{B + Mb^2}{Mbc} \cdot \frac{A}{B} \right\} \frac{dr'}{d\alpha} = r' + p \frac{b}{c},$$

и затем

$$\left\{ \frac{c^2}{b^2} + \frac{B + Mb^2}{Mb^2} \cdot \frac{A}{B} \right\} \frac{d^2 r'}{d\alpha^2} = r' \left[1 - \frac{c}{b} \operatorname{tg} \alpha \right] + \frac{dr'}{d\alpha} \operatorname{tg} \alpha \left\{ \frac{c^2}{b^2} + \frac{B + Mb^2}{Mb^2} \cdot \frac{A}{B} \right\}.$$

Если $c = 0$, т. е. центр тяжести системы лежит в плоскости диска, то, положив $\sin \alpha = x$, приведем уравнение, определяющее r' , к виду

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{dr'}{dx} = l^2 r',$$

и, стало быть, r' выразим гипергеометрической функцией от x ; таковой же функцией выразится и p , после чего интегриация закончится, как указано было выше, в квадратурах.

3. Переходим к третьему и последнему из найденных нами особых случаев. Посмотрим, каков должен быть вид поверхности, ограничивающей тело, для того чтобы первое из уравнений (15) или, все равно, (20) интегрировалось отдельно; из уравнения (20) находим требуемое условие в виде

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{\xi}{\xi} \cos \alpha = -\cos \alpha,$$

откуда по интеграции

$$\frac{\xi}{\xi} = \frac{l - \sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\xi = \rho (l - \sin \alpha), \quad \xi = \rho \cos \alpha, \quad (22)$$

отсюда

$$d\xi = d\rho (l - \sin \alpha) - \rho \cos \alpha d\alpha, \quad d\xi = d\rho \cos \alpha - \rho \sin \alpha d\alpha;$$

а так как

$$d\xi \cos \alpha - d\xi \sin \alpha = 0,$$

то

$$d\rho (l \sin \alpha - 1) = 0, \quad \rho = \text{const.}$$

Уравнения (22) показывают, что тело ограничено поверхностью шара радиуса ρ с центром, лежащим на оси $G\xi$ в расстоянии ρl от центра тяжести системы. В таком случае интеграция уравнения (20) дает

$$A\rho \cos \alpha + (Br + s)(l - \sin \alpha) = a.$$

Второе из уравнений (15) приводится при помощи первого к виду

$$\left(B \frac{\xi}{\xi} + A \frac{B + M\xi^2}{M\xi\xi} \right) \frac{dr}{d\alpha} - Br - s + A \frac{r}{\xi} \frac{d\xi}{d\alpha} = 0,$$

ибо

$$\xi + \frac{d\xi}{d\alpha} = 0;$$

заменяя ξ и ζ их значениями (22), получим для определения r уравнение

$$\left\{ B\rho^2 (l - u)^2 + \frac{AB}{M} + A\rho^2 (1 - u^2) \right\} \frac{dr}{du} - r [B\rho^2 (l - u) + A\rho^2 u] = \rho^2 s (l - u), \quad (23)$$

в котором $u = \sin \alpha$ и которое по интегрировании дает

$$r \sqrt{\frac{AB}{M\rho^2} + A(1 - u^2) + B(l - u)^2} - \int \frac{s(l - u) du}{\sqrt{\frac{AB}{M\rho^2} + A(1 - u^2) + B(l - u)^2}} = b. \quad (24)$$

Дальнейшие вычисления в рассматриваемом случае приводят к очень сложным квадратурам, которые упрощаются при некоторых частных предположениях. Так, если положить $l = 0$, т. е. считать центр тяжести

совпадающим с центром шара, то получится случай, исследованный профессорами Д. К. Бобылёвым и Н. Е. Жуковским; легко видеть, что таким предположением совершенно устраняется игра силы тяжести, которая лишь придавливает систему к плоскости OXY . Мы не будем останавливаться на этом окончательно разрешенном случае; напомним только, что при этом все параметры выражаются в эллиптических функциях времени.

К более сложным результатам ведет другое частное предположение, характеризующееся отсутствием гироскопа. Положив в формулах (23) и (24) $s = 0$, приведем их к виду

$$\begin{aligned} p \cos \alpha + m^2 (l - \sin \alpha) r &= a, \\ r \sqrt{\frac{B}{M\rho^2} + 1 - u^2 + m^2 (l - u)^2} &= b, \end{aligned} \quad (25)$$

где $m^2 = \frac{B}{A}$.

Уравнение живых сил будет

$$Ap^2 + Br^2 + [A + M(\xi^2 + \zeta^2)] q^2 + M(r\xi - p\zeta)^2 + 2Mgp(1 - l \sin \alpha) = c^2. \quad (26)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} (r\xi - p\zeta)^2 &= (p^2 + r^2)(\xi^2 + \zeta^2) - (p\xi + r\zeta)^2, \\ p\xi + r\zeta &= p\rho \cos \alpha + r\rho(l - \sin \alpha) = \rho a - (m^2 - 1)r\rho(l - u), \\ \xi^2 + \zeta^2 &= \rho^2(1 + l^2 - 2lu), \quad q \cos \alpha = -\frac{du}{dt} = -\dot{u}, \end{aligned}$$

легко приведем предшествующее равенство к виду

$$\begin{aligned} \{A + M\rho^2(1 + l^2 - 2lu)\} p^2 \cos^2 \alpha + \{B + M\rho^2(1 + l^2 - 2lu)\} r^2 \cos^2 \alpha + \\ + \{A + M\rho^2(1 + l^2 - 2lu)\} \dot{u}^2 + 2Mgp(1 - lu) \cos^2 \alpha - \\ - M\rho^2 \{a - (m^2 - 1)(l - u)r\}^2 \cos^2 \alpha - c^2 \cos^2 \alpha = 0, \end{aligned}$$

или, воспользовавшись первым из уравнений (25),

$$\begin{aligned} \{A + M\rho^2(1 + l^2 - 2lu)\} \{[a - m^2(l - u)r]^2 + r^2(1 - u^2) + \dot{u}^2\} + \\ + \{(B - A)r^2 - M\rho^2[a - (m^2 - 1)(l - u)r]^2\} (1 - u^2) + \\ + \{2Mgp(1 - lu) - c^2\} (1 - u^2) = 0. \end{aligned}$$

Если введем в эту формулу выражение r из второго уравнения (25), то после простых приведений получим для определения зависимости u от времени равенство

$$\begin{aligned} \{A + M\rho^2(1 + l^2 - 2lu)\} \dot{u}^2 &= (1 - u^2) \{c^2 - 2Mgp(1 - lu)\} - \\ - a^2 \{A + M\rho^2(l - u)^2\} - M\rho^2 b^2 \{1 - u^2 + m^2(l - u)^2\} + \\ + 2abM\rho^2(l - u) \sqrt{\frac{B}{M\rho^2} + 1 - u^2 + m^2(l - u)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда ясно, что изыскание этой зависимости приводится к обращению Абелева интеграла; при частных значениях произвольных постоянных $a = 0$ или $b = 0$ вопрос решается в эллиптических функциях; то же будет при одном особом расположении масс в теле, именно, когда выполнено условие

$$\left(\frac{B}{M\rho^2} + 1 + m^2 l^2\right)(m^2 - 1) = m^4 l^2, \quad (28)$$

и, следовательно, выражение, входящее в уравнение (27), под знаком корня, есть полный квадрат. Так как в исследуемом случае тело должно быть ограничено шаровой поверхностью лишь в местах прикосновения неподвижной плоскости, то можно, например, отыскать такой однородный шаровой сектор, для которого выполняется уравнение (28); весьма простые вычисления показывают, что стрелка его сегмента равняется $0,24\rho$.

Займемся теперь исследованием общего характера движения в интересующем нас случае. Прежде всего заметим, что правая часть уравнения (27), наверное, имеет два действительных корня, заключенных между -1 и $+1$; в самом деле, изображая эту функцию в виде

$$(1 - u^2)[c^2 - 2Mg\rho(1 - lu)] - K = f(u) - K,$$

мы убедимся из сравнения с уравнением (26), что при $-1 < u < 1$ [имеет место неравенство]

$$K = (1 - u^2)\{Ap^2 + Br^2 + M(r\xi - p\xi)^2\} > 0;$$

с другой стороны, при действительном движении должны соблюдаться неравенства

$$-1 \leq u \leq 1, \quad f(u) - K \geq 0,$$

а потому и

$$f(u) \geq 0;$$

наконец $f(-\infty) > 0$ и $f(\infty) < 0$. Из вышесказанного ясно, что кривая $y = f(u)$ должна иметь один из двух ходов, указанных на рис. 3; если теперь часть кривой ACB будет видоизменена уменьшением всякой ординаты на соответственное K , то деформированная кривая, по условию задачи, должна иметь точки над осью Ou и, следовательно, будет пересекать эту ось на протяжении AB не менее как два раза, причем ординаты ее за точкою B отрицательны; абсциссы этих точек пересечения по абсолютной величине вообще меньше единицы, но одна из них может равняться -1 или $+1$, если K обладает таким корнем; а для этого нужно, чтобы между произвольными постоянными существовало одно из соотношений

$$a\sqrt{A + M\rho^2(1 - l)^2} + b\sqrt{M\rho^2 m(1 - l)} = 0, \quad (29)$$

$$a\sqrt{A + M\rho^2(1 + l)^2} - b\sqrt{M\rho^2 m(1 + l)} = 0, \quad (30)$$

несовместных друг с другом [5]. Заметим еще, что уравнение $f(u) - K = 0$ может обладать на отрезке от -1 до $+1$ кратным корнем [6]. Так, $u = -1$ будет таким корнем, если, кроме (30), соблюдается условие

$$c^2 + 2Mg\rho(1+l) + \left(\frac{a^2}{m^2} - b^2\right) M\rho^2 = 0; \quad (31)$$

то же будет при $u = 1$, если одновременно с (29) имеем

$$-c^2 + Mg\rho(1-l) + \left(b^2 - \frac{a^2}{m^2}\right) M\rho^2 = 0. \quad (32)$$

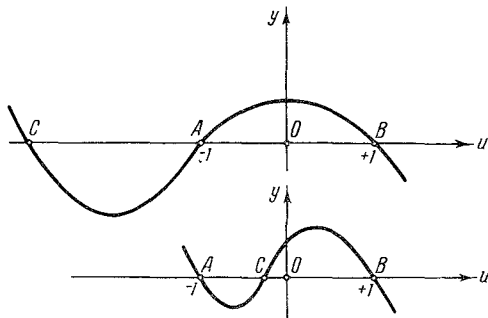


Рис. 3

Все эти условия, возможные лишь при

$$\left| \frac{a}{mb} \right| < 1,$$

легко получаются подстановкою испытуемых значений в правую часть уравнения (27) и ее производную. Так как знак корня, входящего в состав функции K , не может изменяться, пока $-1 < u < +1$, то $\dot{u}^2$ есть функция однозначная. Приняв во внимание все сказанное, легко видеть, что $u = \sin \alpha$ есть вообще периодическая функция времени, колеблющаяся между предельными значениями u_1 и u_2 , при которых $\dot{u} = 0$; исключением является лишь тот случай, когда один из этих корней, например u_1 , есть кратный; тогда u асимптотически приближается к u_1 и совпадает с ним при $t = \infty$. Так, если выполнены условия (29) и (32) или (30) и (31), то по истечении значительного промежутка времени

$$u = \pm 1,$$

и движение сводится к вращению около вертикально стоящей оси тела $O'\zeta$.

Ограничиваясь предположением, что корни u_1 и u_2 простые, так что u и, следовательно, α — периодические функции времени с периодом ω , за-

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ. ТЕОРЕМА О ПРИВОДЯЩЕМ МНОЖИТЕЛЕ¹

Предлагаемая заметка имеет целью установить при некоторых частных предположениях связь, существующую между движением системы с неинтегрируемыми связями и движением обыкновенных механических систем, подчиняющихся уравнениям Лагранжа. Теоремы, которые мы здесь даем, вероятно, могут быть обобщены: так, они применяются к решенной нами задаче о катании по горизонтальной плоскости симметричного шара², представляющего собою систему с тремя свободными параметрами, тогда как в этой заметке мы рассматриваем лишь систему с двумя такими параметрами. Однако при попытках обобщения нам приходилось сталкиваться с необходимостью ставить так много ограничений, что результат теряет ясность и потому в значительной мере обесценивается.

Содержание первых двух параграфов настоящей работы было доложено Московскому математическому обществу в заседании 28 ноября 1906 г.

§ 1. Представим себе механическую систему с неинтегрируемыми связями, короче, неголономную систему, зависящую от двух свободных параметров q и q_1 . С ними связаны зависимые параметры ξ , η , . . . в каком угодно числе соотношениями вида

$$\dot{\xi} = a\dot{q} + a_1\dot{q}_1, \quad \dot{\eta} = b\dot{q} + b_1\dot{q}_1, \dots \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, . . . , $\dot{\zeta}$, $\dot{\zeta}_1$ обозначены производные от параметров по времени; a , b , . . . — функции от q и q_1 . Для краткости письма в последующем изложении мы будем опускать многоточия и писать формулы так, как будто зависимых параметров только два.

Обозначив через T первоначальное выражение живой силы, составленное без принятия во внимание соотношений (1), и через T' его приведенную форму по замене $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ из формул (1), мы будем иметь для решения задачи следующие дифференциальные уравнения³:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = \dot{q}_1 S, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\dot{\zeta} S, \quad (2)$$

$$S = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \left(\frac{da}{dq_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right),$$

¹ Работа впервые напечатана в Математическом сборнике, т. XXVIII, 1911.

² «О катании шара по горизонтальной плоскости». — Математический сборник, т. XXIV, 1903 [стр. 455—471 настоящего издания].

³ Эти уравнения принадлежат автору и даны для общего случая системы в статье «О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости». — Труды От-

где U есть силовая функция. При этом предполагается, что как коэффициенты формулы живой силы T , так и силовая функция зависят только от параметров q и q_1 . Если бы соотношения (1) были интегрируемы, то S было бы нулем, и мы имели бы обычные уравнения Лагранжа.

Преобразуем уравнения (2) введением нового независимого переменного τ , которое определим, положив

$$Ndt = d\tau$$

и считая N подлежащей определению функцией независимых параметров q, q_1 . Производные параметров по τ будем обозначать через q', q'_1 . Прежде всего имеем

$$2T = L\dot{q}^2 + 2M\dot{q}\dot{q}_1 + L_1\dot{q}_1^2 = N^2(Lq'^2 + 2Mq'q'_1 + L_1q_1'^2) = 2(T),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{N} \frac{\partial (T)}{\partial q'}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial (T)}{\partial q} - \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} 2(T); \quad Nq' = \dot{q};$$

воспользовавшись этими соотношениями, приводим дифференциальные уравнения системы (2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial (T)}{\partial q'} - \frac{\partial (T)}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} &= q'_1 R, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial (T)}{\partial q'_1} - \frac{\partial (T)}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} &= -q' R, \\ R &= NS - \frac{\partial (T)}{\partial q'_1} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} + \frac{\partial (T)}{\partial q'} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Опустив в дальнейшем для простоты письма скобки при T , преобразуем уравнения (3), введя канонические переменные

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial T}{\partial q'} = N^2(Lq' + Mq'_1), \\ p_1 &= \frac{\partial T}{\partial q'_1} = N^2(L_1q'_1 + Mq'). \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразованное выражение $2T = 2(T)$ будет определяться из формулы

$$2T(LL_1 - M^2) = \frac{1}{N^2}(L_1p^2 - 2Mpp_1 + Lp_1^2), \quad (5)$$

и если N определено так, чтобы имело место равенство

$$R = NS - p_1 \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} + p \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q_1} = 0, \quad (6)$$

то мы придем в результате к обыкновенной канонической системе

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, & \frac{dp_1}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ H &= T - U.\end{aligned}\tag{7}$$

Функцию N , удовлетворяющую уравнению (6), мы назовем *приводящим множителем*. Далее рассмотрим два различных случая, которые могут представиться при отыскании приводящего множителя.

§ 2. Попытаемся удовлетворить уравнению (6), не пользуясь канонической системой (7). Выражения $\frac{\partial T}{\partial \xi}$, $\frac{\partial T}{\partial \eta}$, входящие в состав S , как нетрудно видеть, могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{A_p + A_1 p_1}{N}, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{B_p + B_1 p_1}{N},\tag{8}$$

где $A, B, \dots$ — известные функции независимых параметров. Поставленное нами требование будет удовлетворено, если существует функция N , удовлетворяющая сразу двум условиям:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} &= A_1 \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + B_1 \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right), \\ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q_1} &= -A \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) - B \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right).\end{aligned}\tag{9}$$

Для этого, очевидно, должно выполняться одно соотношение между восемью функциями, и потому существует широкая категория задач, где оно будет иметь место. Чтобы выяснить смысл этого условного соотношения, обратимся к первоначальным уравнениям (2) и преобразуем их к каноническим переменным, не меняя независимого переменного. Полагая в них для этого

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = P, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = P_1,$$

находим, приняв во внимание формулу (8),

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\partial H_1}{\partial P_1} S, \quad \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1}{\partial P} S,$$

$$\begin{aligned}S &= P \left\{ A \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + B \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) \right\} + \\ &\quad + P_1 \left\{ A_1 \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + B_1 \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) \right\}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial P}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial P_1}.\end{aligned}$$

Попытаемся определить для этой системы последний множитель Якоби. Обозначим его через K и предположим, что он зависит только от переменных q и q_1 ; тогда для его определения будем иметь

$$\frac{1}{K} \frac{dK}{dt} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q_1} \dot{q}_1 = \dot{q} \frac{\partial S}{\partial P_1} - \dot{q}_1 \frac{\partial S}{\partial P},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} &= A_1 \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + B_1 \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right), \\ \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q_1} &= -A \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) - B \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right). \end{aligned}$$

Сравнив эти уравнения с уравнениями (9), убеждаемся, что приводящий множитель N в точности совпадает с последним множителем Якоби, если последний множитель зависит только от свободных параметров.

§ 3. Если условия предшествующего параграфа осуществлены, то к разбираемой задаче приложимо видоизмененное начало Гамильтона. В самом деле, из канонической системы (7) вытекает как следствие обращение в нуль вариации интеграла

$$J = \int_0^{\tau} (T + U) dt$$

при постоянном τ . Восстановив начальные переменные, мы найдем, что

$$\delta J = \delta \int_0^t (T + U) N dt = 0$$

при условии

$$\tau = \int_0^t N dt = \text{const.}$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему, заменяющую начало Гамильтона для рассматриваемой неголономной системы: *при существовании приводящего множителя N , определяемого совместными уравнениями (9), от всех движений, возможных при свободном изменении параметров q, q_1 между определенными их предельными значениями, действительное отличается тем, что вариация интеграла*

$$J = \int_0^t (T + U) N dt$$

обращается в нуль при условии постоянства

$$\tau = \int_0^t N dt.$$

§ 4. Если уравнения (9) несовместимы, то каноническая система (7) и уравнение (6) должны решаться совместно. В этом случае задача приводится к решению двух уравнений с частными производными. Во-первых, из канонической системы и уравнения (5) как следствие вытекает уравнение

$$\frac{1}{N^2} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \lambda_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 \right\} = h + U, \quad (10)$$

где

$$\lambda = \frac{L_1}{LL_1 - M^2}, \quad \mu = -\frac{M}{LL_1 - M^2}, \quad \lambda_1 = \frac{L}{LL_1 - M^2};$$

при этом

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}.$$

Во-вторых, из (6) и (8) по замене S из системы (2) мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial \ln N}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial \ln N}{\partial q} + \left(A \frac{\partial V}{\partial q} + A_1 \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + \\ + \left(B \frac{\partial V}{\partial q} + B_1 \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (10) и (11) и есть та, вывод которой мы имели в виду. Решение ее приводится к двум последовательным интеграциям уравнений с частными производными первого порядка. Чтобы в этом убедиться, достаточно исключить N , определив его из (10) и подставив в (11). Обозначая для краткости через z количество

$$z = \frac{p_1}{p} = \frac{\partial V}{\partial q_1} : \frac{\partial V}{\partial q},$$

легко приводим результат исключения к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} - z \frac{\partial}{\partial q} \right) \ln \frac{\lambda + 2\mu z + \lambda_1 z^2}{h + U} + \\ + (A + A_1 z) \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q} \right) + (B + B_1 z) \left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если уравнение (12) проинтегрировано, то по найденному z ищем V из соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = z \frac{\partial V}{\partial q},$$

а затем, имея V , находим интегралы канонической системы (7). Прием этот любопытен с теоретической точки зрения как непосредственное пространство методы Якоби на простейшие случаи неголомомной системы.

§ 5. Закончим нашу работу, дав простые примеры применения метода приводящего множителя в том случае, когда соблюдаются условия, указанные в § 2. В качестве первого примера рассмотрим движение твердого

тела параллельно плоскости. Представим себе твердое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость тремя точками; две из этих точек представляют простые свободно скользящие ножки; третья есть точка прикосновения острого колесика, горизонтальная ось которого неизменнокреплена в движущееся тело. Допустим, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Положение тела определяем горизонтальными координатами ξ , η точки прикосновения A колесика и углом φ , который составляет ось AX , связанная с телом и лежащая в плоскости колесика, с неподвижной осью $O\xi$. Горизонтальная проекция центра тяжести тела определяется ее координатами α и β по подвижным осям. Обследуем движение тела по инерции.

Примем за свободные параметры угол φ и длину дуги q траектории точки A . Нетрудно убедиться, что связи данной системы сводятся к двум соотношениям:

$$\dot{\xi} = \dot{q} \cos \varphi, \quad \dot{\eta} = \dot{q} \sin \varphi. \quad (13)$$

Первоначальная форма живой силы T , составленная без принятия во внимание неинтегрируемых связей, определится формулой

$$\frac{2T}{m} = [\dot{\xi} - \dot{\varphi}(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)]^2 + [\dot{\eta} + \dot{\varphi}(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)]^2 + k^2 \dot{\varphi}^2,$$

где m — масса и k — радиус инерции тела около вертикали, проходящей через центр тяжести. Эта формула дает вместе с условиями (13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} &= \dot{q} \cos \varphi - \dot{\varphi}(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi), \\ \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} &= \dot{q} \sin \varphi + \dot{\varphi}(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi), \\ 2T &= m\dot{q}^2 + m(\alpha^2 + \beta^2 + k^2)\dot{\varphi}^2 - 2m\beta\dot{\varphi}\dot{q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда находим S из формул (2) при помощи (13):

$$S = m\alpha\dot{\varphi} = mN\alpha\varphi',$$

где N — приводящий множитель. Функции p и p_1 на основании формул (4) определяются по (14):

$$\begin{aligned} p &= N^2 [mq' - m\beta\varphi'], \\ p_1 &= N^2 [m(\alpha^2 + \beta^2 + k^2)\varphi' - m\beta q'], \end{aligned}$$

откуда

$$mN^2\varphi'(\alpha^2 + k^2) = p_1 + \beta p, \quad NS = mN^2\alpha\varphi' = \alpha \frac{p_1 + \beta p}{\alpha^2 + k^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (6), имеем для определения приводящего множителя

$$p \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - p_1 \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} = \alpha \frac{p_1 + \beta p}{\alpha^2 + k^2};$$

таким образом, можно положить

$$N = e^{hu}, \quad h = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}, \quad u = \frac{\beta\varphi - q}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}.$$

Приняв за новые переменные u и φ , найдем преобразованную и приведенную формулу живой силы

$$2T = me^{2hu} (\alpha^2 + k^2) (u'^2 + \varphi'^2).$$

Для решения задачи на основании метода Якоби получаем уравнение, определяющее характеристическую функцию V ,

$$\frac{e^{-2hu}}{m(\alpha^2 + k^2)} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} = \lambda,$$

откуда

$$V = g\varphi + \int \sqrt{\mu e^{2hu} - g^2} du;$$

здесь

$$\mu = \lambda m (\alpha^2 + k^2).$$

Интегралы канонической системы суть

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial g} &= \varphi + \frac{1}{h} \arcsin \frac{ge^{-hu}}{\sqrt{\mu}} = g_1; \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \tau - \lambda_1 = \int \frac{m(\alpha^2 + k^2) e^{2hu} du}{2 \sqrt{\mu e^{2hu} - g^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Время определяем по формуле

$$dt = \frac{d\tau}{N} = \frac{m(\alpha^2 + k^2) e^{hu} du}{2 \sqrt{\mu e^{2hu} - g^2}},$$

которая дает

$$t = - \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \frac{\alpha^2 + k^2}{2\alpha} \ln \{ \sqrt{\mu} e^{hu} - \sqrt{\mu e^{2hu} - g^2} \} + C.$$

Решение задачи заканчивается формулами, получающимися при помощи первого из уравнений (15) и приводящимися к обыкновенным квадратурам:

$$\begin{aligned} \xi &= \beta \sin \varphi - \sqrt{\alpha^2 + k^2} \int \cos \varphi du, \\ \eta &= -\beta \cos \varphi - \sqrt{\alpha^2 + k^2} \int \sin \varphi du. \end{aligned}$$

Все формулы упрощаются в одном частном случае, а именно в том, когда ось колесика проходит через проекцию центра тяжести. При таком предположении имеем

$$\alpha = 0, \quad N = \text{const}$$

и затем, при надлежащем выборе осей:

$$u = At, \quad \varphi = Bt, \quad q = (\beta B - kA)t,$$

где A и B — произвольные постоянные, и

$$\xi = \left(\beta - k \frac{A}{B} \right) \sin \varphi, \quad \eta = - \left(\beta - k \frac{A}{B} \right) \cos \varphi.$$

Движение тела сводится к вращению с постоянной угловой скоростью B около неподвижной, пересекающей ось колесика вертикали, положение которой зависит от начальной скорости колесика.

Для второго примера разберем задачу о катании по горизонтальной плоскости твердого эллипсоида вращения, центр которого совпадает с центром тяжести и ось есть одна из главных осей инерции. Три главных момента инерции примем различными. Сделаем предположение, что на движущееся тело наложена связь, благодаря которой линия пересечения экваториальной плоскости эллипсоида с горизонтом не изменяет своего направления в пространстве.

Направим параллельно этой прямой неподвижную ось $O\eta$; за направление $O\xi$ примем вертикаль (направленную снизу вверх); ось $O\xi$ перпендикулярна к этим двум осям. За подвижные примем главные оси инерции тела, считая за ось OZ ось граничного эллипсоида. Обозначим через c и c_1 экваториальную и полярную полуоси эллипсоидальной поверхности, через m — массу, через A, B, C — главные моменты инерции тела. За свободные параметры примем Эйлера углы: θ — угол между осями $O\xi$ и OZ и φ — угол между упомянутой выше линией, принятой за ось $O\eta$, и осью OX ; третий Эйлеров угол ψ , по условию задачи, остается постоянным и равен прямому.

Две из координат центра тяжести ξ и ζ определяются в данном случае интегрируемыми соотношениями

$$\dot{\xi} = h\dot{\theta}, \quad \dot{\zeta} = \frac{dh}{dt}, \quad \zeta = h,$$

где

$$h = \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + c_1^2 \cos^2 \theta};$$

изменение третьей координаты ведет к неинтегрируемой связи

$$\dot{\eta} = \frac{c^2}{h} \sin \theta \cdot \dot{\varphi}.$$

Первоначальная форма живой силы определяется равенством

$$2T = (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + C \dot{\varphi}^2 + m h^2 \dot{\theta}^2 + m \dot{h}^2 + m \dot{\eta}^2,$$

а по исключении отсюда $\dot{\eta}$ и упрощении найдем

$$2T = \left\{ A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + mc_1^2 + mc^2 \sin^2 \theta \frac{c^2 - c_1^2}{h^2} \right\} \dot{\theta}^2 + \left(C + m \frac{c^4}{h^2} \sin^2 \theta \right) \dot{\varphi}^2.$$

Применив затем формулы (9), легко находим приводящий множитель

$$N = \frac{1}{\sqrt{C + \frac{mc^4 \sin^2 \theta}{h^2}}}.$$

Задача весьма просто сводится к квадратурам в двух случаях: в случае равенства между собою главных моментов инерции A и B и в том случае, если тело ограничено сферической поверхностью.

О НЕКОТОРОМ ВОЗМОЖНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПЛОЩАДЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ О КАТАНИИ ШАРОВ¹

§ 1. Пусть мы имеем механическую систему, состоящую из произвольного числа материальных точек ($m_1, m_2, \dots$); относительно связей сделаем предположение, что они все время допускают вращение системы без изменения конфигурации вокруг неизменно направленной подвижной прямой AZ , постоянно проходящей через движущуюся точку A ; что касается той точки A , то пусть положение ее определяется относительно неподвижных осей $OX_1Y_1Z_1$ координатами α, β, γ , связанными с координатами $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ центра тяжести G системы соотношениями

$$\bar{\alpha} = \lambda\alpha + \alpha_0, \quad \bar{\beta} = \lambda\beta + \beta_0, \quad \bar{\gamma} = \lambda\gamma + \gamma_0, \quad (1)$$

где $\lambda, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — произвольные постоянные; точка A имеет скорость, параллельную скорости центра тяжести (рис. 1). Пусть система наша находится под действием произвольных внутренних сил, и пусть внешние силы, если мы их сложим в предположении неизменяемости системы, приводятся к двум [силам], пересекающим ось AZ . (В последующем изложении везде, где речь идет о сложении сил, действующих на систему, сложения эти надо производить, предположив систему неизменяемой. Вместо того чтобы предположить осуществление равенства: сумма моментов внешних сил относительно оси AZ равна нулю, мы могли бы считать эту сумму какой угодно наперед заданной функцией времени, что повело бы к появлению в интеграле члена, явно зависящего от времени. Это замечание следует иметь в виду и при выводах следующих параграфов.) Обозначая координаты точек системы по подвижным осям $AXYZ$ через x, y, z , по неподвижным — через x_1, y_1, z_1 с соответствующими разным точкам указателями, мы будем иметь по началу Даламбера

$$\sum m \left(y \frac{d^2x_1}{dt^2} - x \frac{d^2y_1}{dt^2} \right) = 0.$$

Заменяя в этой формуле x_1, y_1, z_1 через $x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \sum m y$ и $\sum m x$ — через $M(\bar{\beta} - \beta)$ и $M(\bar{\alpha} - \alpha)$, где $M = \sum m$, и введя затем вместо $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ их выражения по формулам (1), мы получаем

$$\sum m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) + (\lambda - 1) M \left(\beta \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha \frac{d^2\beta}{dt^2} \right) + M \left(\beta_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} \right) = 0.$$

¹ Читано на заседании Московского математического общества 18 февраля 1897 г. Впервые напечатано в Математическом сборнике, т. XX, 1897.

отсюда по интегрированию находим

$$\sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) + (\lambda - 1) M \left(\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt} \right) + M \left(\beta_0 \frac{d\alpha}{dt} - \alpha_0 \frac{d\beta}{dt} \right) = \text{const.} \quad (2)$$

Уравнение (2) представляет собою *обобщенный интеграл площадей*; в самом деле, приняв в нем α, β, γ за постоянные, мы получим *обычный интеграл*, так как AZ сделается неподвижною осью; а полагая $\lambda = 1$,

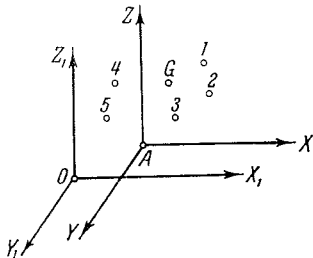


Рис. 1

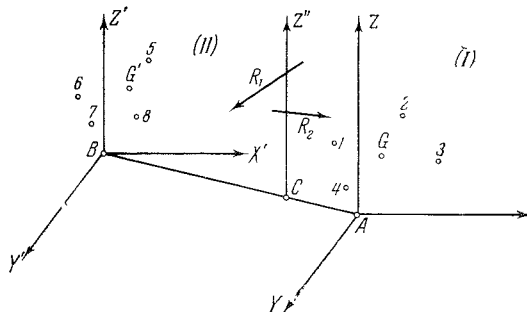


Рис. 2

$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$, придем к интегралу площадей в движении относительно неизменно направленной прямой, проходящей через центр тяжести.

Если суммы моментов внешних сил относительно каждой из трех подвижных осей AX, AY, AZ суть нули и если вокруг каждой из этих прямых система способна вращаться как свободное твердое тело, то мы будем иметь три интеграла типа (2), подобно тому как это имеет место и в обычном случае.

§ 2. Пусть, далее, мы имеем механическую систему, состоящую из материальных точек $m_1, m_2, \dots$, которую можно разбить на две отдельные части (I) и (II) с подвижными центрами A и B и параллельными осями AZ и BZ' (рис. 2); оставив пока в стороне [взаимные] реакции частей (I) и (II), сделаем относительно связей и внешних сил системы (I), ее центра A и оси AZ те же предположения, которые были выставлены в § 1; пусть то же имеет место по отношению к системе (II), ее центру B и оси BZ' . Обращаясь к силам реакций систем (I) и (II), предположим, что суммы L и L' моментов сил действия системы (I) на систему (II), взятые относительно осей AZ и BZ' , находятся в неизменном отношении; это могло бы, например, осуществиться, если бы указанные силы по сложении приводились к двум (R_1 и R_2), пересекающим подвижную прямую CZ'' , параллельную AZ и проходящую через такую точку C отрезка AB , что $CA : CB = \text{const.}$ Обозначая координаты точки A относительно неподвижных осей по-прежнему через α, β, γ , точки B — через α', β', γ' , координаты точек системы (I) относительно осей $AXYZ$ — через x, y, z , а координаты точек

системы (II) по отношению к осям $BX'Y'Z'$ — через x', y', z' , мы можем, аналогично § 1, составить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + (\lambda - 1) M \left(\alpha \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) + \\ &\quad + M \left(\alpha_0 \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) = -L, \\ \frac{dS'}{dt} &= \sum m' \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + (\lambda' - 1) M' \left(\alpha' \frac{d^2 \beta'}{dt^2} - \beta' \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \right) + \\ &\quad + M' \left(\alpha'_0 \frac{d^2 \beta'}{dt^2} - \beta'_0 \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \right) = L'. \end{aligned} \quad (3)$$

S и S' представляют результат интегрирования по t левых частей уравнений (3). В правой части первого из этих уравнений сумма моментов сил действия системы (II) на (I) обозначена через $-L$, потому что L представляет по условию такую же сумму, вычисленную для сил, равных [им по модулю] и противоположных [по направлению].

По предположению имеем

$$L : L' = K = \text{const},$$

а, следовательно, уравнения (3) дают

$$S + KS' = \text{const}. \quad (4)$$

Если бы условия, высказанные для осей AZ и BZ' , были выполнены также для осей AH , BH' , с одной стороны, и AY , BY' — с другой, то мы имели бы три интеграла вида (4). Напомним, что в этом случае следует иметь в виду возможность осуществления условий, высказанных в замечании к предыдущему параграфу; тогда к константе в формуле (4) прибавится некоторая функция времени.

Легко видеть, что количества S и S' формулы (4) представляют собою суммы моментов количеств движения относительно осей AZ и BZ' соответственно для первой и второй частей нашей механической системы, и, следовательно, уравнение (4) характеризует *передачу момента* из одной части системы в другую.

§ 3. Результаты, добытые нами в предыдущем параграфе, допускают некоторое обобщение. В самом деле, предположим, что движущаяся система состоит из n частей, реагирующих друг на друга и расположенных последовательно наподобие звеньев цепи со свободными концами; схема такой системы представлена на рис. 3. Допускаем, что у всякого звена есть свой центр A и ось AZ , движение которых совершается так же, как было предположено в исследованиях предыдущих параграфов; оси эти во все время движения параллельны между собою; о внешних силах, действующих на всякое звено, делаем опять предположение, что сумма их моментов относительно оси звена есть нуль, а о силах действия звена i на k — что суммы моментов этих сил, вычисленные для осей i и k и равные

соответственно L_{ik}^i и L_{ik}^k , удовлетворяют соотношению

$$L_{ik}^i = a_{ik} L_{ik}^k, \quad (5)$$

где a_{ik} — постоянные количества; заметим, что в силу принятых обозначений сумма моментов сил противодействия звена k есть $L_{ki} = -L_{ik}$; обозначив затем сумму моментов количеств движения для звена i относительно

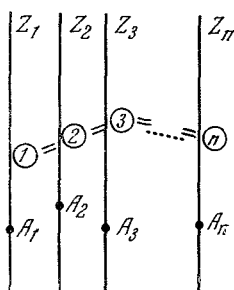


Рис. 3

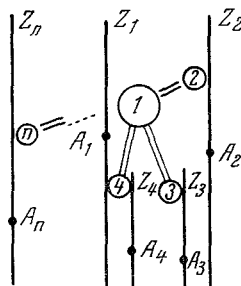


Рис. 4

его оси $A_i Z_i$ через S_i , мы можем написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= L_{21}^1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= L_{12}^2 + L_{32}^2, \\ \frac{dS_3}{dt} &= L_{23}^3 + L_{43}^3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dS_n}{dt} &= L_{n-1, n}^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножив эти уравнения по порядку на

$$1, a_{12}, a_{12}a_{23}, a_{12}a_{23}a_{34}, \dots,$$

затем сложив и заметив, что правая часть обращается в нуль в силу уравнения (5), мы найдем по интегрировании

$$S_1 + a_{12}S_2 + a_{12}a_{23}S_3 + \dots + a_{12}a_{23} \dots a_{n-1, n}S_n = \text{const.} \quad (7)$$

Подобного же рода интеграл получится и в несколько ином предположении о взаимодействии n частей механической системы. Пусть наша система, как это схематически представлено на рис. 4, состоит из центрального ядра 1 и реагирующих на него спутников, представляемых системами точек 2, 3, ..., n . Относительно центров A осей AZ внешних

сил и реакций сделаем опять все вышеприведенные предположения; уравнение (5) останется в силе, а уравнения (6) заменятся следующей совокупностью уравнений:

$$\frac{dS_2}{dt} = L_{12}^2, \quad \frac{dS_3}{dt} = L_{13}^3, \dots, \quad \frac{dS_n}{dt} = L_{1n}^n, \quad \frac{dS_1}{dt} = L_{21}^1 + L_{31}^1 + \dots + L_{n1}^1.$$

Умножив уравнения первой строки соответственно на

$$a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$$

и сложив с последним, мы приходим к интегралу

$$S_1 + a_{12}S_2 + a_{13}S_3 + \dots + a_{1n}S_n = \text{const.} \quad (8)$$

Заметим, что интегралов типа (7) или (8) мы получим три, если система будет обладать тремя группами параллельных осей указанного свойства. Количество интегралов возрастет также, если окажется, что некоторые из количеств L_{ik} суть нули.

Того же вида интегралы мы имели бы и в том случае, если бы исследуемая система имела характер цепи рис. 3, а всякое звено представляло собою группу, схематически изображаемую рис. 4.

§ 4. До сих пор мы занимались интегралами, характеризующими передачу момента из одной части системы в другую; обратимся теперь к обсуждению вопроса о влиянии поступательного движения первой части на вращение второй, или, иначе, о воздействии количества движения одной части на главный момент другой; отсюда иногда тоже возможно извлечь несколько интегралов уравнений движения системы.

Допустим, что одна часть механической системы (I) с подвижным центром A и осью AZ, которая все время параллельна неподвижной оси OZ₁, удовлетворяет в отношении внешних сил и связей требованиям § 1 (рис. 5). Что касается части (II), то пусть связи, на нее наложенные, таковы, что допускают поступательные перемещения без изменения конфигурации по направлениям осей AX и AY или, все равно, OX₁ и OY₁; пусть, далее, внешние силы, действующие на эту часть, по сложении дают силу, параллельную AZ, и произвольную пару. Предположим, что силы воздействия (I) на (II), слагаясь, приводятся к двум R и R', постоянно пересекающим прямую CL, параллельную AZ, причем след C этой прямой на плоскости AXY имеет неизменное расположение; координаты точки C [в системе AXYZ] обозначим соответственно через a и b. Обозначим через M' сумму масс системы (II), через ξ, η, ζ — координаты ее центра тяжести G' относительно осей AXYZ; тогда координаты этой точки по отношению к неподвижным осям OX₁Y₁Z₁ будут ξ + α, η + β, ζ + γ, где α, β и γ по-прежнему определяют положение подвижного центра A; пусть, наконец,

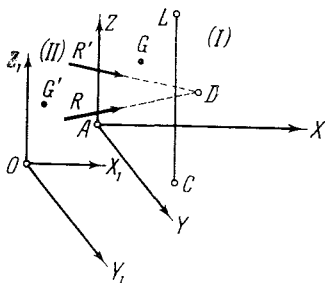


Рис. 5

R_x, R_y, R_z и R'_x, R'_y, R'_z суть проекции сил R и R' на оси. Легко составить уравнения

$$M' \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) = R_x + R'_x; \quad M' \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) = R_y + R'_y. \quad (9)$$

С другой стороны, для системы (I) будем иметь, как в §§ 1 и 2,

$$\begin{aligned} \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + M(\lambda - 1) \left(\alpha \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) + M \left(\alpha_0 \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \beta_0 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) = \\ = b(R_x + R'_x) - a(R_y + R'_y); \end{aligned} \quad (10)$$

в правой части этого уравнения мы имеем сумму моментов относительно оси AZ сил противодействия (II) части.

Уравнения (9) и (10) ведут к соотношению следующего вида:

$$\begin{aligned} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + M' \left(a \frac{d\eta}{dt} - b \frac{d\xi}{dt} \right) + M(\lambda - 1) \left(\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} \right) + \\ + (M\alpha_0 + M'a) \frac{d\beta}{dt} - (M\beta_0 + M'b) \frac{d\alpha}{dt} = \text{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

которое и представляет собою искомый интеграл.

Заметим, что предположение о внешних силах, движущих систему (II), можно расширить: в самом деле, если бы мы, ничего не предполагая о результирующей паре, ввели условие, что проекции равнодействующей силы на оси AX и AY суть постоянные (а не нули, как было предположено выше), или даже какие угодно функции времени, то уравнение (9) пришлось бы видоизменить, прибавляя к правым частям эти функции X и Y ; это повело бы к изменению уравнения (11), в левой части которого появился бы член

$$-a \int Y dt + b \int X dt,$$

зависящий явно от времени. Кроме того, если бы на центр тяжести системы (II) действовала еще сила, пересекающая ось LC , то это ничего бы не изменило в уравнении (11).

§ 5. Интегралов вида (11) может быть более одного при некоторых дополнительных предположениях. Их будет три, если силы взаимодействия частей системы сводятся, по сложении (для каждой части), к одной равнодействующей, проходящей через точку D , неизменно связанную с осями $AXYZ$, и если внешние силы, действующие на систему (II), слагаясь, дают в результате только пару или пару и силу, проекции которой по осям суть определенные функции времени; в последнем случае в интегральных соотношениях будут члены, зависящие явно от времени. Такое возрастание числа интегралов представляется весьма простым следствием изложенной в этом параграфе теоремы, так как сделанные нами дополнительные предположения обуславливают существование трех прямых со свойствами прямой CL , скрепляющихся в точке D (рис. 5).

Более замечательным является тот случай, когда точка D находится на одной из осей координат, например, оси AZ ; тогда нет никакой необходимости стеснять какими бы то ни было условиями проекцию на ось Z силы R , получаемой от сложения внешних сил, движущих систему (II); раз проекции R на оси AX и AY даны явно в функции времени, мы и в этом случае будем иметь три интеграла вида (11); в самом деле, составив уравнение (10) для всякой из осей AX , AY , AZ и замечая, что из трех координат точки $D(a, b, c)$ две первые по условию обращаются в нуль, мы легко найдем три интегрируемых уравнения, приняв в расчет формулы (9).

Не входя в детали, скажем кое-что о возможности дальнейшего обобщения результатов двух последних параграфов; мы могли бы опять обратиться к рассмотрению механических систем более сложного характера, делящихся на n звеньев, каждое из которых могло бы иметь вид группы с центральным ядром (рис. 3 и 4); при этом рассуждениями, подобными тем, которые были выставлены в § 3, можно было бы прийти к интегральным соотношениям аналогичного состава.

§ 6. Обращаемся теперь к применениям вышеизложенных общих соображений. Как пример применения теоремы § 1 рассмотрим такую задачу: в полости неподвижного шара с центром O катается шар, центр тяжести которого G лежит в его геометрическом центре (рис. 6); его главные моменты инерции вообще различны; в точке A прикосновения шаров развивается трение. Обозначая через α , β , γ и $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ координаты точек A и G относительно неподвижных осей $OX'Y'Z'$, через b и a — расстояния OG и OA , имеем

$$\bar{\alpha} = \frac{b}{a} \alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{b}{a} \beta, \quad \bar{\gamma} = \frac{b}{a} \gamma.$$

Так как сила реакции в точке A пересекает ось AZ , а сила веса шара G ей параллельна, то по формуле (2) § 1 мы находим интеграл

$$\sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) + M \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \left(\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt} \right) = \text{const.}$$

Предположив подвижной шар полым и поместив внутри его другой шар, мы имели бы пример приложения формулы (4) § 2; но с этой целью рассмотрим иную задачу.

§ 7. Пусть мы имеем динамически симметричный относительно центра полый шар (рис. 7); шар этот помещен на наклонную плоскость, угол которой с горизонтом обозначим через φ ; в полости первого лежит второй шар с подобным же расположением масс; между первым шаром и плоскостью и в точке соприкосновения двух шаров C предполагается возможным скольжение и развитие соответственных сил трения; первая из них обозначена на прилагаемом чертеже через Q , сила же воздействия первого шара на второй — через R .

В этой задаче мы не имеем ни одного общего интеграла динамики; но легко усмотреть, как к ней прилагаются вышедоказанные теоремы. Приняв за неподвижную ось OZ_1 перпендикуляр к наклонной плоскости и направив ось OX_1 по ее длине, будем одновременно рассматривать две системы подвижных осей, параллельных неподвижным; начало первой из них расположено в точке A ; начало второй лежит в точке B пересече-

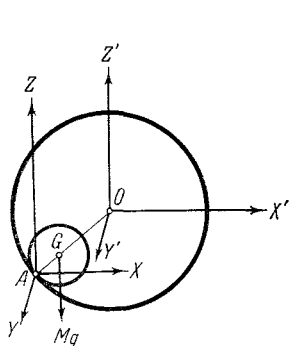


Рис. 6

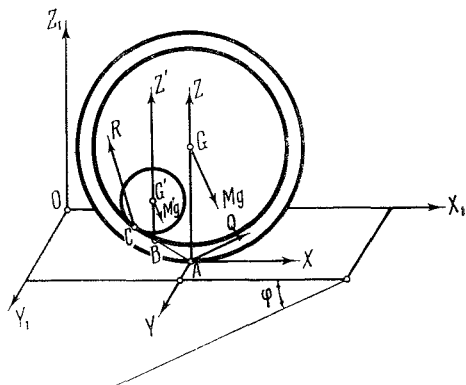


Рис. 7

ния линий AC и $G'B$; последняя проведена через центр второго шара параллельно AZ . Обозначим через a радиус внешней поверхности первого шара, через ρ — радиус второго и через b — расстояние GG' , через M и M' — массы двух шаров; если координаты точек G и A суть $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ и α , β , γ , то будем иметь

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta, \quad \bar{\gamma} = a, \quad \gamma = 0. \quad (12)$$

Пусть, далее, координаты точки G' относительно осей $AXYZ$ суть x , y , z ; тогда координаты точки B будут

$$x, y, z = \frac{\rho a}{\rho + b},$$

ибо

$$BG' : AG = GG' : CG. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) показывают, что точки A и B обладают свойствами, указанными в § 2: первая для внешнего, вторая для внутреннего шара. Покажем, что условия, наложенные в § 2 на силы, также удовлетворены. Внешние силы для первого шара суть: во-первых, сила тяжести, проекции которой по осям $AXYZ$ суть

$$Mg \sin \varphi, 0, -Mg \cos \varphi$$

и моменты относительно этих осей

$$0, Mga \sin \varphi, 0,$$

и, во-вторых, реакция плоскости Q , приложенная в начале подвижных осей; для второго шара имеем проекции силы веса

$$M'g \sin \varphi, 0, -M'g \cos \varphi$$

и ее моменты относительно вторых подвижных осей $BX'Y'Z'$

$$0, M'g \frac{a\rho}{b+\rho} \sin \varphi, 0,$$

что касается силы воздействия R первого шара на второй, то она приложена в точке C внешнего деления линия AB в неизменном отношении $\rho/(b+\rho)$; ясно, что в этом самом отношении будут находиться и моменты силы R относительно осей BX' и AX , BY' и AY , BZ' и AZ . Обозначая через S_x, S_y, S_z моменты количеств движения внешнего шара относительно первых подвижных осей и через S'_x, S'_y, S'_z те же количества для внутреннего шара и вторых подвижных осей, по § 2 будем иметь

$$\begin{aligned} S_x + \frac{\rho+b}{\rho} S'_x &= l, & S_z + \frac{\rho+b}{\rho} S'_z &= n, \\ S_y + \frac{\rho+b}{\rho} S'_y &= m + (M + M')ga \sin \varphi \cdot t, \end{aligned}$$

где l, m и n — произвольные постоянные интегрирования (при составлении последнего уравнения надо принять во внимание примечание к формулам (3) § 2). Если бы плоскость, на которой лежит шар, была горизонтальна, то мы имели бы $\sin \varphi = 0$, и последнее уравнение оказалось бы свободным от члена, явно заключающего время.

Ввиду того, что задача, на которую мы обращаем внимание читателя, имеет некоторый теоретический интерес, покажем, как заканчивается интеграция при некоторых упрощающих предположениях; это составит предмет следующего параграфа. Здесь укажем, как в несколько более сложном случае применяются выводы § 3. Если бы мы предположили, что внутренний шар имеет концентрическую шаровую полость, в которой лежит такой же шар, внутри этого последнего еще один и т. д., сколько угодно, то мы имели бы пример цепеобразного расположения системы, состоящей из n шаров, из которых каждый реагирует на ближайшие внешний и внутренний в точках прикосновения с ними (рис. 8). Обозначив через $C_1, C_2, \dots$ точки прикосновения последовательных звеньев, через $G, G_1, G_2, \dots$ их центры тяжести, мы отмечаем точки $A, A_1, A_2, \dots$ пересечения прямых $GA, G_1A_1, G_2A_2, \dots$, перпендикулярных к наклонной плоскости, с самой плоскостью и с прямыми $AC_1, A_1C_2, \dots$. Эти точки будут подвижными центрами звеньев, как они определены в § 3; нетрудно убедиться, что и все другие требования, выставленные в этом параграфе, удовлетворены для трех взаимно перпендикулярных систем

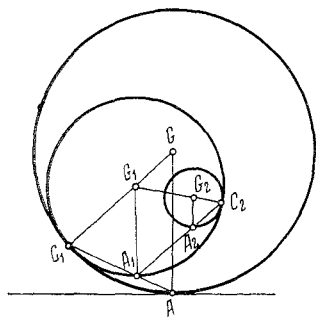


Рис. 8

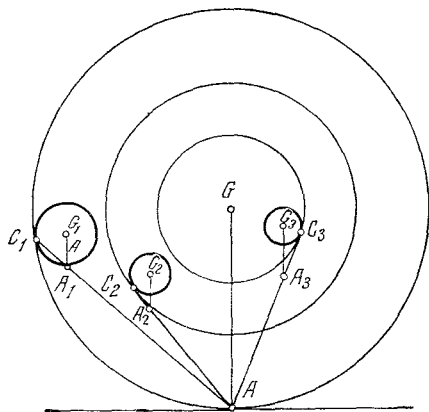


Рис. 9

параллельных осей, пересекающихся по три в подвижных центрах A . Таким образом, мы и в этой более сложной механической системе получаем возможность указать три интегральных соотношения, вид которых определяется формулой (7).

Положив в наружный шар n отдельных шаров, причем, во избежание столкновений, их удобнее разместить в концентрических этажах, мы получим пример системы, состоящей из центрального ядра с n спутниками (рис. 9). Центр A_i [звена для] внутреннего шара i получится, если соединить точку прикосновения A наружного шара к плоскости с точкой C_i прикосновения этих двух шаров и пересечь прямую AC_i линией G_iA_i , параллельную GA . Три интеграла этой задачи легко напишутся по формуле (8) § 3.

§ 8. Обратимся теперь к подробному анализу вопроса, поставленного в § 6, при некоторых упрощающих допущениях. Пусть внешний шар радиуса a и массы M лежит на горизонтальной плоскости OX_1Y_1 , к которой прикасается в точке A (рис. 10); подвижные оси $AXYZ$ параллельны неподвижным $OX_1Y_1Z_1$. Обозначим через x, y, z координаты центра тяжести G' внутреннего шара, имеющего радиус ρ и массу m , относительно осей $AXYZ$, через p', q', r' — проекции на эти оси его угловой скорости, через p, q, r — такие же количества для внешнего шара.

Предположим, что главные моменты инерции каждого шара равны между собою и имеют величины $M(K^2 - a^2)$ и mk^2 соответственно для внешнего и внутреннего шаров; будем, наконец, обозначать через b расстояние GG' . Последнее предположение, которое мы сделаем, состоит в том, что плоскость OX_1Y_1 не допускает скольжения; не будем также предполагать возможности скольжения в точке C соприкосновения шаров.

Для проекций скорости точки касания A (она равна по величине и противоположна по направлению скорости центра G шара в осях $OX_1Y_1Z_1$) легко составим выражения

$$u = qa, \quad v = -pa, \quad w = 0.$$

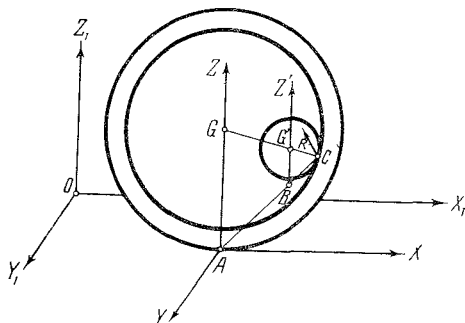


Рис. 10

Проекции на оси $AXYZ$ скорости точки C второго шара, которые мы обозначим через u' , v' , w' , имеют величины

$$u' = \frac{dx}{dt} + qa + q'z' - r'y' = \frac{dx}{dt} + qa + [q'(z-a) - r'y] \frac{\rho}{b},$$

$$v' = \frac{dy}{dt} - pa + r'x' - p'z' = \frac{dy}{dt} - pa + [r'x - p'(z-a)] \frac{\rho}{b},$$

$$w' = \frac{dz}{dt} + p'y' - q'x' = \frac{dz}{dt} + (p'y - q'x) \frac{\rho}{b},$$

где x' , y' , z' — координаты точки C относительно осей, параллельных $AXYZ$ и имеющих начало в G' . Так как вследствие отсутствия скольжения точка C первого шара имеет ту же скорость, то найдем

$$u' = [q(z-a) - ry] \frac{b+\rho}{b} + qa,$$

$$v' = [rx - p(z-a)] \frac{b+\rho}{b} - pa,$$

$$w' = (py - qx) \frac{b+\rho}{b},$$

где $x \frac{b+\rho}{b}$, $y \frac{b+\rho}{b}$, $a + (z-a) \frac{b+\rho}{b}$ — координаты точки C относительно осей $AXYZ$. Отсюда получаем

$$\frac{b}{\rho} \frac{dx}{dt} + \left[q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] (z-a) - \left[r' - r \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] y = 0,$$

$$\frac{b}{\rho} \frac{dy}{dt} + \left[r' - r \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] x - \left[p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] (z - a) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{b}{\rho} \frac{dz}{dt} + \left[p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] y - \left[q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] x = 0,$$

а затем

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = \text{const} = b^2, \quad (15)$$

как и должно быть.

Если проекции на оси $AXYZ$ силы R воздействия внутреннего шара на внешний, приложенной к точке их соприкосновения C , обозначим через R_x, R_y, R_z и примем во внимание, что сила реакции последнего шара равна [по модулю] и противоположна R , то легко напишем следующие уравнения движения:

$$MK^2 \frac{dp}{dt} = (yR_z - zR_y) \left(1 + \frac{\rho}{b} \right) + a \frac{\rho}{b} R_y,$$

$$MK^2 \frac{dq}{dt} = (zR_x - xR_z) \left(1 + \frac{\rho}{b} \right) - a \frac{\rho}{b} R_x, \quad (16)$$

$$M(K^2 - a^2) \frac{dr}{dt} = (xR_y - yR_x) \left(1 + \frac{\rho}{b} \right),$$

из которых первые два дают изменение моментов количеств движения внешнего шара относительно осей AX и AY .

Движение центра тяжести второго шара определяется дифференциальными уравнениями

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + ma \frac{dq}{dt} = -R_x,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} - ma \frac{dp}{dt} = -R_y, \quad (17)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -R_z - mg$$

и его вращательное движение около центра — уравнениями

$$mk^2 \frac{dp'}{dt} = \frac{\rho}{b} (zR_y - yR_z) - a \frac{\rho}{b} R_y,$$

$$mk^2 \frac{dq'}{dt} = \frac{\rho}{b} (xR_z - zR_x) + a \frac{\rho}{b} R_x, \quad (18)$$

$$mk^2 \frac{dr'}{dt} = \frac{\rho}{b} (yR_x - xR_y).$$

Исключая R_x, R_y, R_z по порядку, сначала из первых уравнений групп (16), (17) и (18), затем из вторых и, наконец, из последних

уравнений групп (16) и (18), получаем интегрируемые уравнения, которые дают

$$\begin{aligned}(MK^2 + ma^2)(p - \alpha) + mk^2\left(1 + \frac{b}{\rho}\right)p' - ma \frac{dy}{dt} &= 0, \\(MK^2 + ma^2)(q - \beta) + mk^2\left(1 + \frac{b}{\rho}\right)q' + ma \frac{dx}{dt} &= 0, \\M(K^2 - a^2)(r - \gamma) + mk^2\left(1 + \frac{b}{\rho}\right)r' &= 0,\end{aligned}\quad (19)$$

где α, β, γ — произвольные постоянные интегрирования. Соотношения (19) суть те самые интегралы, которые дает вышеприведенная общая теория для рассматриваемой задачи; их можно было бы написать, непосредственно пользуясь соображениями § 2. Далее, уравнения (16) дают

$$x \frac{dp}{dt} + y \frac{dq}{dt} + \left(z - a \frac{\rho}{b + \rho}\right) \left(\frac{K^2 - a^2}{K^2}\right) \frac{dr}{dt} = 0. \quad (20)$$

Из уравнений (18) находим

$$x \frac{dp'}{dt} + y \frac{dq'}{dt} + (z - a) \frac{dr'}{dt} = 0. \quad (21)$$

Из двух первых уравнений группы (17) и из последнего уравнения группы (16) получаем

$$x \frac{dp}{dt} + y \frac{dq}{dt} + \frac{1}{a} \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{M(K^2 - a^2)b}{ma(b + \rho)} \frac{dr}{dt}. \quad (22)$$

Наконец, уравнения (14) ведут к

$$p' \frac{dx}{dt} + q' \frac{dy}{dt} + r' \frac{dz}{dt} - p \frac{b + \rho}{\rho} \frac{dx}{dt} - q \frac{b + \rho}{\rho} \frac{dy}{dt} - r \frac{b + \rho}{\rho} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (23)$$

Умножив (22) на $-\frac{a^2}{K^2}$ и сложив с (20), получаем по упрощении

$$\begin{aligned}x \frac{dp}{dt} + y \frac{dq}{dt} + (z - a) \frac{dr}{dt} + \frac{a}{K^2 - a^2} \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \\&= -\frac{ba}{b + \rho} \frac{M + m}{m} \frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Сложив это уравнение, помноженное на $-\frac{b + \rho}{\rho}$, с равенствами (23) и (21) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned}&= \left(p' - p \frac{b + \rho}{\rho}\right)x + \left(q' - q \frac{b + \rho}{\rho}\right)y + \left(r' - r \frac{b + \rho}{\rho}\right)(z - a) = \\&= \frac{a(b + \rho)}{\rho(K^2 - a^2)} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) + \frac{ba}{\rho} \frac{M + m}{m} r + \delta,\end{aligned}\quad (24)$$

где σ — сокращенное обозначение левой части, а δ — произвольное по-

стоянное интегрирования. Из уравнений (14) легко получим по умножении первого на $-y$ и сложении со вторым, умноженным на x ,

$$\left(r' - r \frac{b+\rho}{\rho}\right) b^2 - (z-a) \sigma = -\frac{b}{\rho} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

Заменяя здесь σ его значением из равенства (24), r' выражением, получаемым из равенства (19), и вводя для краткости обозначение

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \tau,$$

получим связь между r , z и τ следующего вида:

$$\begin{aligned} \left[\frac{M(K^2 - a^2) \rho}{(b+\rho) mk^2} (r - \gamma) + \frac{b+\rho}{\rho} r \right] b^2 + (z-a) \frac{a(b+\rho)}{\rho(K^2 - a^2)} \tau + \\ + (z-a) \frac{ba}{\rho} \frac{M+m}{m} r + \delta(z-a) = \frac{b}{\rho} \tau, \end{aligned}$$

или по упрощении

$$\begin{aligned} r \left[\frac{ba}{\rho} \frac{M+m}{m} (z-a) + b^2 \frac{b+\rho}{\rho} + \frac{M\rho b^2}{mk^2} \frac{K^2 - a^2}{b+\rho} \right] = \\ = \frac{M(K^2 - a^2) b^2}{mk^2 (b+\rho)} \gamma - \delta(z-a) + \left[\frac{b}{\rho} - \frac{a(b+\rho)}{\rho(K^2 - a^2)} (z-a) \right] \tau. \quad (25) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a \frac{M+m}{m} &= a_1 b, & b+\rho + \frac{M\rho^2}{mk^2} \frac{K^2 - a^2}{b+\rho} &= b_1, \\ \frac{\delta\rho}{b^2} &= a_2, & \frac{M\rho^2}{mk^2} \frac{K^2 - a^2}{b+\rho} \gamma &= b_2, \\ \frac{(b+\rho)a}{(K^2 - a^2)b^2} &= a_3, & \frac{bK^2}{a(b+\rho)} \left(\frac{a^2}{K^2} + \frac{M}{m} \right) &= b_3, \\ z-a &= -\zeta. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (25) даст тогда

$$r = \frac{b_2 + a_2 \zeta}{b_1 - a_1 \zeta} + \frac{\left(\frac{1}{b} + a_3 \zeta \right) \tau}{b_1 - a_1 \zeta}. \quad (27)$$

Из формул (20) и (22) находим далее

$$-\frac{d\tau}{dt} = \left[\frac{(z-a)(K^2 - a^2)}{K^2} a + \frac{b(K^2 - a^2)}{b+\rho} \left(\frac{M}{m} + \frac{a^2}{K^2} \right) \right] \frac{dr}{dt}$$

или, в силу принятых обозначений,

$$\frac{d\tau}{dt} = a \frac{K^2 - a^2}{K^2} (-b_3 + \zeta) \frac{dr}{dt}.$$

С другой стороны, дифференцируя полученное выше выражение для r , находим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{(b_1 - a_1 \xi)^2} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\frac{a_1}{b} + b_1 a_3}{(b_1 - a_1 \xi)^2} \tau \frac{d\xi}{dt} + \frac{\frac{1}{b} + a_3 \xi}{b_1 - a_1 \xi} \frac{d\tau}{dt}.$$

Два последних уравнения приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\xi} \left[1 - a \frac{K^2 - a^2}{K^2} \frac{(\xi - b_3) \left(a_3 \xi + \frac{1}{b} \right)}{b_1 - a_1 \xi} \right] = \\ = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2 + \left(\frac{a_1}{b} + b_1 a_3 \right) \tau}{(b_1 - a_1 \xi)^2} \frac{K^2 - a^2}{K^2} a (\xi - b_3). \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначив $\frac{1}{b_1 - a_1 \xi}$ через ξ , это уравнение после незначительных преобразований можно написать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{\tau + l} = - \frac{\left(\frac{a_1}{b} + b_1 a_3 \right) [(b_1 - a_1 b_3) \xi - 1] d\xi}{[(b_1 - a_1 b_3) \xi - 1] \left[\left(b_1 a_3 + \frac{a_1}{b} \right) \xi - a_3 \right] - \frac{a_1^2 K^2}{a (K^2 - a^2)}} = \\ = \frac{n_1 d\xi}{\xi - \lambda_1} + \frac{n_2 d\xi}{\xi - \lambda_2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где λ_1, λ_2 — корни знаменателя, а n_1, n_2 — числа, которые, как нетрудно видеть, удовлетворяют равенствам

$$n_1 + n_2 = -1, \quad n_1 \lambda_2 + n_2 \lambda_1 = -\frac{1}{b_1 - a_1 b_3} \quad (30)$$

и

$$l = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{\frac{a_1}{b} + b_1 a_3}.$$

Интегрируя уравнение (29), получаем

$$\tau + l = C (\xi - \lambda_1)^{n_1} (\xi - \lambda_2)^{n_2},$$

или, вводя ξ ,

$$\tau + l = A (\xi - \mu_2)^{n_2} (\mu_1 - \xi)^{n_1} (b_1 - a_1 \xi), \quad (31)$$

где μ_1 и μ_2 — корни коэффициента при $\frac{d\tau}{d\xi}$ в уравнении (28), действительные и неравные, выражаются через λ_1 и λ_2 , как ξ через ξ ; пользуясь этим соображением, находим из уравнений (30) для n_1 и n_2 значения

$$n_1 = \frac{\mu_1 - b_3}{\mu_2 - \mu_1} \frac{b_1 - a_1 \mu_2}{b_1 - a_1 b_3}, \quad n_2 = \frac{b_3 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{b_1 - a_1 \mu_1}{b_1 - a_1 b_3}.$$

Движение центра внутреннего шара G' относительно осей $AXYZ$ предельно, если мы найдем зависимость ξ от времени; тогда, представив

$\tau = xy' - yx'$ в виде

$$\tau = r^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

где r и φ — полярные координаты проекции точки G' на плоскость AXY , причем $r^2 = b^2 - \zeta^2$, мы найдем зависимость от времени угла φ , так как вид функции τ дается формулой (31); уравнения (14), (19), (25), (27) будут достаточны для определения зависимости от ζ и, следовательно, от времени вращательного движения шаров, а стало быть, вопрос будет разрешен до конца.

Что касается этой зависимости ζ от времени, то она может быть определена из интеграла живых сил, в котором все величины, кроме ζ и $\frac{d\zeta}{dt}$, могут быть заменены их выражениями через ζ . Но этот способ представляется несколько громоздким, и потому мы предпочитаем для установления искомой зависимости непосредственно пользоваться дифференциальными уравнениями задачи. Из уравнений (14) легко получим [7]

$$\begin{aligned} p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) &= \frac{x}{b^2} \sigma + \frac{1}{\rho b} \left(y \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{dy}{dt} \right), \\ q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) &= \frac{y}{b^2} \sigma + \frac{1}{\rho b} \left(\zeta \frac{dx}{dt} - x \frac{d\zeta}{dt} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Пользуясь уравнениями (16), (17) и (18), составляем выражения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (ma + MK^2\mu) \frac{dq}{dt} + mk^2\lambda \frac{dq'}{dt}$$

и определяем λ и μ равенствами

$$\begin{aligned} ma + MK^2\mu &= -mk^2\lambda \left(1 + \frac{b}{\rho} \right), \\ \left[a - \zeta \left(1 + \frac{\rho}{b} \right) \right] \mu + \frac{\rho}{b} \zeta \lambda &= 1, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} -\lambda \left[\left(1 + \frac{b}{\rho} \right) a \frac{mk^2}{MK^2} - \zeta \left(\frac{(b+\rho)^2}{b\rho} \frac{mk^2}{MK^2} + \frac{\rho}{b} \right) \right] &= \\ = -\lambda [i + h\zeta] &= 1 + \frac{ma^2}{MK^2} - \frac{ma}{MK^2} \left(1 + \frac{\rho}{b} \right) \zeta, \\ \mu [i + h\zeta] &= \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \frac{mk^2}{MK^2} + \frac{ma\rho}{bMK^2} \zeta. \end{aligned} \quad (33)$$

Будем иметь

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + mk^2\lambda \frac{d}{dt} \left[q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] = -\frac{s\rho}{b} \frac{xR_z}{i + h\zeta}$$

и подобным же образом

$$m \frac{d^2y}{dt^2} - mk^2\lambda \frac{d}{dt} \left[p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] = -\frac{s\rho}{b} \frac{yR_z}{i + h\zeta};$$

значения i и h понятны из формулы для λ , а

$$s = 1 + \frac{ma^2}{MK^2} + \frac{mk^2}{MK^2} \left(1 + \frac{b}{\rho}\right)^2.$$

Воспользовавшись выражениями (32), мы находим далее

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \right) - \frac{mk^2\lambda}{b^2} \tau \frac{d\zeta}{dt} + \\ + \frac{mk^2\lambda}{\rho b} \zeta \left[\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{d^2\zeta}{dt^2} \right] = \frac{sp}{b} \frac{R_z}{i + h\zeta} \frac{\zeta d\zeta}{dt}. \quad (34)$$

Кроме того, мы имеем уравнения

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = b^2, \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} = 0, \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \tau = -l + A(\mu_1 - \zeta)^{n_1}(\zeta - \mu_2)^{n_2}(b_1 - a_1\zeta) = f(\zeta).$$

Два последних дают при помощи первого

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{\tau^2 + \zeta^2 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2}{b^2 - \zeta^2}. \quad (35)$$

Обратив внимание на уравнение

$$m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = R_z + mg, \quad (36)$$

[вытекающее из формулы (26) и последнего из равенств группы (17)], и на только что добытое уравнение, мы легко приводим уравнение (34) к виду

$$\left(1 + \frac{k^2\lambda}{\rho b} \zeta\right) \frac{(b^2 - \zeta^2) \left[\tau\tau' + \zeta \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2} \right] + \left[\tau^2 + \zeta^2 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] \zeta}{(b^2 - \zeta^2)^2} - \\ - \frac{k^2\lambda}{b^2} \tau\sigma' - \frac{k^2\lambda}{\rho b} \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{sp}{b} \frac{\zeta}{i + h\zeta} \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - g \right),$$

где $\tau' = f'(\zeta)$ и σ' — результат дифференцирования по аргументу этих функций ζ . Найденное уравнение по упрощении приводится к

$$\frac{dv}{d\zeta} + v\Phi(\zeta) + \Psi(\zeta) = 0,$$

где $v = \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2$ и, следовательно, интегрируется в квадратурах. Мы, однако же, не станем выписывать этих квадратур, так как они довольно сложны в общем случае. Обратим внимание лишь на один частный слу-

чай задачи, в котором все найденные нами формулы в значительной мере упрощаются.

Относительно величины радиуса катающейся по плоскости сферы мы имеем право сделать какое угодно предположение, что несколько не повлияет на ход анализа; в первоначальной постановке задачи мы допускали, что $a > b$ (рис. 11); но ничто не мешает предположить обратное

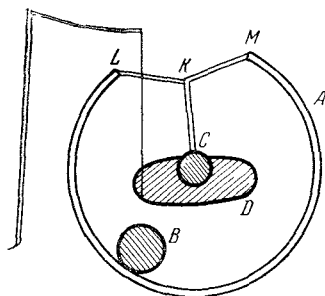


Рис. 11

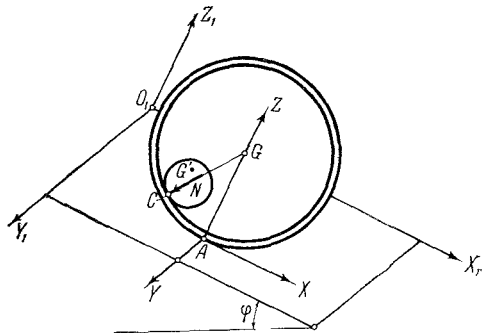


Рис. 12

неравенство; мы тогда получим решение вопроса о движении системы, состоящей из шара B и сферической чаши A , опирающейся внутренней ножкой $LKMC$, на конце которой находится шарик C радиуса a , на плоскую подставку D ; центр C есть центр сферической чаши A . Тот частный случай, о котором я говорю, имеет место, когда ножка заканчивается острием, и, стало быть $a = 0$; так как, по предположению, скольжения по плоскости D быть не может, то в этом случае центр чаши оказывается неподвижным.

Уравнения (19) приводятся в предположении $a = 0$ к следующим:

$$\frac{p'}{p - \alpha} = \frac{q'}{q - \beta} = \frac{r'}{r - \gamma} = - \frac{MK^2 \rho}{mk^2(b + \rho)}.$$

Формула (24) дает

$$\sigma = \left[p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] x + \left[q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] y - \left[r' - r \left(1 + \frac{b}{\rho} \right) \right] \xi = \delta.$$

Уравнения (25) и следующие дадут

$$bAr = \varepsilon - \tau.$$

$$(b_1 + A)\tau = b_1\varepsilon - b \frac{\rho^2}{k^2} A^2 \gamma - \frac{\delta \rho}{b} A \xi.$$

Здесь $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ — произвольные постоянные интегрирования,

$$b_1 = b + \rho + \frac{M}{m} \frac{K^2 \rho^2}{(b + \rho) k^2};$$

$$A = \frac{MK^2}{m(b + \rho)}, \quad \tau = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}.$$

Замечая, далее, что в формуле (34) количество λ на этот раз, согласно формуле (33), определяется равенством

$$k^2 \lambda \xi = \frac{A b \rho}{b_1}$$

и, кроме того,

$$i = 0, \quad \frac{sp}{bh} = -1, \quad \frac{ds}{dt} = 0,$$

мы будем иметь вместо (34)

$$m(\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} + \ddot{\xi}\ddot{\xi}) \left(1 + \frac{A}{b_1}\right) - m\dot{\xi}\ddot{\xi} = -R_z\dot{\xi}, \quad (37)$$

где точками обозначены дифференцирования по времени. Так как

$$m\ddot{\xi} = R_z + mg,$$

то равенство (37) переходит в следующее:

$$m(\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} + \dot{\xi}\ddot{\xi}) \left(1 + \frac{A}{b_1}\right) - mg\dot{\xi} = 0,$$

откуда

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\xi}^2 - 2 \frac{g}{1 + \frac{A}{b_1}} \xi = H.$$

При помощи вышеприведенной формулы

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{\tau^2 + \xi^2 \dot{\xi}^2}{b^2 - \xi^2},$$

отсюда определяем ξ в эллиптических функциях времени.

Интересно заметить, что если бы произвольное постоянное δ было нулем, то [мы получили бы] $\tau = \text{const}$, и центр внутреннего шара двигался бы, как сферический маятник под действием измененного напряжения тяжести $\frac{g}{1 + \frac{A}{b_1}}$, а оба шара имели бы равномерное вращение около оси AZ .

§ 9. Переходим к примеру на применение теоремы § 4. Пусть опять имеем шар с симметричным относительно центра G расположением масс, опирающийся в точке A на наклонную плоскость (рис. 12); в полости шара находится твердое тело, ограниченное какою угодно выпуклою совершенно

гладкую поверхность, развивающее в точке C прикосновения к шару силу нормального давления N , направленную по прямой GC . Выбрав оси, как в § 7, введем следующие обозначения: M и m — массы оболочки и внутреннего ядра, x, y, z — координаты центра тяжести G' последнего по подвижным осям, α, β, a — координаты точки G относительно неподвижных осей; через R_x, R_y, R_z и N_x, N_y, N_z обозначаем проекции на оси сил реакции на оболочку плоскости $O_1X_1Y_1$ и внутреннего тела; наконец, через p, q, r и J_x, J_y, J_z соответственно будут обозначены проекции угловой скорости и моменты инерции оболочки относительно подвижных осей координат.

В этой задаче имеется один обычный интеграл динамики

$$J_z \cdot r = \text{const},$$

ибо силы, движущие оболочку, пересекают ось AZ ; по правилу § 4 мы, однако же, можем найти еще два интегральных соотношения; в самом деле, движение точки G' определяется уравнениями

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = -N_x + mg \sin \varphi,$$

$$m \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2} \right) = -N_y,$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -N_z - mg \cos \varphi.$$

Далее, для сумм моментов количеств движения оболочки около осей AH и AU мы имеем выражения

$$J_x p - Mav, \quad J_y q + Mau,$$

где u и v — проекции скорости скольжения в точке A на те же оси. Тогда по правилу § 4:

$$\frac{d}{dt} (J_x p - Mav) = -aN_y,$$

$$\frac{d}{dt} (J_y q + Mau) = aN_x.$$

Из сравнения последних уравнений с предшествующими легко получаем искомые интегралы

$$am \left(\frac{dy}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) - J_x p + Mav = \text{const},$$

$$am \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \right) + J_y q + Mau = mgt \sin \varphi + \text{const}.$$

Интеграцию можно вести гораздо далее, если внутреннее ядро есть динамически симметричный относительно центра шар, если равны главные моменты инерции оболочки и если в точке A нет скольжения. Прежде

всего ясно, что вращение ядра относительно его центра будет происходить в этом случае так, как указал Пуансо, нисколько не влияя на движение самого центра. Далее, мы будем иметь

$$N_x = \frac{x}{b} N, \quad N_y = \frac{y}{b} N, \quad N_z = N \frac{z-a}{b},$$

где $b = GG'$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = qa, \quad \frac{d\beta}{dt} = -pa,$$

$$J_x = J_y = MK^2 = \text{const}, \quad J_z = M(K^2 - a^2),$$

и вышеприведенные интегралы получают вид*

$$r = \text{const},$$

$$\frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{MK^2}{ma^2}\right) \frac{d\beta}{dt} = \text{const} = \left(1 + \frac{MK^2}{ma^2}\right) v_0, \quad (38)$$

$$\frac{dx}{dt} + \left(1 + \frac{MK^2}{ma^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} = \text{const} + gt \sin \varphi = \left(1 + \frac{MK^2}{ma^2}\right) u_0 + gt \sin \varphi.$$

Воспользовавшись последними уравнениями для определения $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$, мы приведем уравнения, определяющие движение центра ядра, к виду

$$m \frac{MK^2}{ma^2 + MK^2} \frac{d^2x}{dt^2} = -N \frac{x}{b} + mg \sin \varphi \frac{MK^2}{ma^2 + MK^2},$$

$$m \frac{MK^2}{ma^2 + MK^2} \frac{d^2y}{dt^2} = -N \frac{y}{b},$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -N \frac{z-a}{b} - mg \cos \varphi.$$

Обозначим для краткости дробь $\frac{MK^2}{ma^2 + MK^2}$ через σ^2 и положим

$$\sigma^2 x = x_1, \quad \sigma^2 y = y_1, \quad \sigma(z-a) = z_1.$$

Предыдущие уравнения переходят в следующие:

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = \lambda \frac{x_1}{\sigma^4 b^2} + mg \sigma^2 \sin \varphi,$$

$$m \frac{d^2y_1}{dt^2} = \lambda \frac{y_1}{\sigma^4 b^2}, \quad (39)$$

$$m \frac{d^2z_1}{dt^2} = \lambda \frac{z_1}{\sigma^2 b^2} - mg \sigma \cos \varphi,$$

где $\lambda = -Nb\sigma^2$; уравнение, связывающее x , y , z ,

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = b^2,$$

дает

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma^4 b^2} + \frac{z_1^2}{\sigma^2 b^2} = 1,$$

изображающее некоторый эллипсоид вращения с центром в точке G ; кроме этого эллипсоида, рассмотрим еще другой, сооспый,

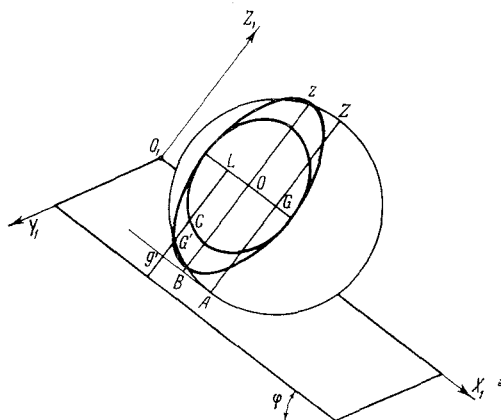


Рис. 13

отличающийся от первого лишь длиной оси Z , которая у него равна $2b$. Спроектировав G' на плоскость $O_1X_1Y_1$ в g' , продвинем наши эллипсоиды по направлению Ag' так, чтобы движущаяся точка G' попала на второй из них (рис. 13); общий центр эллипсоидов O будет тогда иметь координаты

$$x - x_1 = (1 - \sigma^2) x, \quad y - y_1 = (1 - \sigma^2) y, \quad a$$

по осям $O_1X_1Y_1Z$; точка G' относительно осей, им параллельных и имеющих начало в точке O , определяется координатами

$$x_1, y_1, \frac{z_1}{\sigma} = z - a;$$

координаты же точки C пересечения прямой $G'g'$ с первым эллипсоидом будут x_1, y_1, z_1 . Уравнения (39) показывают, что точка C движется по подвижному эллипсоиду так, как двигалась бы тяжелая точка массы m , положенная в этот самый эллипсоид, если бы он был неподвижен и если бы измененное ускорение тяжести, равное

$$g \sqrt{\sigma^4 \sin^2 \varphi + \sigma^2 \cos^2 \varphi},$$

составляло с осью OZ угол μ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \mu = \sigma \operatorname{tg} \varphi.$$

Посмотрим, как движется центр эллипсоида относительно неподвижных осей; координаты этой точки суть

$$\begin{aligned}x' &= \alpha + x - x_1 = \alpha + (1 - \sigma^2) x, \\y' &= \beta + y - y_1 = \beta + (1 - \sigma^2) y, \\z' &= a.\end{aligned}$$

Обращаясь к уравнениям (38), мы видим, что они приводятся к следующим:

$$\frac{dx'}{dt} = u_0 + g(1 - \sigma^2)t \cdot \sin \varphi, \quad \frac{dy'}{dt} = v_0,$$

а это показывает что искомое движение совершается по параболе, лежащей в плоскости, параллельной AXY и имеющей ось, направленную по длине наклонной плоскости.

Что касается движения полого шара, то оно определяется выпеняйденными выражениями p, q, r и перемещением точки A ; а положение этой точки относительно эллипсоида во всякий момент времени легко найти, если известно положение точки C ; в самом деле, проекция g' последней на плоскость AXY лежит на одной прямой с точкою A и точкою B , в которой упирается в эту плоскость ось эллипсоида; притом

$$AB : Bg' = \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} = \frac{ma^2}{MK^2}.$$

Задача приведена, таким образом, к интегрированию уравнений (39), определяющих положение точки C . Один из их интегралов — интеграл живой силы — можно написать; мы имеем

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - 2g(x_1\sigma^2 \sin \varphi - \sigma z_1 \cos \varphi) = h.$$

Второй интеграл мы можем найти лишь в том случае, когда плоскость AXY горизонтальна, следовательно, $\varphi = 0$. Тогда мы имеем

$$x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} = l.$$

Вводя новые координаты θ и s по формулам

$$x_1 = b\sigma^2 \cos \theta \cdot \sqrt{1 - s^2}, \quad y_1 = b\sigma^2 \sin \theta \cdot \sqrt{1 - s^2}, \quad z_1 = b\sigma s,$$

так что уравнение

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{b^2\sigma^4} + \frac{z_1^2}{b^2\sigma^2} = 1$$

будет удовлетворено, мы найдем для определения θ и s уравнения

$$b^2\sigma^4(1 - s^2) \frac{d\theta}{dt} = l,$$

$$b^2\sigma^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 [1 - (1 - \sigma^2)s^2] = (h - 2gb\sigma^2 s)(1 - s^2) - \frac{l^2}{b^2\sigma^4},$$

и отсюда

$$t + \tau = b\sigma \int \sqrt{\frac{1 - (1 - \sigma^2) s^2}{(h - 2bg\sigma^2 s)(1 - s^2) - \frac{l^2}{b^2\sigma^4}}} \cdot ds.$$

Это уравнение показывает, что s , а следовательно, и $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ колеблется между двумя предельными значениями. Подобные кривые, описываемые точками A и g' в движении относительно эллипсоида, имеют очертание, сходное с герполоидой, т. е. заключены каждая между двумя концентрическими окружностями с центром в точке B и не имеют точек перегиба. Что касается эллипсоида, то в этом случае он движется прямолинейно и равномерно.

О КАТАНИИ ШАРА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ¹

Введение. Задача о катании тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости в настоящее время разрешена лишь в немногих частных случаях. Кроме разобранных еще Эйлером случая, когда катящееся тело ограничено цилиндрической поверхностью, точные решения известны: для однородного шара, для круглого диска², для неоднородного шара, центр тяжести которого совпадает с геометрическим центром, а центральный эллипсоид инерции имеет форму сфероида³; нам удалось показать, что эта задача приводится к квадратурам и в том случае, если центр тяжести не совпадает с геометрическим центром⁴. Во всех приведенных случаях точечного прикосновения движущегося тела к плоскости необходимым условием решения принималось равенство двух главных моментов инерции. Сколько мы знаем, ни одна задача о катании тела, центральный эллипсоид инерции которого имеет вид трехосного эллипсоида, не была до сих пор решена во всей широте⁵. В предлагаемой статье мы решаем вопрос о катании по плоскости симметричного шара, причем не налагаем никаких стеснений ни на главные моменты инерции, ни на начальные обстоятельства движения. К аналитическому решению этой задачи мы присоединяем в конце работы некоторые геометрические соображения, в значительной мере уясняющие характер движения в общем случае и рисующие полную его картину при особых частных предположениях.

Успех решения обуславливается применимостью к рассматриваемому вопросу обобщенной теоремы площадей⁶, вследствие которой *главный момент количества движения нашего шара, построенный для точки прикос-*

¹ Впервые напечатано в Математическом сборнике, т. XXIV, 1903.

² Этот случай указан В. Томсоном (*W. Thomson*). Анализ подробно изложен, например, в сочинении П. В. Воронца «Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости». Киев, 1903.

³ *Бобылев Д. К.* О шаре с гироскопом внутри. — Матем. сб., т. XVI. М., 1892; *Жуковский Н. Е.* О гироскопическом шаре Бобылева. — Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VI, 1894. [Собрание сочинений, т. 1, 1948].

⁴ См. статью автора «О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости» в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IX, вып. 1, 1897 [стр. 363—375 настоящего издания].

⁵ В цитированном сочинении П. В. Воронца разрешена задача о катании трехосного эллипсоида при некоторых частных предположениях относительно начальных данных и расположения масс и в отсутствии силы тяжести.

⁶ Теорема эта указана нами в статье «О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров». — Математический сборник, т. XX 1897 [стр. 385—408 настоящего издания].

новения к плоскости, должен сохранять постоянную величину и неизменное направление в пространстве. Этим обстоятельством мы пользуемся и при составлении самих уравнений движения.

§ 1. Уравнения движения, их алгебраические интегралы и последний множитель. Отнесем движущийся шар к связанным с ним главным [центрально] осям инерции и обозначим: через p, q, r — составляющие угловой скорости; через u, v, w — составляющие поступательной скорости центра тяжести O , совпадающего с геометрическим центром шара; через P, Q, R — проекции на подвижные оси главного момента [количеств движения], построенного для точки опоры (в дальнейшем изложении мы называем этот вектор просто главным моментом); через $\gamma, \gamma', \gamma''$ назовем косинусы углов, образуемых с осями вертикалью, направленною вверх. Пусть, далее, m есть масса, ρ — радиус, L, M, N — главные моменты инерции шара. Количество $m\rho^2$ условимся для краткости обозначать через D . Легко находим

$$u = \rho (\gamma''q - \gamma'r), \quad v = \rho (\gamma r - \gamma''p), \quad w = \rho (\gamma'p - \gamma q); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P &= Lp + m\rho (\gamma'w - \gamma''v) = (L + D)p - D\gamma\omega, \\ Q &= Mq + m\rho (\gamma''u - \gamma w) = (M + D)q - D\gamma'\omega, \\ R &= Nr + m\rho (\gamma v - \gamma'u) = (N + D)r - D\gamma''\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\omega = p\gamma + q\gamma' + r\gamma'' \quad (3)$$

есть проекция угловой скорости на вертикаль. Положив

$$L + D = A, \quad M + D = B, \quad N + D = C \quad (4)$$

и введя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} - \frac{1}{D} &= -X, \\ \frac{P\gamma}{A} + \frac{Q\gamma'}{B} + \frac{R\gamma''}{C} &= Y, \end{aligned} \quad (5)$$

получаем из (2)

$$\begin{aligned} Ap &= P + \gamma \frac{Y}{X}, \quad Bq = Q + \gamma' \frac{Y}{X}, \\ Cr &= R + \gamma'' \frac{Y}{X}, \quad D\omega = \frac{Y}{X}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия неизменности главного момента и постоянства вертикального направления напишутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rQ - qR, \quad \frac{dQ}{dt} = pR - rP, \quad \frac{dR}{dt} = qP - pQ; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{aligned} \quad (7)$$

Это и суть уравнения движения шара.

Их интегралами служат, во-первых, соотношения

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 + R^2 &= n, \\ P\gamma + Q\gamma' + R\gamma'' &= h, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

и, во-вторых, уравнение живой силы

$$2T = pP + qQ + rR = l, \quad (9)$$

которое на основании (5) и (6) может быть изображено в виде

$$ZX = Y^2, \quad (10)$$

если мы положим

$$\frac{P^2}{A} + \frac{Q^2}{B} + \frac{R^2}{C} - l = -Z. \quad (11)$$

В этих формулах через h , l и n обозначены произвольные постоянные интегрирования. Заметим раз навсегда, что количества n , l , X , Z суть величины неотрицательные; относительно двух последних в этом легко убедиться из рассмотрения равенств (8) и (10) совместно с равенствами (5) и (4).

Покажем теперь, что приведенных четырех алгебраических интегралов достаточно для полного разрешения задачи. Для сего достаточно найти Якобиевский последний множитель системы (7). Обозначив его через S и считая его выраженным через P , Q , R , γ , γ' , γ'' , мы имеем для его определения равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(S \frac{dP}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial Q} \left(S \frac{dQ}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(S \frac{dR}{dt} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(S \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma'} \left(S \frac{d\gamma'}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma''} \left(S \frac{d\gamma''}{dt} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, ... должно заменить их значениями из (7), приняв в расчет (6). Замечая, что на основании (6) и (9)

$$p = \frac{\partial T}{\partial P}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial Q}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial R},$$

мы приводим (12) к виду

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \gamma \left(\frac{\partial q}{\partial \gamma''} - \frac{\partial r}{\partial \gamma'} \right) + \gamma' \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma} - \frac{\partial p}{\partial \gamma''} \right) + \gamma'' \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma'} - \frac{\partial q}{\partial \gamma} \right) = 0; \quad (13)$$

но, дифференцируя (6), мы имеем

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma''} - \frac{\partial r}{\partial \gamma'} = \frac{\gamma'R - \gamma''Q}{BCX}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma} - \frac{\partial p}{\partial \gamma''} = \frac{\gamma''P - \gamma'R}{CAX}, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma'} - \frac{\partial q}{\partial \gamma} = \frac{\gamma Q - \gamma'P}{ABX},$$

а вследствие этого, как легко проверить, найдем

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{\partial q}{\partial \gamma''} - \frac{\partial r}{\partial \gamma'} \right) + \gamma' \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma} - \frac{\partial p}{\partial \gamma''} \right) + \gamma'' \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma'} - \frac{\partial q}{\partial \gamma} \right) = \\ = \frac{\gamma}{AX} (\gamma'' q - \gamma' r) + \frac{\gamma'}{BX} (\gamma r - \gamma'' p) + \frac{\gamma''}{CX} (\gamma' p - \gamma q) = \frac{1}{2X} \frac{dX}{dt}. \end{aligned}$$

Соотношение (13) приводится теперь к следующему:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2X} \frac{dX}{dt} = 0,$$

откуда

$$S \sqrt{X} = \text{const.}$$

Таким образом на основании теоремы Якоби задача наша должна сводиться к квадратурам.

§ 2. Решение задачи в случае $h = 0$. Перейдем к выводу разрешающих задачу формул и начнем с частного предположения $h = 0$, т. е. предположим, что главный момент направлен горизонтально. Преобразуем прежде всего алгебраические интегралы, введя в них вместо P, Q, R величины p, q, r . Вследствие (6) интеграл живой силы (9) переписывается так:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - D\omega^2 = l. \quad (14)$$

Соотношения (8) при условии $h = 0$, приняв во внимание (4), изобразим в виде

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' - D\omega = Lp\gamma + Mq\gamma' + Nr\gamma'' = 0, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - D^2\omega^2 = n. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнений (7), благодаря второму из равенств (15), находим

$$\begin{aligned} pH &= N\gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} - M\gamma' \frac{d\gamma''}{dt}, \\ qH &= L\gamma \frac{d\gamma''}{dt} - N\gamma'' \frac{d\gamma}{dt}, \\ rH &= M\gamma' \frac{d\gamma}{dt} - L\gamma \frac{d\gamma'}{dt}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$H = L\gamma^2 + M\gamma'^2 + N\gamma''^2. \quad (17)$$

Изобразив при помощи (4) уравнение (14) в форме

$$Lp^2 + Mq^2 + Nr^2 + D(r\gamma' - q\gamma'')^2 + D(p\gamma'' - r\gamma)^2 + D(q\gamma - p\gamma')^2 = l,$$

подставим в него [значения p, q, r из формул] (16); результат будет таков:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \left[MN \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + NL \left(\frac{d\gamma'}{dt} \right)^2 + LM \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right)^2 \right] + \\ + D \left[\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right)^2 \right] = l. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, интеграл (14) и последний из интегралов (15) дают

$$L^2 p^2 + M^2 q^2 + N^2 r^2 + D (Lp^2 + Mq^2 + Nr^2) = n - Dl,$$

или, по подстановке из формул (16),

$$\frac{1}{H^2} \sum \left(LN\gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} - LM\gamma' \frac{d\gamma''}{dt} \right)^2 + \frac{D}{H} \sum MN \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = n - Dl; \quad (19)$$

здесь мы употребили для сокращения письма знак суммирования, указывая им на сумму трех слагаемых аналогичного состава; два других получаются из первого круговую перестановку букв или знаков, соответствующих трем осям координат. Этим сокращенным обозначением будем пользоваться и в дальнейшем изложении.

Введем теперь новые постоянные по формулам

$$\begin{aligned} La^2\sigma^2 &= Mb^2\sigma^2 = Nc^2\sigma^2 = 1, \\ D\partial^2\sigma^2 &= 1, \quad 4l\sigma^2 = g, \quad 4n\sigma^4 = k \end{aligned} \quad (20)$$

и обозначим через δ выражение

$$\delta = - (b^2 - c^2) (c^2 - a^2) (a^2 - b^2);$$

кроме того, положим

$$a\gamma = x, \quad b\gamma' = y, \quad c\gamma'' = z. \quad (21)$$

Тогда для определения зависимости x, y, z от времени по первому из уравнений (15) и по уравнениям (18) и (19) будем иметь

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{a^2 b^2 c^2} \frac{\sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}{\sum \frac{x^2}{a^4}} + \frac{4}{\partial^2} \sum \frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = g, \\ & \frac{4}{\left(\sum \frac{x^2}{a^4} \right)^2} \sum \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{4a^2 b^2 c^2}{\partial^2 \sum \frac{x^2}{a^4}} \sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \\ & \quad = a^4 b^4 c^4 \left(k - \frac{g}{\partial^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Перейдем теперь к эллиптическим координатам, положив

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2 (a^2 + u) (a^2 + v)}{(b^2 - a^2) (c^2 - a^2)}, \\ y^2 &= \frac{b^2 (b^2 + u) (b^2 + v)}{(a^2 - b^2) (c^2 - b^2)}, \\ z^2 &= \frac{c^2 (c^2 + u) (c^2 + v)}{(a^2 - c^2) (b^2 - c^2)}; \end{aligned}$$

отсюда имеем

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{du}{a^2 + u} + \frac{dv}{a^2 + v},$$

$$4 \frac{dx^2}{x^2} = \frac{du^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{dv^2}{(a^2 + v)^2} + 2 \frac{dudv}{(a^2 + u)(a^2 + v)}$$

с аналогичными для y и z . На основании этих формул получаем

$$4 \sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\dot{u}^2}{\delta} \sum \frac{a^2 + v}{a^2 + u} a^2 (b^2 - c^2) + \frac{\dot{v}^2}{\delta} \sum \frac{a^2 + u}{a^2 + v} a^2 (b^2 - c^2);$$

$$4 \sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{1}{a^2} = \frac{\dot{u}^2}{\delta} \sum \frac{a^2 + v}{a^2 + u} (b^2 - c^2) + \frac{\dot{v}^2}{\delta} \sum \frac{a^2 + u}{a^2 + v} (b^2 - c^2),$$

где для простоты письма положено

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}, \quad \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Выполнив суммирование, приходим к равенствам

$$4 \sum \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (u - v) \left\{ \frac{u \dot{u}^2}{s(u)} - \frac{v \dot{v}^2}{s(v)} \right\}, \quad (24)$$

$$4 \sum \frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (v - u) \left\{ \frac{u^2}{s(u)} - \frac{\dot{v}^2}{s(v)} \right\},$$

если будем обозначать через $s(\sigma)$ выражение

$$s(\sigma) = (a^2 + \sigma) (b^2 + \sigma) (c^2 + \sigma). \quad (25)$$

Далее, имеем

$$2 \frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - 2 \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} = \frac{(b^2 - c^2) u \dot{u}}{(b^2 + u)(c^2 + u)} + \frac{(b^2 - c^2) v \dot{v}}{(b^2 + v)(c^2 + v)};$$

$$4 \sum \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right)^2 =$$

$$= - \frac{u^2 \dot{u}^2}{\delta} \sum \frac{(b^2 + v)(c^2 + v)}{(b^2 + u)(c^2 + u)} (b^2 - c^2) -$$

$$- \frac{v^2 \dot{v}^2}{\delta} \sum \frac{(b^2 + u)(c^2 + u)}{(b^2 + v)(c^2 + v)} (b^2 - c^2),$$

или, по выполнении суммирования,

$$4 \sum \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right)^2 = (v - u) \left\{ \frac{u^2 \dot{u}^2}{s(u)} - \frac{v^2 \dot{v}^2}{s(v)} \right\}. \quad (26)$$

Наконец, имеем

$$\sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{uv}{a^2 b^2 c^2}.$$

При помощи этой формулы и соотношений (24) и (26) уравнения (22).

и (23) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\dot{u}^2}{s(u)} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\partial^2} \right) - \frac{\dot{v}^2}{s(v)} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\partial^2} \right) = \frac{g}{u-v},$$

$$-\frac{\dot{u}^2}{vs(u)} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\partial^2} \right) - \frac{\dot{v}^2}{us(v)} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\partial^2} \right) = \frac{\frac{g}{\partial^2} - k}{u-v};$$

отсюда имеем

$$\frac{v-u}{v} \sqrt{\partial^2 - v} \frac{du}{dt} = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)(ju - g\partial^2)},$$

$$\frac{v-u}{u} \sqrt{\partial^2 - u} \frac{dv}{dt} = \sqrt{(a^2 + v)(b^2 + v)(c^2 + v)(jv - g\partial^2)},$$
(27)

где

$$j = g - k\partial^2.$$

Приняв $a > b > c$, мы из рассмотрения соотношений (27) совместно с неизвестными неравенствами

$$a^2 > -v > b^2 > -u > c^2$$

убеждаемся, что j должно быть менее нуля; притом непременно

$$-v > -\frac{g\partial^2}{j} > -u.$$

Таким образом, величина $\frac{g\partial^2}{j}$ будет служить верхней границей для v , если $g\partial^2 > -jb^2$, или нижней для u , коль скоро $g\partial^2 < -jb^2$; в первом случае u и v заключены в пределах

$$-b^2 < u < -c^2, \quad -a^2 < v < \frac{g\partial^2}{j};$$

во втором — в пределах

$$\frac{g\partial^2}{j} < u < -c^2, \quad -a^2 < v < -b^2.$$

Для более удобного выражения окончательных формул введем переменное τ , удовлетворяющее соотношению

$$dt = d\tau \sqrt{(\partial^2 - u)(\partial^2 - v)}. \quad (28)$$

Тогда равенства (27) дают

$$\int \frac{u du}{F(u)} - \int \frac{v dv}{F(v)} = \alpha,$$

$$\int \frac{du}{F(u)} - \int \frac{dv}{F(v)} = \tau,$$
(29)

где α — произвольная постоянная интегриации, а операция F определяется

формулой

$$F(\sigma) = \sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)(c^2 + \sigma)(j\sigma - g\delta^2)(\delta^2 - \sigma)}. \quad (30)$$

Из этих соотношений u и v могут быть выражены в Θ -функциях двух аргументов α и τ . Затем зависимость времени от τ вытекает из уравнения (28), которое дает по интеграции

$$t + \beta = \int \sqrt{(\delta^2 - u)(\delta^2 - v)} d\tau$$

с произвольным постоянным β .

Примем теперь за неподвижную ось $\Omega\zeta$ прямую, направленную согласно с принятым уже направлением вертикали; плоскость, по которой катится шар, будем считать за координатную плоскость $\Omega\xi\eta$; неподвижную ось $\Omega\eta$ направим параллельно неизменному главному моменту (который в нашем частном случае горизонтален); наконец, ось $\Omega\xi$ расположим по отношению к осям $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ так же, как ось Ox располагается по отношению к осям Oy и Oz . Положение в данный момент катящегося шара будет вполне определено, если, кроме найденной уже зависимости γ , γ' , γ'' от u , v , мы отыщем угол ψ между линией пересечения плоскости Oxy с плоскостью $\Omega\xi\eta$ и осью $\Omega\eta$ и определим координаты ξ , η точки прикосновения шара к плоскости. Что касается угла ψ , то он определяется формулой

$$\cos \psi = \frac{P\gamma' - Q\gamma}{\sqrt{n} \sqrt{\gamma^2 + \gamma'^2}},$$

которая при помощи (2) и (5) переписывается в виде

$$\sqrt{n} \cos \psi \frac{V1 - \gamma''^2}{\gamma''} \sum L\gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum MN\gamma^2 - \left(LM + D \sum L\gamma^2 \right) \frac{1}{\gamma''} \frac{d\gamma''}{dt}.$$

Но

$$\begin{aligned} \sum L\gamma^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{uv}{\sigma^2 a^2 b^2 c^2}, \\ \sum MN\gamma^2 &= \frac{1}{\sigma^4 a^2 b^2 c^2} \sum x^2 = \frac{1}{\sigma^4 a^2 b^2 c^2} (a^2 + b^2 + c^2 + u + v), \\ \gamma'' &= \frac{z}{c} = \sqrt{\frac{(c^2 + u)(c^2 + v)}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}}, \\ \frac{1}{\gamma''} \frac{d\gamma''}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{u}}{c^2 + u} + \frac{\dot{v}}{c^2 + v} \right), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum MN\gamma^2 - \frac{LM}{\gamma''} \frac{d\gamma''}{dt} &= \frac{1}{2\sigma^4 a^2 b^2 c^2} \left(\frac{u\dot{u}}{c^2 + u} + \frac{v\dot{v}}{c^2 + v} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими формулами, находим

$$uv\delta^2 \sqrt{k} \cos \psi = \sqrt{\frac{(c^2 + u)(c^2 + v)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) - (c^2 + u)(c^2 + v)}} \left[\frac{u\dot{u}(\delta^2 - v)}{c^2 + u} + \frac{v\dot{v}(\delta^2 - u)}{c^2 + v} \right],$$

или по вставке $\dot{u}$ и $\dot{v}$ из (27)

$$\partial^2 \sqrt{k} \cos \psi = \frac{1}{v-u} \frac{\varphi(v) \varphi_1(u) + \varphi(u) \varphi_1(v)}{\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) - (c^2 + u)(c^2 + v)}}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \sqrt{(c^2 + \sigma)(\partial^2 - \sigma)}, \\ \varphi_1(\sigma) &= \sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)(j\sigma - g\partial^2)}. \end{aligned}$$

В формулу (31), собственно, должно бы было входить произвольное постоянное, но оно поглощено выбором неподвижных осей: ось $\Omega\eta$ совпадает по направлению с неизменно направленным главным моментом количества движения шара.

Обратимся к определению координат ξ и η точки прикосновения шара к плоскости, по которой он катится. Для этой цели мы имеем следующие легко выводимые соотношения:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \frac{d\eta}{dt} &= -\rho \sum P \frac{d\gamma}{dt} = -\rho \sum L_P \frac{d\gamma}{dt}, \\ \sqrt{n} \frac{d\xi}{dt} &= \rho \sum (R\gamma' - Q\gamma'') \frac{d\gamma}{dt} = \rho \sum (R\gamma' - Q\gamma'')(r\gamma' - q\gamma''). \end{aligned} \quad (32)$$

Последнее легко приводится к виду

$$\sqrt{n} \frac{d\xi}{dt} = \rho(pP + qQ + rR) - \rho(pr + q\gamma' + r\gamma'')(P\gamma + Q\gamma' + R\gamma''),$$

что вследствие (8) и (9) при $h = 0$ дает

$$\sqrt{n} \frac{d\xi}{dt} = \rho l,$$

откуда

$$\xi - \xi_0 = \frac{\rho l}{\sqrt{n}} t. \quad (33)$$

Мы получаем, таким образом, интересный результат: *центр тяжести шара перемещается равномерно в направлении, перпендикулярном к главному моменту*. Этого не было бы в общем случае, если бы главный момент имел вертикальную составляющую.

Преобразуя формулу для определения η , получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{2} \frac{d\eta}{dt} &= - \frac{\rho xyz}{a^3 b^3 c^3} \sum \frac{x^2}{a^4} \sum \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right) \frac{dx}{xdt}, \\ &- 2\sqrt{k} \frac{d\eta}{dt} = \\ &= \frac{\rho \sqrt{-s(u)s(v)}}{\delta uv} i\dot{v} \sum \left[\frac{u(b^2 - c^2)}{(b^2 + u)(c^2 + u)(a^2 + v)} + \frac{v(b^2 - c^2)}{(b^2 + v)(c^2 + v)(a^2 + u)} \right], \end{aligned}$$

или, по выполнении суммирования,

$$2\sqrt{k} \frac{d\eta}{dt} = + \frac{p(u-v)^2 \dot{u}\dot{v}}{uv \sqrt{-s(u)s(v)}};$$

а отсюда при помощи (25), (27), (28) имеем окончательно

$$2\sqrt{k} (\eta - \eta_0) = \rho \int \sqrt{(-ju + g\partial^2)(jv - g\partial^2)} d\tau. \quad (34)$$

§ 3. Общий случай движения шара. Перейдем к рассмотрению того случая, когда h , вертикальная составляющая главного момента, есть произвольная величина; мы покажем, что формулы предшествующего параграфа с легкими видоизменениями в них разрешают задачу и при общей ее постановке. Обратимся к формулам [(1) и (2)] § 1 и положим в них

$$\begin{aligned} P &= \mu' \gamma_1 + \mu P_1, & \gamma &= \lambda' \gamma_1 + \lambda P_1, \\ Q &= \mu' \gamma'_1 + \mu Q_1, & \gamma' &= \lambda' \gamma'_1 + \lambda Q_1, \\ R &= \mu' \gamma''_1 + \mu R_1, & \gamma'' &= \lambda' \gamma''_1 + \lambda R_1; \end{aligned} \quad (35)$$

подберем постоянные λ , λ' , μ , μ' так, чтобы вследствие интегралов (8) имели место соотношения

$$P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2 = n_1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 = 1, \quad P_1 \gamma_1 + Q_1 \gamma'_1 + R_1 \gamma''_1 = 0. \quad (36)$$

Для этого определяемые количества должны удовлетворять уравнениям

$$\mu'^2 + \mu^2 n_1 = n, \quad \lambda'^2 + \lambda^2 n_1 = 1, \quad \lambda' \mu' + \lambda \mu n_1 = h. \quad (37)$$

Интеграл (10), т. е.

$$ZX - Y^2 = 0,$$

где X , Y , Z определяются формулами (5) и (14), может быть переписан в раскрытой форме так:

$$\sum \frac{(Q\gamma'' - R\gamma')^2}{BC} - l \sum \frac{\gamma^2}{A} - \frac{1}{D} \sum \frac{P^2}{A} + \frac{l}{D} = 0;$$

но по (35)

$$\gamma' R - \gamma'' Q = (\lambda' \mu - \mu' \lambda) (\gamma_1 R_1 - \gamma_1'' Q_1);$$

а потому исследуемый интеграл по введении переменных $P_1, Q_1, \dots$ переписывается в форме

$$\begin{aligned} (\lambda' \mu - \mu' \lambda)^2 \sum \frac{(Q_1 \gamma_1'' - R_1 \gamma_1')^2}{BC} - \left(l \lambda'^2 + \frac{\mu'^2}{D} \right) \sum \frac{\gamma_1^2}{A} - \\ - \left(l \lambda^2 + \frac{\mu^2}{D} \right) \sum \frac{P_1^2}{A} - 2 \left(l \lambda' \lambda + \frac{\mu \mu'}{D} \right) \sum \frac{\gamma_1 P_1}{A} + \frac{l}{D} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что если постоянные λ , λ' , μ , μ' будут удовлетворять

уравнениям

$$\begin{aligned}(\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 l_1 &= l\lambda'^2 + \frac{\mu^2}{D}, \\(\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{1}{D_1} &= l\lambda^2 + \frac{\mu^2}{D}, \\l\lambda'\lambda + \frac{\mu\mu'}{D} &= 0, \quad (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{l_1}{D_1} = \frac{l}{D},\end{aligned}\quad (38)$$

то между новыми переменными будет также существовать соотношение

$$Z_1 X_1 = Y_1^2, \quad (39)$$

в котором

$$X_1 = \frac{1}{D_1} - \sum \frac{\gamma_1^2}{A}, \quad Y_1 = \sum \frac{P_1 \gamma_1}{A}, \quad Z_1 = l_1 - \sum \frac{\rho_1^2}{A}. \quad (40)$$

Легко убедиться, что последнее из соотношений (38) есть следствие первых трех; что касается двух первых, то они определяют новые постоянные l_1 и D_1 . Для отыскания λ , λ' , ... мы имеем из (37) и (38) следующие три уравнения:

$$\begin{aligned}h\lambda - \mu &= \lambda' (\lambda\mu' - \mu\lambda'), \\h\mu - \lambda n &= -\mu' (\lambda\mu' - \mu\lambda'), \\lD\lambda\lambda' + \mu\mu' &= 0,\end{aligned}$$

которые дают

$$\begin{aligned}\mu &= \lambda f, \quad f^2 - \frac{n-lD}{h} f - lD = 0, \\[n - h^2 + (h-f)^2] \lambda'^2 &= (h-f)^2, \\\frac{\lambda'}{\mu'} &= \frac{h-f}{n-hf}, \\\lambda\mu' - \mu\lambda' &= \lambda \sqrt{n-h^2 + (h-f)^2} = \frac{(h-f)\lambda}{\lambda'}.\end{aligned}\quad (41)$$

Далее легко находим

$$\lambda^2 l_1 = \frac{(f-h)l}{f[n-h^2+(h-f)^2]}, \quad \lambda^2 n_1 = \frac{n-h^2}{n-h^2+(h-f)^2}, \quad D_1 = \frac{f-h}{f} D.$$

Квадратное уравнение для f определяет два действительных значения этого количества; легко показать, что соответствующие им направления γ_1 , γ_1' , γ_1'' взаимно перпендикулярны; в этом убеждаемся, составив косинус угла между указанными направлениями; легко находим, что он пропорционален величине

$$f_1 f_2 + n - h(f_1 + f_2);$$

а это выражение равно нулю, ибо

$$f_1 f_2 = -lD, \quad f_1 + f_2 = \frac{n - lD}{h}.$$

Таким образом, два решения квадратного уравнения приводят нас к двум сторонам некоторого прямого угла, и если по одной из них направится вектор $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2$, то по другой пойдет вектор P_1, Q_1, R_1 . Отсюда ясно, что эти векторы должны описывать в теле шара конусы аналогичного характера.

Обратимся к выражениям компонентов угловой скорости через новые переменные $P_1, Q_1, \dots$. Составим прежде всего выражения X, Y, Z через X_1, Y_1, Z_1 . Уравнения (35) и (40) дают

$$X = \frac{1}{D} - \sum \frac{\gamma^2}{A} = \frac{1}{D} + \lambda^2 \left(X_1 - \frac{1}{D_1} \right) + \lambda^2 (Z_1 - l_1) - 2\lambda\lambda' Y_1,$$

$$Y = \sum \frac{P\gamma}{A} = -\lambda'\mu' \left(X_1 - \frac{1}{D_1} \right) - \lambda\mu (Z_1 - l_1) + (\lambda'\mu + \mu'\lambda) Y_1.$$

Но первые три из уравнений (38) дают

$$\frac{\lambda^2}{D_1} + \lambda^2 l_1 = \frac{1}{D}, \quad \frac{\lambda'\mu'}{D_1} + \lambda\mu l_1 = 0;$$

поэтому, приняв в расчет (39), получаем

$$X = \frac{(\lambda' X_1 - \lambda Y_1)^2}{X_1}, \quad Y = - \frac{(\lambda' X_1 - \lambda Y_1)(\mu' X_1 - \mu Y_1)}{X_1} \quad (42)$$

и затем

$$Z = \frac{Y^2}{X} = \frac{(\mu' X_1 - \mu Y_1)^2}{X_1}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, имеем по формулам (6)

$$Ap = P + \gamma \frac{Y}{X} = \frac{(\lambda\mu' - \lambda'\mu) X_1}{\lambda Y_1 - \lambda' X_1} \left(P_1 + \gamma_1 \frac{Y_1}{X_1} \right);$$

или, положив

$$\frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda Y_1 - \lambda' X_1} X_1 = \varphi, \quad (43)$$

$$Ap = \varphi \left(P_1 + \gamma_1 \frac{Y_1}{X_1} \right), \quad Bq = \varphi \left(Q_1 + \gamma_1' \frac{Y_1}{X_1} \right), \quad Cr = \varphi \left(R_1 + \gamma_1'' \frac{Y_1}{X_1} \right).$$

Если мы определим коэффициенты L_1, M_1, N_1 равенствами ⁷

$$L_1 + D_1 = L + D = A,$$

$$M_1 + D_1 = B,$$

$$N_1 + D_1 = C$$

⁷ При помощи (41) легко показать, что постоянные можно определить так, чтобы Z_1, M_1, N_1 были положительны.

и в очевидных следствиях уравнений (7)

$$\frac{dP_1}{dt} = rQ_1 - qR_1, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma'_1 - q\gamma''_1$$

положим

$$p = \varphi p_1, \quad q = \varphi q_1, \quad r = \varphi r_1, \quad dt_1 = \varphi dt, \quad (44)$$

то убеждаемся в полном тождестве системы дифференциальных уравнений, связывающих новые переменные, с прежнею системою (7). Их алгебраические интегралы (36) и (39) имеют тот самый вид, который мы исследовали в § 2. Поэтому аналитические последствия этих интегралов, найденные нами и изложенные в этом параграфе, остаются справедливыми. Таким образом, мы опять приходим к формулам (15) — (30) с тою разницею, что количества без значка, входящие в эти формулы, заменяются количествами со значком единица внизу. Зависимость времени от вспомогательного переменного τ_1 определится на основании последней из формул (44) так:

$$\varphi dt = dt_1 = \sqrt{(\partial_1^2 - u)(\partial_1^2 - v)} d\tau_1, \quad (45)$$

причем на основании формулы (6)

$$\varphi = \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda Y_1 - \lambda' X_1} X_1 = \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{D_1\lambda\omega_1 - \lambda'}. \quad (46)$$

Что касается ω_1 , то оно определяется по (16) следующим образом [8]:

$$\omega_1 \sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{xyz}{a^3 b^3 c^3} \sum a^2 \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right),$$

или, по замене x, y, z их выражениями,

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{s(v)s_1(u)} + \sqrt{s(u)s_1(v)}}{2(v-u)\sqrt{(\partial^2 - u)(\partial^2 - v)}},$$

где

$$s(\sigma) = (a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)(c^2 + \sigma),$$

$$s_1(\sigma) = (g\partial^2 - j\sigma)(\partial^2 - \sigma);$$

значки (единицы внизу) опущены для простоты письма.

За неподвижную ось $\Omega\xi$ примем по-прежнему вертикаль, за ось $\Omega\eta$ — направление, параллельное проекции главного момента на плоскость, по которой катится шар; этим определяется и ось $\Omega\xi$. В таком случае угол ψ определится, аналогично § 2, формулой

$$\sqrt{n - h^2} \cos \psi = \frac{P\gamma' - Q\gamma}{\sqrt{\gamma'^2 + \gamma'^2}};$$

но

$$P\gamma' - Q\gamma = (\lambda\mu' - \mu\lambda')(P_1\gamma'_1 - Q_1\gamma_1);$$

а поэтому мы приходим в результате к формуле, которая получится из (31)

заменю $\sqrt{h}$ и ∂^2 через $2\sigma^2\sqrt{n-h^2}$ и ∂_1^2 и умножением правой части на величину

$$\frac{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \gamma'^2}},$$

которую легко выразить через u и v .

Что касается производных от координат точки прикосновения, то они определяются формулами, отличающимися от (32) § 2 только заменю $\sqrt{n}$ через $\sqrt{n-h^2}$. По упрощении мы получим

$$\begin{aligned}\sqrt{n-h^2} \frac{d\xi}{dt} &= \rho(l - \omega h) = \rho \left(l + \frac{\mu\omega_1 - \mu'}{D(\lambda\omega_1 - \lambda')} h \right), \\ \sqrt{n-h^2} \frac{d\eta}{dt} &= -\rho\mu\lambda' \sum P_1 \frac{d\gamma_1}{dt};\end{aligned}$$

в первом из этих соотношений приняты в расчет формулы (42) и равенство $DX\omega = Y$.

На этот раз ξ изменяется неравномерно; шар катится в направлении, перпендикулярном к главному моменту, периодически то ускоряясь, то замедляясь. Изменение же координаты η определяется совершенно так, как и в случае горизонтальности главного момента. Мы опять получим формулу

$$2\sigma^2 \sqrt{n-h^2} (\eta - \eta_0) = \mu\lambda' \rho \int \sqrt{(-ju + g\partial^2)(jv - g\partial^2)} d\tau, \quad (47)$$

отличающуюся от формулы (34) лишь постоянным множителем (значки единицы внизу опущены). Формула для ξ может быть через посредство (45) и (46) представлена в форме

$$\sqrt{n-h^2} (\xi - \xi_0) = \rho \left(l + f \frac{h}{D} \right) t - \rho \frac{h}{\lambda D} t_1,$$

где

$$t_1 = \frac{\lambda\mu' - \mu\lambda'}{\lambda\omega_1 - \lambda'}.$$

§ 4. Геометрическое истолкование движения. Чтобы выяснить с геометрической точки зрения ход движения, докажем следующую теорему: *при самом общем предположении относительно начальных данных две прямые, неизменно направленные в пространстве и проходящие через точку прикосновения шара к плоскости, прикасаются во все время движения к двум поверхностям второго порядка, принадлежащим шару (каждая прямая к своей поверхности).* Эта теорема весьма просто вытекает из рассмотрения геометрического значения интеграла живой силы, который, как было показано в § 1, может быть приведен к виду (10); в раскрытой форме это равенство имеет вид

$$\left(\sum \frac{P^2}{A} - l \right) \left(\sum \frac{\gamma^2}{A} - \frac{1}{D} \right) - \left(\sum \frac{\gamma\gamma'}{A} \right)^2 = 0.$$

Умножим это уравнение на $H^2\rho^2$, положим

$$\begin{aligned} -\rho\gamma &= x', & -\rho\gamma' &= y', & -\rho\gamma'' &= z', \\ HP &= x'', & HQ &= y'', & HR &= z'' \end{aligned}$$

и определим количества H и s так, чтобы выполнялись соотношения

$$H^2(l + sn) = \rho^2 \left(\frac{1}{D} + s \right) = -Hh\rho s. \quad (48)$$

Тогда вышеприведенный интеграл может быть переписан в форме

$$\left(\frac{x'^2}{A_1} + \frac{y'^2}{B_1} + \frac{z'^2}{C_1} - 1 \right) \left(\frac{x''^2}{A_1} + \frac{y''^2}{B_1} + \frac{z''^2}{C_1} - 1 \right) - \left(\frac{x'x''}{A_1} + \frac{y'y''}{B_1} + \frac{z'z''}{C_1} - 1 \right)^2 = 0, \quad (49)$$

где

$$A_1 = \rho^2 \frac{\frac{1}{D} + s}{\frac{1}{A} + s};$$

подобными же формулами определяются B_1 и C_1 .

Уравнение (49) показывает, что точка x'', y'', z'' лежит на поверхности конуса, облегающего неизменно соединенную с шаром поверхность

$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \frac{z^2}{C_1} - 1 = 0 \quad (50)$$

и имеющего вершину в точке x', y', z' прикосновения шара к плоскости. Таким образом, прямая, соединяющая точки x', y', z' и x'', y'', z'' , будет одною из образующих этого конуса и, следовательно, коснется поверхности (50); а так как

$$\begin{aligned} x'' - x' &= HP + \rho\gamma, & y'' - y' &= HQ + \rho\gamma', \\ z'' - z' &= HR + \rho\gamma'' \end{aligned}$$

и векторы P, Q, R и $\gamma, \gamma', \gamma''$ имеют неизменное направление в пространстве, то и отмеченная нами образующая конуса будет обладать этим свойством. Так как формулы (48) дают для определения s квадратное уравнение

$$(l + sn) \left(\frac{1}{D} + s \right) - h^2 s^2 = 0, \quad (51)$$

то мы получаем две поверхности вида (50); к ним будет прикасаться неизменный угол с вершиною в точке прикосновения. Составим выражение косинуса этого угла; оно будет иметь числителем величину

$$J = H_1 H_2 n + \rho^2 + (H_1 + H_2) h\rho,$$

где H_1 и H_2 суть величины H , соответствующие двум корням уравнения

(51); но по (48)

$$H = -\frac{\rho}{h} \left(\frac{1}{Ds} + 1 \right),$$

а потому

$$J = \rho^2 \left\{ \frac{n}{h^2} \frac{1}{D^2 s_1 s_2} + \frac{n-h^2}{h^2} \left(\frac{1}{Ds_1} + \frac{1}{Ds_2} \right) + \frac{n-h^2}{h^2} \right\}.$$

Воспользовавшись уравнением (51), убеждаемся, что $J = 0$, и, следовательно, *исследуемый угол — прямой*.

Нетрудно обнаружить, что две стороны этого угла совпадают с направлением γ_1 , γ_1' , γ_1'' и P_1 , Q_1 , R_1 § 4. В самом деле, из формул (35) имеем

$$\gamma_1 (\lambda \mu' - \mu \lambda') = \mu \left[\frac{P}{f} - \gamma \right],$$

где f определяется по второму уравнению группы (41); а введя H в равенство (6) на место s , получим [v]

$$\frac{\rho^2}{H^2} + \frac{n-lD}{h} \frac{\rho}{H} - lD = 0;$$

из сравнения этого уравнения с вышеупомянутым уравнением для f находим

$$\frac{H}{\rho} = -\frac{1}{f};$$

следовательно, количества $HP + \rho\gamma$, $HQ + \rho\gamma'$, $HR + \rho\gamma''$ пропорциональны γ_1 , γ_1' , γ_1'' .

Покажем теперь что две поверхности (50) всегда реальны. Для сего заметим, что корни уравнения (51) действительны и разделены величинами $-\frac{1}{D}$ и $-\frac{l}{n}$. Поэтому для меньшего из них s_1 мы будем иметь (полагая по-прежнему $A < B < C$)

$$\frac{1}{D} + s_1 < 0, \quad \frac{1}{A} + s_1 = \frac{1}{L+D} - \frac{1}{D} + \frac{1}{D} + s_1 < 0,$$

$$A_1 > B_1 > C_1 > 0, \quad \rho^2 - A_1 > 0;$$

таким образом, одна из поверхностей (50) будет эллипсоид, лежащий внутри шара. Что касается второй поверхности, то она представляет гиперболоид. Чтобы убедиться в этом, замечаем, прежде всего, неравенство

$$\frac{1}{D} + s_2 > 0;$$

затем докажем справедливость неравенств

$$\frac{1}{A} + s_2 > 0, \quad \frac{1}{C} + s_2 < 0. \quad (52)$$

Для этой цели вставим в левую часть уравнения (51) по умножении его

на A^2D вместо s величину $-1/A$; заменив затем n, h, l их выражениями через $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ и помня равенства

$$A = L + D, \quad B = M + D, \quad C = N + D,$$

легко приведем результат к виду

$$L(M + D)(L - M)q^2 + L(N + D)(L - N)r^2 - \\ - D[(L - M)q\gamma' + (L - N)r\gamma'']^2.$$

Так как $L < M < N$, то эта величина отрицательна; следовательно, $-\frac{1}{A}$ должно лежать между корнями уравнения (49), откуда и вытекает первое из неравенств (52). Если бы L был наибольший момент инерции, то вышеприведенное выражение было бы положительно, ибо его можно представить еще в виде

$$MA(L - M)q^2 + NA(L - N)r^2 + D(L - M)^2q^2\gamma^2 + \\ + D(L - N)^2r^2\gamma^2 + D[(L - M)q\gamma'' - (L - N)r\gamma']^2.$$

Это рассуждение убеждает нас в справедливости неравенства (52). Таким образом, для второй из поверхностей (50) будем иметь

$$A_1 > 0, \quad C_1 > 0.$$

Эта поверхность всеми своими точками лежит вне шара.

Все приведенные соображения справедливы, если h не есть нуль. В этом частном случае доказанная теорема неприменима. Но тогда интеграл живой силы можно изобразить либо в виде

$$\sum \frac{l^2}{A^2} \left(\sum \frac{\rho^2 \gamma^2}{A_2} - 1 \right) - \left(\sum \frac{P\gamma\rho}{A_2} \right)^2 = 0, \quad (53)$$

если мы примем

$$A_2 = \rho^2 \frac{\frac{1}{D} - \frac{l}{n}}{\frac{1}{A} - \frac{l}{n}}$$

и подобные, либо в виде

$$\sum \left(\frac{H^2 P^2}{A_3} - 1 \right) \sum \frac{\gamma^2}{A_3} - \left(\sum \frac{HP\gamma}{A_3} \right)^2 = 0,$$

положив

$$A_3 = H^2 \frac{l - \frac{n}{D}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{D}}$$

и подобные. Первое из этих уравнений показывает, что вектор, изображающий главный момент, проведенный через точку прикосновения шара

к плоскости, прикасается к поверхности

$$\frac{x^2}{A_2} + \frac{y^2}{B_2} + \frac{z^2}{C_2} = 1;$$

из второго следует, что вертикальная прямая, проведенная через точку HP , HQ , HR , касается поверхности, выражаемой уравнением

$$\frac{x^2}{A_3} + \frac{y^2}{B_3} + \frac{z^2}{C_3} = 1. \quad (54)$$

Доказанными теоремами в значительной мере выясняется картина исследуемого движения. Полученные результаты можно еще сформулировать так: в общем случае (h не нуль) существует некоторый прямоугольник с неизменными по величине и направлению сторонами, остающийся все время вписанным в шар и имеющий одну из вершин в точке прикосновения; этот прямоугольник двумя парами своих противоположных сторон прикасается соответственно к двум поверхностям (50); этим обстоятельством и интегралом (9) § 1, выражающим постоянство проекции угловой скорости на главный момент, вполне определяется ход движения; если $h=0$, то описанный около шара квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами прикасается первыми к поверхности (54); вторыми — к поверхности (52); вследствие уравнения (33) этот квадрат перемещается в направлении, перпендикулярном к его плоскости, с постоянной скоростью.

Скажем еще два слова о кривых, описываемых на поверхности шара некоторыми неизменно направленными прямыми, и о виде пути центра тяжести шара. Если главный момент горизонтален, то проще всего уясняется характер кривой, описываемой на шаре точкою прикосновения. Нетрудно убедиться из формул (27), что эта кривая будет волнообразная и что она прикасается поочередно к двум ветвям кривой пересечения сферы с некоторым конусом второго порядка, имеющим вершину в центре шара. На горизонтальной плоскости точка прикосновения описывает также волнообразную кривую; точка будет приходиться одновременно в вершины этих волн и на сферический эллипс, ограничивающий ее геометрическое место на шаре (формула (34)).

В общем случае на поверхности шара того же самого вида кривую вычертит точка p_1 , p_1 , p_1 (§ 4). Эта точка, как было показано выше, представляет один из концов диаметра, параллельного одной из сторон направляющего вписанного прямоугольника. Характер пути центра тяжести останется примерно таким же, как и в частном случае (формула (47)).

§ 5. Простейшие частные случаи движения. Отметим некоторые случаи, когда характер движения особенно прост. Начнем с предположения $h=0$. Упрощение может возникнуть благодаря дегенерации гиперэллиптических интегралов формул (29). Оставляя в стороне предположение возможного равенства двух или всех трех главных моментов инерции, так как при таких обстоятельствах задача о движении шара была исследована ранее (см. введение), мы разберем лишь влияние частного характера

начальных условий; упрощение возникает, если количество $-\frac{g\partial^2}{i}$ (формула (30)) приобретает значения a^2 , c^2 или b^2 , причем мы полагаем по-прежнему

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

Легко убедиться, что при действительном движении в случаях

$$ja^2 = -g\partial^2, \quad jc^2 = -g\partial^2,$$

соответственно должны соблюдаться равенства

$$v = -a^2 = \text{const}, \quad u = -c^2 = \text{const}.$$

Это — случаи такого качения шара, при котором ось OX или ось OZ (оси центрального эллипсоида инерции) сохраняет неизменное горизонтальное направление. Движения эти будут устойчивы.

Если $jb^2 = -g\partial^2$, то u и v будут оба изменяться, стремясь к значению $-b^2$; шар в конце концов будет катиться, сохраняя неизменное направление оси OY . Это движение неустойчиво.

Перейдем к предположению h , отличного от нуля. Легко увидеть, что и при таких обстоятельствах возможно такое качение шара, при котором одна из осей инерции сохраняет неизменное направление в пространстве, на этот раз не горизонтальное. Но, кроме того, здесь представляется и совершенно особый частный случай; этот случай — исключительный и выделяется тем, что при соответствующих ему (и только ему) начальных данных неприложим анализ § 3. Поэтому мы разберем его подробнее. Он получается при условии вертикального направления главного момента. Обратимся к формулам (2) § 1 и положим в них

$$P = h\gamma, \quad Q = h\gamma', \quad R = h\gamma'';$$

тогда интегралы (8) сводятся к одному:

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1;$$

из уравнения же живой силы найдем

$$\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} = k, \quad (55)$$

где k — постоянное. Для компонентов угловой скорости имеем на основании (6)

$$Ap = \gamma \left[h + \frac{hkD}{1 - kD} \right] = l\gamma, \quad Bq = l\gamma', \quad Cr = l\gamma'', \quad l(1 - kD) = h. \quad (56)$$

Система дифференциальных уравнений задачи представится уравнениями Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq.$$

Не вдаваясь в дальнейшие выкладки, укажем любопытную геометрическую интерпретацию этого движения. С этой целью введем в рассмотрение точку, координаты которой определяются формулами

$$xl = \lambda p - \rho l\gamma, \quad yl = \lambda q - \rho l\gamma', \quad zl = \lambda r - \rho l\gamma''; \quad (57)$$

постоянное λ подбираем так, чтобы оно превосходило величины $C\rho$, $B\rho$, $A\rho$ и $\frac{\rho}{k}$. Из формул (55) и (56) следует, что проекция радиуса-вектора этой точки на вертикаль сохраняет постоянную величину, а потому наша точка остается в неизменной горизонтальной плоскости. Внутри тела она перемещается по поверхности эллипсоида

$$\frac{\frac{x^2}{\lambda} - \rho}{A - \rho} + \frac{\frac{y^2}{\lambda} - \rho}{B - \rho} + \frac{\frac{z^2}{\lambda} - \rho}{C - \rho} = \lambda k - \rho, \quad (58)$$

в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись вышеприведенными формулами. Но легко видеть, что поверхность эта в точке (x, y, z) будет касаться горизонтальной плоскости. Заметим, наконец, что если в уравнениях (57) мы примем x, y, z за текущие координаты, то эти уравнения определяют при изменении λ мгновенную ось вращения. Из сказанного ясно, что движение будет происходить следующим образом: шар своею поверхностью без скольжения катится по одной горизонтальной плоскости, а принадлежащим ему эллипсоидом (58) — по другой. Мгновенная угловая скорость пропорциональна длине отрезка оси вращения, заключенного между точками касания шара и эллипсоида к плоскостям,

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИМЕЧАНИЯ

Примечание [1] к стр. 50.

Мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} &= \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta}{2} i}}{e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) i}} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2} i}. \end{aligned}$$

Но при $\theta > 0$ и при $\theta < 0$ мы соответственно находим

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}},$$

и, следовательно,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} e^{-\frac{\pi}{2} i} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} e^{\pm \frac{\pi}{2} i}.$$

Далее, по определению логарифма комплексного числа z , мы получаем

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Следовательно,

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} e^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \pm \frac{\pi}{2} i,$$

откуда и получается

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \pm \frac{\pi}{2};$$

верхний знак берется при $\theta > 0$, нижний знак — при $\theta < 0$.

Примечание [2] к стр. 160.

При $u = \infty$ формула для радиуса кривизны на стр. 159—160 переходит в следующую:

$$R = \frac{\gamma^2 a \sin 2\tau}{\cos \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) + \sin \tau \sin \delta (1 - \gamma^2) - 2\gamma \varepsilon}. \quad (\text{a})$$

Но на основании формулы (29) мы находим

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{(1 + \gamma^2) \cos \tau}{\sqrt{(1 + \gamma^2) \cos^2 \tau + (1 - \gamma^2)^2 \sin^2 \tau}} ,$$

$$\sin \delta = \cos \delta \operatorname{tg} \delta = \frac{(1 - \gamma^2) \sin \tau}{\sqrt{(1 + \gamma^2)^2 \cos^2 \tau + (1 - \gamma^2)^2 \sin^2 \tau}} .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) + \sin \tau \sin \delta (1 - \gamma^2) &= \\ &= \frac{(1 + \gamma^2)^2 \cos^2 \tau + (1 - \gamma^2)^2 \sin^2 \tau}{\sqrt{(1 + \gamma^2)^2 \cos^2 \tau + (1 - \gamma^2)^2 \sin^2 \tau}} = \sqrt{1 + \gamma^4 + 2\gamma^2 \cos 2\tau} . \end{aligned}$$

На этом основании формула (а) переходит в ту, которая приведена в тексте на стр. 160:

$$R = \frac{\gamma^2 \alpha \sin 2\tau}{\sqrt{1 + \gamma^4 + 2\gamma^2 \cos 2\tau - 2\gamma s}} .$$

Примечание [3] к стр. 176.

Положив

$$\xi = \frac{1}{E} ,$$

мы получим из формулы (51)

$$\frac{1}{Q} = \xi - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \operatorname{tg} \frac{L}{2} \operatorname{ctg} N - \operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}} .$$

Отсюда мы найдем

$$\frac{d\left(\frac{1}{Q}\right)}{d\xi} = 1 - \frac{\xi - \operatorname{tg} \frac{L}{2} \operatorname{ctg} N}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi \operatorname{tg} \frac{L}{2} \operatorname{ctg} N - \operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}}} .$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left(\xi - \operatorname{tg} \frac{L}{2} \operatorname{ctg} N\right)^2 - \left(\xi^2 - 2\xi \operatorname{tg} \frac{L}{2} \operatorname{ctg} N - \operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}\right) &= \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{L}{2} (\operatorname{ctg}^2 N + 1) = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}}{\sin^2 N} . \end{aligned}$$

Примечание [4] к стр. 273.

По первой из формул (15) на стр. 268 мы находим

$$q = \frac{\alpha + \gamma}{4} ,$$

а по третьей из формул (23) на стр. 273 получаем

$$\varepsilon = \frac{\beta}{4} + \delta .$$

Поэтому

$$\delta + q + \varepsilon = \delta + \frac{\alpha + \gamma}{4} + \frac{\beta}{4} + \delta = \sigma + \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\alpha}{4} - \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right),$$

или

$$\sigma + q + \varepsilon = \tau - \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right).$$

Отсюда мы находим

$$\begin{aligned} N'' &= \frac{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \sin \left[\tau - \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \right] \cdot \sqrt{1 - \lambda}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \tau} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \cdot \sqrt{1 - \lambda}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) - \operatorname{ctg} \tau \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \right]. \end{aligned}$$

На этом основании условие

$$N'' \geq 1$$

принимает вид

$$\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) - \operatorname{ctg} \tau \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \geq \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \cdot \sqrt{1 - \lambda}},$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \tau &\leq \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \left[1 - \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \cdot \sqrt{1 - \lambda}} \right] = \\ &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \cdot (1 - g). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \tau \geq \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right)}{1 - g}.$$

Примечание [5] к стр. 374.

Из уравнения (26) на стр. 372 мы находим

$$[A + M(\xi^2 + \zeta^2)] q^2 = [c^2 - 2Mg\rho(1 - l \sin x)] - [Ap^2 + Br^2 + M(r\xi - p\zeta)^2],$$

где

$$q = -\frac{d\alpha}{dt}$$

[формула (17) на стр. 367]. Умножив это равенство на $\cos^2 \alpha = 1 - u^2$, мы получим

$$\begin{aligned} [A + M(\xi^2 + \zeta^2)] \dot{u}^2 &= (1 - u^2) [c^2 - 2Mg\rho(1 - lu)] - \\ &\quad - (1 - u^2) [Ap^2 + Br^2 + M(r\xi - p\zeta)^2]. \end{aligned}$$

Это другой вид уравнения (27). Отсюда

$$K = (1 - u^2) [Ap^2 + Br^2 + M(r\xi - p\xi)^2].$$

Далее, K приводится к виду

$$K = a^2 \{A + M\rho^2(l - u)^2\} + M\rho^2 b^2 \{1 - u^2 + m^2(l - u)^2\} - \\ - 2abM\rho^2(l - u) \sqrt{\frac{B}{M\rho^2} + 1 - u^2 + m^2(l - u)^2}.$$

Следовательно, K имеет нуль при ± 1 при условии

$$a^2 \{A + M\rho^2(1 \mp l)^2\} + M\rho^2 b^2 m^2 (1 \mp l)^2 \pm \\ \pm 2abM\rho^2(1 \mp l) \sqrt{\frac{B}{M\rho^2} + m^2(1 \pm l)^2} = 0. \quad (a)$$

Но

$$\sqrt{\frac{B}{M\rho^2} + m^2(1 \mp l)^2} = \sqrt{\frac{Am^2}{M\rho^2} + m^2(1 \pm l)^2},$$

а потому уравнение (а) можно написать в виде

$$[a \sqrt{A + M\rho^2(1 \mp l)^2} \pm b \sqrt{M\rho^2} m(1 \mp l)]^2 = 0,$$

откуда и следуют уравнения (29) и (30).

Примечание [6] к стр. 374.

Это будет иметь место, если линии

$$y = f(u) \text{ и } y = K(u)$$

касаются в точке, лежащей в интервале

$$-1 \leq u \leq 1.$$

Примечание [7] к стр. 400.

Положив

$$p' - p \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) = P, \quad q' - q \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) = Q, \quad (a)$$

$$r' - r \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) = R,$$

напишем уравнения (14) в виде

$$Q\xi + Ry = \frac{b}{\rho} \frac{dx}{dt}, \quad Rx + P\xi = -\frac{b}{\rho} \frac{dv}{dt}, \quad (б)$$

$$Py - Qx = \frac{b}{\rho} \frac{d\xi}{dt},$$

причем

$$b^2 = x^2 + y^2 + \xi^2$$

и

$$-\xi = z - a$$

[уравнения (15) на стр. 396 и уравнение (26) на стр. 398]. Кроме того, согласно формуле (24) на стр. 397 мы получаем

$$\sigma = Px + Qy + R(z - a) = Px + Qy - R\xi.$$

Из уравнений (6) мы находим

$$\frac{b}{\rho} \left(\frac{d\xi}{dt} y - \xi \frac{dy}{dt} \right) = P(\xi^2 + y^2) + x(R\xi - Qy),$$

или

$$\frac{b}{\rho} \left(\frac{d\xi}{dt} y - \xi \frac{dy}{dt} \right) = P(\xi^2 + y^2) + x(Px - \sigma);$$

иначе

$$\frac{b}{\rho} \left(\frac{d\xi}{dt} y - \xi \frac{dy}{dt} \right) P(x^2 + y^2 + \xi^2) - x\sigma.$$

Следовательно, мы получаем

$$P = \frac{x}{b^2} \sigma + \frac{x}{\rho b} \left(y \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{dy}{dt} \right)$$

и аналогичное выражение для Q . Подставив полученные выражения для P и Q в формулы (а), мы получим равенства (32).

Примечание [8] к стр. 421.

Из уравнений (16) на стр. 412, т. е.

$$pH = N\gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} - M\gamma' \frac{d\gamma''}{dt},$$

$$qH = L\gamma \frac{d\gamma''}{dt} - N\gamma'' \frac{d\gamma}{dt},$$

$$rH = M\gamma' \frac{d\gamma}{dt} - L\gamma \frac{d\gamma'}{dt},$$

после умножения соответственно на γ , γ' , γ'' и сложения мы получим

$$(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'') H = \sum \left(N\gamma\gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} - M\gamma\gamma' \frac{d\gamma''}{dt} \right), \quad (a)$$

где

$$H = L\gamma^2 + M\gamma'^2 + N\gamma''^2$$

[формула (17) на стр. 412],

$$La^2\sigma^2 = Mb^2\sigma^2 = Nc^2\sigma^2 = 1, \quad a\gamma = x, \quad b\gamma' = y, \quad c\gamma'' = z$$

[формулы (20) и (21) на стр. 413],

$$p\gamma + q\gamma' + r\gamma'' = \omega$$

[формула (3) на стр. 410]. Введя все указанные обозначения, мы получаем

$$H = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right] = \frac{1}{\sigma^2} \sum \frac{x^2}{a^4},$$

$$\begin{aligned}
N\gamma\gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} - M\gamma\gamma' \frac{d\gamma''}{dt} &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{xz}{abc} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{b^2} \frac{xydz}{dt} \right] = \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \frac{xyz}{abc} \left[\frac{1}{c^2} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{b^2} \frac{1}{2} \frac{dz}{dt} \right] = \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \frac{xyz}{a^3 b^3 c^3} a^2 \left[\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right].
\end{aligned}$$

Подставив найденные значения в уравнение (а), находим

$$\omega_1 \sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{xyz}{a^3 b^3 c^3} \sum a^2 \left(\frac{b^2}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{c^2}{z} \frac{dz}{dt} \right).$$

Примечание [9] к стр. 424.

Из уравнения

$$\rho \left(\frac{1}{D} + s \right) = -Hhs$$

[уравнение (48) на стр. 423] имеем

$$s = -\frac{\rho}{D(\rho + Hh)}.$$

Подставив найденное значение s в уравнение

$$H^2(l + sn) = \rho^2 \left(\frac{1}{D} + s \right)$$

[уравнение (48) на стр. 423], мы получим

$$\frac{\rho^2}{H^2} = \frac{l - \frac{n\rho}{D(\rho + Hh)}}{\frac{1}{D} - \frac{s}{D(\rho + Hh)}},$$

или

$$\frac{\rho^2}{H^2} = \frac{\rho(Dl - n) + HhDi}{Hh},$$

т. е.

$$\frac{\rho^2}{H^2} + \frac{n - Dl}{h} \frac{\rho}{H} - Dl = 0.$$

КОММЕНТАРИИ

К РАБОТЕ «О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ»

Работа «О газовых струях» представляет собой докторскую диссертацию С. А. Чаплыгина.

Первое сообщение о полученных результатах было им сделано на заседании Московского математического общества 20 февраля 1896 г. в докладе «О движении газа с образованием поверхностей разрыва». В декабре 1901 г. Сергей Алексеевич прочел на ту же тему доклад «О струевых течениях газа» на секции математики и механики XI съезда русских естествоиспытателей и врачей. В 1902 г. работа «О газовых струях» была издана отдельным изданием небольшим тиражом, и затем в 1904 г. она была опубликована в «Ученых записках отделения физико-математических наук Московского университета». 26 февраля 1903 г. состоялась ее защита.

Вторично на русском языке эта работа была издана в 1933 г. в Собрании сочинений С. А. Чаплыгина [1], затем в [2] и позднее отдельными изданиями [3, 4].

Краткое содержание работы было опубликовано на немецком языке в 1905 г. [5]. В 1932 г. в «Comptes Rendus» появилось три сообщения [6—8], в которых кратко излагалось содержание работы С. А. Чаплыгина «О газовых струях». Полный перевод этой работы на английском языке появился в 1944 г. [9].

В 1935 г. на конференции в Риме, посвященной большим скоростям в авиации, результаты, полученные в работе «О газовых струях», обсуждались уже во многих докладах [10]. Таким образом, только в 30-х годах работа «О газовых струях» получила широкую известность.

Затем на протяжении более четверти века эта работа служила источником многочисленных исследований в области газовой динамики. Это продолжалось до тех пор, пока чисто аналитические методы решения уравнений Эйлера не были дополнены и в значительной мере заменены мощными и общими численными методами.

Работа «О газовых струях» непосредственно примыкает к классическим теоретическим исследованиям XIX века в области гидродинамики. Эта работа появилась в то время, когда авиация еще только зарождалась и когда только закладывались основы теории газовых машин. Практические задачи, при решении которых учет влияния сжимаемости газа в то время был существенным, главным образом, относились к исследованиям истечения газа через насадки и сопла при больших перепадах давления и к определению сил, действующих на артиллерийские снаряды.

Живой интерес к работе «О газовых струях» возник гораздо позже, когда на повестку дня встало создание реактивной авиации. Скорости самолетов стали приближаться к скорости звука, и влияние сжимаемости воздуха на аэродинамические характеристики крыла стало решающим.

Исследование С. А. Чаплыгина оказалось в центре внимания более чем через 30 лет после его создания. За эти годы работа полностью сохранила свою новизну и мощь развитых в ней методов не была превзойдена.

В начале работы «О газовых струях» С. А. Чаплыгин оценивает влияние сжимаемости газа на изменение его скорости и показывает, что если скорость значительно

меньше скорости звука, то газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость. С. А. Чаплыгин в дальнейшем неоднократно ссылается на эти оценки в своих работах по аэродинамике крыла и, в частности, в своем знаменитом исследовании [11], которое с замечательной работой Н. Е. Жуковского [12] положило начало теории крыла.

В работе «О газовых струях» разработан эффективный метод решения уравнений Эйлера для плоских установившихся потенциальных течений газа, когда скорость частиц нигде не превосходит скорости звука.

Следуя работе [13], С. А. Чаплыгин приводит уравнения движения газа к линейному виду, принимая за его независимые переменные величины скорости и угол, который вектор скорости составляет с некоторым выбранным направлением. В качестве неизвестных функций С. А. Чаплыгин, в отличие от [13], принимает функцию тока и потенциал скорости и получает систему уравнений, носящую теперь его имя. Эта система легко преобразуется к системе, вполне аналогичной уравнениям Коши—Римана, но содержащей коэффициент, зависящий от величины скорости [14]. При малых скоростях этот коэффициент очень близок к единице и уравнение Чаплыгина тогда точно совпадает с уравнением Коши — Римана. При скорости, равной 70% от скорости звука, этот коэффициент равен 0,95; при 80% — равен 0,85 и при скорости, равной скорости звука, обращается в ноль.

С. А. Чаплыгин строит последовательность частных решений своих уравнений, отвечающих источникам различной кратности. Эти решения отличаются от соответствующих решений для несжимаемой жидкости тем, что вместе со степенями величины скорости в них входят гипергеометрические функции скорости. Общее решение получается при суммировании этих частных решений.

Если комплексный потенциал для течения несжимаемой жидкости можно представить в плоскости годографа скорости в виде степенного ряда, затем выделить минимальную часть этого ряда и заменить степени величины скорости соответствующими функциями величины скорости, то, как показывает С. А. Чаплыгин, полученный ряд будет сходиться, если величина скорости потока нигде не превышает скорости звука. Ряды С. А. Чаплыгина представляют собой весьма общее решение уравнений Эйлера. Впоследствии было показано, как можно продолжить эти ряды и за звуковую линию, и они послужили для исследования течений и в трансзвуковой области.

При использовании плоскости годографа скорости в качестве плоскости независимых переменных всегда встает вопрос о поведении найденных решений в физической плоскости и прежде всего вопрос о том — соответствует ли, как это должно быть, данной точке пространства только одно значение вектора скорости.

С. А. Чаплыгин показывает, что если величина скорости нигде не превосходит скорости звука, то построенные им решения отвечают возможному течению газа.

Пользуясь своими рядами, С. А. Чаплыгин решает и подробно исследует две основные задачи теории струй, а именно, обтекание пластинки безграничным потоком, скорость которого вдали от пластинки ортогональна к ней, и задачу истечения газа из полупространства через щель в плоском экране. С. А. Чаплыгин вычисляет коэффициент сопротивления пластины и коэффициент сжатия струи и сопоставляет полученные значения как с соответствующими значениями для несжимаемой жидкости, так и с данными опытов. Это были первые и долгое время единственные точные решения поставленной наперед задачи о плоском стационарном течении газа, полученные в явном виде.

Метод С. А. Чаплыгина особенно удобно применять к исследованию струйных течений, когда границы области в плоскости годографа состоят из отрезков прямых и дуг окружностей. И этим методом было впоследствии решено много важных задач для струйных течений газа.

Применение уравнений Чаплыгина к решению задач обтекания профилей крыла потребовало дополнительных исследований, однако и здесь аналогия между течениями несжимаемой жидкости и газа, вытекающая из уравнений Чаплыгина, оказалась решающей.

Заменяя в своих уравнениях коэффициент, зависящий от скорости, на постоянную, С. А. Чаплыгин получил приближенные уравнения, совершенно аналогичные уравнениям несжимаемой жидкости. Это позволило ему получить простые приближенные решения для дозвуковых течений газа.

Этот метод был применен впоследствии как для исследования дозвуковых, так и сверхзвуковых и трансзвуковых течений, причем коэффициент, зависящий от скорости, заменялся приближающими его функциями от величины скорости так, чтобы приближенная система уравнений допускала возможно более простое и общее решение.

Работа С. А. Чаплыгина «О газовых струях» — одно из важнейших исследований, лежащих в основе газовой динамики.

С. А. Христианович

Литература

1. С. А. Чаплыгин. Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, с. 3—90.
2. С. А. Чаплыгин. Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, с. 19—137.
3. С. А. Чаплыгин. О газовых струях. Отд. изд., серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, с. 17—142.
4. С. А. Чаплыгин. Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, с. 9—89.
5. N. Joukowski. S. Tschaplygin. Über Gasstrahlen, 1902. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1902). Berlin, 1905, 33, S. 781—791.
6. D. Riabouchinsky. Mouvement d'un fluide incompressible autour d'un obstacle. «Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences». Paris, 1932, 194, p. 1215—1217.
7. B. Demtschenko. Sur les mouvements lents des fluides compressibles. «Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences». Paris, 1932, 194, pp. 1218—1220.
8. B. Demtschenko. Variation de la résistance aux faibles vitesses sous l'influence de la compressibilité. «Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences». Paris, 1932, 194, pp. 1720—1723.
9. S. Chaplygin. Gas Jets. NACA «Technical Memorandum» N° 1063. Washington, 1944.
10. Газовая динамика. Доклады на конференции по большим скоростям в авиации, состоявшейся в Риме 30.IX — 6.X.1935 г. Перевод Н. Г. Швейковского. М., ГОИТИ, 1939.
11. С. А. Чаплыгин. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана). «Математический сборник», 28, 1910.
12. Н. Е. Жуковский. О присоединенных вихрях. Отд. оттиск, 1906. «Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания». 1907, 13, вып. 2.
13. P. Molenbroek. Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. «Archiv d. Math. und Phys.». Leipzig, 1890.
14. Л. С. Лейбензон. К теории движения газов. Доклады АН СССР, 3, № 9, 1935.

К РАБОТАМ ПО АЭРОДИНАМИКЕ

В настоящем издании публикуется шесть работ С. А. Чаплыгина по аэродинамике.

В этих работах в законченной математической форме дано теоретическое решение почти всех основных вопросов, связанных с обтеканием крыловых профилей, решеток профилей и разрезных крыльев плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Особое значение имела первая из этих работ «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана)». Эта работа была доложена Московскому математическому обществу в феврале 1910 г. и опубликована в том же году отдельным выпуском [1].

В этой работе изучается предельный случай обтекания крыла, а именно обтекание цилиндрического крыла бесконечного размаха (профиля) плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости и утверждается (гипотеза С. А. Чаплыгина), что если профиль имеет скругленную переднюю и острую заднюю кромку, то при его равномерном движении устанавливается циркуляционное течение с непрерывно сходящим потоком у острой кромки. При этом при силе сопротивления, равной нулю, возникает подъемная сила, приблизительно пропорциональная углу атаки. В дальнейшем опыты показали, как устанавливается такое обтекание, и сделали гипотезу С. А. Чаплыгина почти очевидной.

Таким образом, была открыта принципиальная особенность формы крыла и сделан один из самых решающих шагов в теории полета.

Для того чтобы точнее оценить значение этой работы и роль С. А. Чаплыгина в создании основ аэродинамики, уместно напомнить некоторые предшествовавшие исследования и последовавшее за появлением этой работы стремительное развитие теории крыла.

Первая теория сил, действующих на тело при его равномерном движении в неограниченной газоподобной среде, принадлежала Ньютону. Но уже в начале XIX в. сравнение расчетов с данными опытов показало, что с ее помощью нельзя определить силы, действующие на тело при обтекании его потоком жидкости или газа¹.

В середине XVIII в. Л. Эйлер построил модель идеальной жидкости и дал математическое описание ее движения, а в первой половине XIX в. были установлены дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса).

Из уравнений Л. Эйлера следовало, что при установившемся обтекании тела безграничным потоком идеальной жидкости, при отсутствии в потоке вихрей и поверхностей разрыва равнодействующая сил давления, приложенных к его поверхности, равна нулю (парадокс Эйлера — Даламбера). Из этих уравнений также следовало, что вихри в однородной жидкости, лишенной вязкости, в поле потенциальных сил не могут возникнуть. Таким образом, значение сил, действующих на тело, при обтекании его установившимся безграничным потоком жидкости в конечном счете определяется возникновением поверхностей скольжения и действием вязкости.

Но долгие годы отделяют теорию крыла и объяснение явления полета от создания теоретических основ гидродинамики!

¹ Только при гиперзвуковых скоростях движения тела в газе теория Ньютона дает достаточно хорошее приближение.

Прошло много десятилетий, прежде чем было достигнуто понимание особенностей формы «хорошо обтекаемых тел» и явлений, возникающих при равномерном движении таких тел в потоке жидкости очень малой вязкости (при больших числах Рейнольдса).

Для авиации и машиностроения решающее значение имело открытие формы крыла, т. е. тела, при обтекании которого возникает подъемная сила, многократно превышающая силу сопротивления.

Отыскание оптимальной формы хорошо обтекаемых тел и прежде всего крыльев составляет и поныне основную задачу аэродинамики.

Очень постепенно и медленно достигалось понимание, что при некоторых условиях, связанных в основном с формой тела, при его движении в жидкости может устанавливаться особое циркуляционное течение, почти во всем пространстве чрезвычайно близкое потенциальному потоку идеальной жидкости, и что при таком обтекании силы давления на поверхность тела могут создать подъемную силу, во много крат превышающую силу сопротивления.

По-видимому, впервые существование подъемной (боковой) силы, действующей в плоскости, перпендикулярной скорости полета, на шаровые ядра, имеющие вращательное движение, было установлено по анализам стрельб в первой половине XVIII в. [2]. В своем сочинении Б. Робинс указывает, что сообщение об этих наблюдениях было им сделано Королевскому обществу в 1747 г.

Следующим важнейшим шагом явилось замечательное исследование Г. Магнуса [3], в котором изложены его опыты по измерению боковой силы, возникающей при обтекании вращающегося цилиндра широкой воздушной струей, создаваемой с помощью вентилятора. В этой работе дано ясное толкование возникновения подъемной (боковой) силы в циркуляционном потоке. По мнению Магнуса, при вращении цилиндра постепенно, под действием сил вязкости, возникает вращательное (циркуляционное) течение, которое накладывается на основное. С той стороны, где скорости при сложении увеличиваются, — давление на поверхность цилиндра уменьшается (в соответствии с теоремой Бернулли), а с противоположной стороны, где скорости уменьшаются, — давление увеличивается. Так возникает подъемная (боковая) сила.

В 1877 г. лорд Релей публикует работу [4], в которой он обсуждает опыты Магнуса и вычисляет боковую (подъемную) силу, возникающую при обтекании бесконечного кругового цилиндра установившимся циркуляционным потоком идеальной жидкости, и доказывает, что эта сила направлена ортогонально скорости потока вдали от тела, пропорциональна этой скорости, плотности жидкости и циркуляции.

Таким образом, в этом частном случае была впервые установлена доказанная позже общая теорема Н. Е. Жуковского.

В своей работе Релей высказывает некоторые сомнения о применимости модели идеальной жидкости к вычислению подъемной силы, так как возникновение циркуляционного течения обусловлено действием сил вязкости и действительное течение может сильно отличаться от течения идеальной жидкости.

Уже значительно позже [5] было выяснено, что при движении в жидкости «хорошо обтекаемых тел» при больших числах Re устанавливается течение, чрезвычайно близкое к потенциальному потоку идеальной жидкости, и что силы трения резко изменяют характер течения лишь в тонком пограничном слое у поверхности тела и в сле-

де за телом. Поэтому силы давления на поверхность тела с хорошим приближением могут быть вычислены с помощью уравнений Эйлера, и это имеет смысл даже для такого тела, как цилиндр.

В конце XIX в. стало ясно, что скоро будут осуществлены полеты на аппаратах тяжелее воздуха, и, действительно, в 1903 г. братья Райт совершили свой первый полет. К этому времени было произведено много опытов по измерению подъемной силы и силы сопротивления (О. Лилиенталь, А. Пено, С. Ленгли и др.). Однако природа подъемной силы крыла все еще была не ясна и крыло самолета недоступно расчету.

Решающее значение в создании теории крыла имели проведенные в начале XX в. Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным теоретические исследования обтекания цилиндрических тел установившимся потенциальным потоком идеальной жидкости.

В 1902 г. была опубликована работа В. Кутта [6], в которой была решена задача обтекания непрерывным потенциальным плоским потоком идеальной жидкости цилиндрического тела, представляющего часть поверхности бесконечного кругового цилиндра, при скорости на бесконечности, параллельной хорде, соединяющей острые кромки поверхности. Был найден поток, плавно обтекающий острые кромки, и вычислена возникающая при этом подъемная сила. Было исследовано изменение подъемной силы с увеличением кривизны дужки.

Впервые эта сила была сопоставлена с подъемной силой крыла и сравнена с измеренной в опытах Лилиенталя.

Однако результаты этого исследования не сразу были использованы для создания теории крыла. Работа [6] в течение ряда лет оставалась малоизвестной, и полученные в ней результаты были вновь независимо установлены в работе [1].

В 1906 г. была доказана знаменитая теорема Н. Е. Жуковского [7], выражающая подъемную силу через циркуляцию при обтекании тела и системы тел плоскопараллельным установившимся потенциальным потоком идеальной жидкости. Этой работой были заложены теоретические основы аэродинамики.

Как ни удивительно, в то время в публикациях ее автора эта работа еще прямо не связывалась с теорией крыла!

Только в 1910 г. после появления работы С. А. Чаплыгина [1] и в том же году работы Н. Е. Жуковского [8], в которой он, в частности, излагает и дополняет результаты исследования С. А. Чаплыгина [1] и В. Кутта [6], и появления нового исследования В. Кутта [9] открылась широкая дорога для создания теории крыла.

Несомненно одним из решающих моментов, пролившим яркий свет на всю проблему, явилась «гипотеза С. А. Чаплыгина».

Работы [1, 7—9] положили начало целому потоку исследований [10—16], и меньше чем за 10 лет была создана, в основном законченная, теория крыла и винта и возникла новая отрасль науки — аэродинамика.

В работе [1] широко использован аппарат теории функций комплексного переменного и приводятся всем известные теперь формулы для вычисления подъемной силы и ее момента. Эти формулы независимо были также установлены Блазиусом в [10] и носят теперь название формул Блазиуса — Чаплыгина.

Затем С. А. Чаплыгин, не зная результатов В. Кутта, решает задачу обтекания непрерывным потоком идеальной несжимаемой жидкости части поверхности кругового цилиндра (дужки) при скорости на бесконечности, направленной па-

параллельно ее хорде, и плавном обтекании острых кромок, вычисляет подъемную силу и момент сил давления и исследует изменение подъемной силы с кривизной дужки. Но С. А. Чаплыгин идет гораздо дальше: им затем решается задача обтекания такой же дужки, но с передней кромкой в виде небольшой окружности, и в предположении плавного обтекания задней острой кромки определяется изменение подъемной силы при увеличении угла атаки. Доказывается, что подъемная сила возрастает пропорционально углу атаки (синусу угла атаки). С. А. Чаплыгин оценивает максимальную скорость у поверхности дужки и указывает, что для справедливости полученных выводов максимальная скорость должна во всяком случае всегда быть меньше местной скорости звука.

Затем С. А. Чаплыгин строит семейство профилей с передней скругленной и острой задней кромкой, для которых комплексный потенциал потока выражается в явном виде с помощью элементарных функций, исследует обтекание этих профилей, вычисляет подъемную силу и момент сил давления и их изменение с ростом угла атаки. Эти профили получили впоследствии название профилей Жуковского, так как они [8] независимо были получены Н. Е. Жуковским с помощью изящного геометрического приема.

Эти профили практически использовались в авиации. Аэродинамические характеристики этих профилей исследовались во многих аэродинамических лабораториях мира. Таким образом, работа [1] содержит в сущности в совершенной законченной форме основные положения современной теории профиля крыла!

Работа заканчивается критическим обзором гипотез, положенных в основу исследования; С. А. Чаплыгин справедливо замечает, что вязкость жидкости и наличие сил трения скажутся на силе сопротивления, но, вероятно, мало изменят значение подъемной силы.

С. А. Чаплыгин заканчивает свою работу словами: «Другое важное обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание, — это несколько иной характер потока, устремляющегося на аэроплан, чем предположено в нашей работе. Так как крыло имеет конечную длину, то окружающий воздух не может двигаться плоскопараллельным потоком, его движение за пределами крыльев будет существенно отличаться от разобранного нами. Я полагаю, что на конечности каждого крыла будет опираться сопутствующий ему вихрь, образующийся благодаря разности скоростей на верхней и нижней поверхности крыла. Крыло вместе с этим вихрем и моделируется нашим бесконечным цилиндрическим крылом».

Работа [17] представляет собой запись лекции, прочитанной С. А. Чаплыгиным в октябре 1910 г. на заседании научно-технического комитета Московского общества воздухоплавания.

В этой лекции С. А. Чаплыгин в популярной форме излагает содержание своего замечательного исследования [1] и приводит соображение о возможной картине обтекания крыла конечного размаха с образованием системы вихрей.

Теория крыла конечного размаха и теория индуктивного сопротивления в законченной математической форме были разработаны затем Л. Прандтлем [18—20] для крыла и Н. Е. Жуковским [21] для лопасти винта.

В работе [22] проводится детальное исследование влияния формы профиля на момент сил, действующих на профиль, дается геометрическая интерпретация измене-

ния момента, действующего на крыло при изменении угла атаки, и указываются семейства профилей, обладающие благоприятными моментными характеристиками.

Большой интерес представляет работа [23], в которой развита теория неустановившегося движения профиля. В этой работе ставится задача исследования устойчивости движения крыла при условии постоянства циркуляции.

С. А. Чаплыгин подробно рассматривает неустановившееся движение профиля, имеющего форму тонкого эллипса, профиля, опирающегося на дужку окружности, и семейства профилей со скругленной передней и острой задней кромкой.

В 1914 г. была опубликована работа [24], в которой изложена теория решетчатого крыла, которая имеет основное значение для теории гидравлических и воздушных машин.

В 1921 г. была опубликована работа [25], в которой рассматривается теория разрезного крыла, состоящего из произвольного числа перьев, и подробно исследуются крылья, состоящие из двух и трех перьев. Эта работа содержит основы теории предкрылка и закрылка.

Многие из результатов, полученных С. А. Чаплыгиным в этих последних работах, были независимо получены и другими авторами в разных странах, однако изящная математическая манера изложения, законченность и стройность результатов делают эти работы и поныне очень ценными.

В Советском Союзе на работах С. А. Чаплыгина воспитывалось целое поколение ученых и инженеров и эти работы оказали непосредственное влияние на все развитие авиационной науки в нашей стране.

С. А. Христианович

Литература

1. С. А. Чаплыгин. О давлении плоско-параллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана). М., 1910, 49 с. «Математический сборник», 1911, 28, вып. 1.
2. B. Robins. «Nouveaux principes d'Artillerie», Grenoble, 1771 (перевод с английского).
3. S. Magnus. Über die Abweichung der Geschosse. Abhandlungen der Königlichten Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1852. Berlin, 1853.
4. Lord Rayleigh. (John William Strutt) — On the irregular flight of a tennis-ball. «Messenger of mathematics». London, 1877, VII, pp. 14—16.
5. L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. «Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker — Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904». Leipzig, 1905.
6. W. Kutta. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. «Illustrierte Aeronautische Mitteilungen». München, 1902
7. Н. Е. Жуковский. О присоединенных вихрях. Отд. оттиск, 1906. — «Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания». 1907, 13, вып. 2.
8. Н. Е. Жуковский. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger (О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов). «Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt». Berlin, 1910, 22; 1912, 6.
9. W. Kutta. Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. «Sitzungsberichte der Königlichten Bayerischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch — physikalische Klasse». München, 1910, 2 Abh.
10. H. Blasius. Funktionentheoretische

- Methoden in der Hydrodynamik. «Zeitschrift für Mathematik und Physik». Leipzig, 1910, 58, Heft 1—2, S. 93.
11. *H. Blasius*. Strömfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung. «Zeitschrift für Mathematik und Physik». Leipzig, 1911, 59, Heft 3, S. 43.
 12. *Н. Е. Жуковский*. Geometrische Untersuchungen über die Kutta'sche Strömung (Геометрические исследования о течении Кутты (на нем. языке). «Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания», 1911, 15, вып. 1; 1912, 15, вып. 2.
 13. *Н. Е. Жуковский*. Определение давления плоскопараллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезок прямой. «Математический сборник», 1911, 28, вып. 1.
 14. *Н. Е. Жуковский*. О поддерживающих планах типа «Антуанет». Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания», 1911, 15, вып. 2.
 15. *O. Föppl*. Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten. «Jahrbuch der Motorluftschiff-Studien-Gesellschaft». Berlin, 1910/11, 4.
 16. *R. Grammel*. Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig, 1917.
 17. *С. А. Чаплыгин*. Результаты теоретических исследований о движении аэропланов. «Вестник воздухоплавания», 1910, № 22.
 18. *L. Prandtl*. Ergebnisse und Ziele der Göttingen Modellversuchanstalt. Verhandlungen der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft in Göttingen 3. bis 5. November 1911. «Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt». Berlin, 1912, 3.
 19. *L. Prandtl*. Tragflügeltheorie. I Mitteilung. «Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse», 1918, s. 451—474.
 20. *L. Prandtl*. Tragflügeltheorie. II Mitteilung. «Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch physikalische Klasse». 1919, s. 107—137.
 21. *Н. Е. Жуковский*. Вихревая теория гребного винта. «Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания», 1912, 16, вып. 1; 1914, 17, вып. 1; 1915, 17, вып. 2; «Труды Авиационного расчетно-испытательного бюро», 1918, вып. 3.
 22. *С. А. Чаплыгин*. К общей теории крыла моноплана. М., Высший военный редакционный совет, 1922.
 23. *С. А. Чаплыгин*. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. «Труды Центрального аэрогидродинамического института», 1926, вып. 19.
 24. *С. А. Чаплыгин*. Теория решетчатого крыла. «Математический сборник», 1914, 29, вып. 2.
 25. *С. А. Чаплыгин*. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. «Научно-технический вестник НТО ВСНХ», 1921, № 4—5.

К РАБОТЕ «О ТРЕНИИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ШИПОМ И ПОДШИПНИКОМ»

Работа «О трении смазочного слоя между шипом и подшипником» написана С. А. Чаплыгиным совместно с Н. Е. Жуковским, интересовавшимся и ранее этой проблемой.

В работе дано решение задачи об определении смазочного слоя между шипом и подшипником и сил, с которыми шип и подшипники действуют на смазочный слой. При решении задачи течение считается плоским. В уравнениях Навье — Стокса отбрасываются слагаемые, отвечающие силам инерции, так как эти силы считаются ма-

лыми по сравнению с силами, вызванными вязкостью. Коэффициент вязкости принят постоянным. В этих предположениях дается полное решение задачи. В работе даны ссылки на предшествовавшие исследования Н. П. Петрова, Рейнольдса и Зоммерфельда. Эта работа оказала значительное влияние на развитие теории смазки.

С. А. Христианович

К РАБОТЕ «НОВЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Первый вариант исследования: «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» был опубликован С. А. Чаплыгиным в 1919—1920 гг. в виде четырех отдельных брошюр с названиями: «Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений», «Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда», «Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления, данном Лоренцом» и «Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка». Вследствие малой доступности изданий эти работы остались, по-видимому, неизвестными для большинства математиков.

В 1932 г. все четыре статьи с небольшими дополнениями были изданы вновь под упомянутым выше общим заголовком в Трудах Центрального аэрогидродинамического института (вып. 130). Это второе издание вызвало к жизни целый поток (более 50) работ советских математиков.

В основе предложенного С. А. Чаплыгиным метода лежат две идеи. Первая состоит в использовании установленной им теоремы о дифференциальных неравенствах. Если рассматривать левую часть дифференциального уравнения

$$P(x) = \frac{dx}{dt} - f(t, x)$$

как оператор в функциональном пространстве, то названная теорема устанавливает условия, при соблюдении которых оператор P является оператором монотонного типа, т. е. таким, что из неравенства $P(x) \leq P(y)$ следует, что $x \leq y$.

Вторая идея заключается в отыскании двух линейных операторов монотонного типа P_1 и P_2 , близких в определенном смысле к P , и в замене исходного, вообще говоря, нелинейного, уравнения двумя приближенными линейными уравнениями

$$P_1(\underline{x}_1) = u_1, \quad P_2(\bar{x}_2) = u_2$$

так, что решения этих уравнений связаны с решением x исходного уравнения неравенствами

$$\underline{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2.$$

Если известны два начальных приближения $\underline{x}_0$ и $\bar{x}_0$, охватывающие с двух сторон искомое решение уравнения

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

то способом, указанным Чаплыгиным, можно построить два итеративных процесса,

позволяющие найти две последовательности $\{\underline{x}_n\}$ и $\{\bar{x}_n\}$, монотонно с разных сторон приближающиеся к точному решению уравнения (1):

$$\underline{x}_0 \leq \underline{x}_1 \leq \underline{x}_2 \dots \leq \underline{x}_n \leq \dots \leq x \leq \dots \bar{x}_n \dots \leq \bar{x}_2 \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_0.$$

Первой работой, посвященной развитию и обобщению Чаплыгинского метода, была статья академика Н. Н. Лузина [1, 2], вышедшая в 1932 г. В ней впервые была установлена сходимость метода Чаплыгина и показано, что в определенных условиях величина

$$\max_t (\bar{x}_n(t) - \underline{x}_n(t))$$

есть бесконечно малая порядка $(1/2)^{2^n}$

После Н. Н. Лузина [1, 2] методом С. А. Чаплыгина занимались следующие математики (перечисленные в порядке выхода первых работ): Г. Г. Максудов [3], Д. Ю. Панов [4], А. В. Гельфанд [5], Б. Н. Петров [6], Е. Ф. Саваренский [7], Б. Н. Бабкин [8, 9], С. С. Мусина [10], К. В. Задирака [11, 12], Л. В. Канторович [13, 14], П. В. Азбелов [15], А. Н. Балувев [16, 17], В. А. Чечик [18], И. П. Мысовских [19], С. П. Слугин [20, 21], Е. В. Вороновская [22], Л. М. Воробьев [23], З. Б. Цалюк [24], Э. Э. Тамме [25], С. Ю. Ульм [26] и другие. В этих и других работах, посвященных дальнейшему обобщению и развитию метода С. А. Чаплыгина, его идеи в большинстве случаев применялись к конкретным классам обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений или систем уравнений. В этих работах обычно устанавливались достаточные признаки монотонности дифференциального или интегрального оператора некоторого вида, указывались способы построения приближенных линейных уравнений, определяющих последовательности двусторонних приближений к решению точного уравнения, приводились оценки погрешности.

Общность и лучшее понимание существа метода С. А. Чаплыгина достигаются при его абстрактной трактовке. Существенная роль соотношений порядка в методе делает возможным и целесообразным его изложение в полупорядоченных K -пространствах. Такая трактовка метода дается в работах Балувева А. Н. [16, 17] и Слугина С. Н. [20—21]. Там указаны некоторые общие условия, гарантирующие монотонность функциональных операторов и дающие возможность получить последовательности двусторонних приближений, и установлено взаимоотношение между методом Чаплыгина и обобщенным методом Ньютона для функциональных уравнений в нормированных и полупорядоченных пространствах (см. Канторович Л. В. [13—14]). Отсюда получается, в частности, квадратичная быстрота сходимости метода С. А. Чаплыгина для случая обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, установленная Н. Н. Лузиным [1].

Применением операторов монотонного типа к решению дифференциальных и интегральных уравнений занимались также (значительно позже С. А. Чаплыгина, хотя, возможно, и независимо от его работ) Л. Коллатц (см. [27, гл. 3]) и ряд других зарубежных математиков¹.

Л. В. Канторович

¹ В написании данного комментария принял участие также А. Н. Балувев.

Литература

1. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. Труды ЦАГИ, 1932, 141, 1—32.
2. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина. УМН, 1951 6; 6, 3—27.
3. Максудов Г. Г. Распространение способа академика Чаплыгина по приближенному интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка на уравнения выше первого. Казань, Изв. физ.-мат. о-ва (3), 1932—1933, 6, 50—61.
4. Панов Д. Ю. О применении метода акад. Чаплыгина для решения интегральных уравнений. Труды 2-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2. Л.—М., Изд-во АН СССР, 1930, 385—386.
5. Гельфанд А. В. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, 583—594.
6. Петров Б. Н. Граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка. ДАН СССР, 1946, 51, 251—254.
7. Е. Ф. Саваренский. Неограниченная применимость теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным уравнениям с частными производными первого порядка. ДАН СССР, 1946, 51, 255—258.
8. Б. Н. Бабкин. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений на основе теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. ДАН СССР, 1948, 59, 419—422.
9. Б. Н. Бабкин. Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. ПММ, 1954, 18, 239—242.
10. С. С. Мусина. Приближенное решение одного класса нелинейных интегральных уравнений. Матем сб., 1950, 27 (69), 171—174.
11. К. В. Задирака. О применении метода С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений к краевым задачам. ДАН УССР, 1950, 95—100 (совм. с Погребисским И. Б.).
12. К. В. Задирака. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами методом С. А. Чаплыгина. УМН, 1952, 4, 299—311.
13. Л. В. Канторович. Некоторые дальнейшие применения метода мажорант. ДАН СССР, 1951, 80, 849—852.
14. Л. В. Канторович. Принцип мажорант и метод Ньютона. УМН, 1951, 43, 6; 3.
15. Н. В. Азбелев. О приближенном решении обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка на основе метода С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 1952, 83, 517—519.
16. А. Н. Балчев. К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 1952, 83, 781—784.
17. А. Н. Балчев. О методе С. А. Чаплыгина. Вестник ЛГУ, 1956, 13.
18. В. А. Чечик. О применимости метода С. А. Чаплыгина к приближенному интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. ДАН СССР, 1953, 91, 741—744.
19. И. П. Мысовский. Применение метода Чаплыгина к решению задачи Дирихле для одного частного типа эллиптических дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1954, 99, 13—15.
20. С. Н. Слугин. Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 1955, 103, 565—568.
21. С. Н. Слугин. К теории методов Ньютона и Чаплыгина. ДАН СССР, 1958, 120; 3, 472—474.
22. Е. В. Вороновская. О видоизменении метода Чаплыгина для дифференциальных уравнений первого порядка. ПММ, 1955, 19, 121—126.
23. Л. М. Воробьев. Применимость метода приближенного интегрирования С. А. Чаплыгина к некоторому классу обыкновенных нелинейных диффе-

- ренциальных уравнений второго порядка. УМН, 1956, 11; 1, 181—185.
24. *З. Б. Цалюк*. Замечание по поводу применения условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам качественной теории уравнений. ДАН СССР, 1960, 134; 1, 52—54.
25. *Э. Э. Тамме*. О принципе мажорант для итерационных методов. Тарту. Уч. зап. ун-та, 1959, 73, 84—118.
26. *С. Ю. Ульм*. К теории сходимости итерационных способов. ИАН ЭстССР, серия техники и физ.-матем. наук, 1959, 8; 3, 153—165.
27. *Л. Коллатц*. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969.

К РАБОТАМ ПО ТЕОРИИ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Среди работ С. А. Чаплыгина по механике, относящихся к первому периоду его научной деятельности, значительное место занимает цикл работ по теории движения неголономных систем [1]. В то время С. А. Чаплыгин разрабатывал теорию движения твердого тела. Познакомившись с работой Э. Ливделёфа о качении тела вращения по шероховатой плоскости, С. А. Чаплыгин обнаружил в ней ошибку и предложил способ решения этой задачи [2]. При этом он показал неприменимость общих уравнений Лагранжа к таким системам и вывел свои уравнения. Эти уравнения получили наименование уравнений Чаплыгина и стали одними из основных уравнений аналитической механики неголономных систем. Как выяснилось, причиной неприменимости уравнений Лагранжа является неинтегрируемость уравнений кинематических связей качения без проскальзывания. Системы с такими связями были названы Г. Герцем неголономными системами.

После своей первой работы «О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости» [3], впервые опубликованной в 1897 г., С. А. Чаплыгин исследовал ряд конкретных задач о катании твердого тела по плоскости, проявив при этом аналитическое искусство в обнаружении интегрируемых случаев. С. А. Чаплыгин создал теорию интегрирующего множителя и тем самым обобщил теорию интегрирования Гамильтона — Якоби на неголономные системы («К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе») [4]. Кроме того, С. А. Чаплыгиным получено обобщение известной теоремы площадей («О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров») [5].

Для того, чтобы оценить роль работ С. А. Чаплыгина по динамике неголономных систем, достаточно вспомнить, что в классической механике девятнадцатого века рассматривались преимущественно системы со связями, уравнения которых выражаются явными соотношениями между координатами точек системы. Это — так называемые голономные связи. С появлением неинтегрируемых кинематических связей неожиданно обнаружилось, что казалось бы универсальный аналитический аппарат, созданный Эйлером и Лагранжем, неприменим к очень простым задачам о качении твердого тела по шероховатой поверхности. В связи с этим возник вопрос о создании аналитической механики неголономных систем.

Одними из основополагающих работ в решении этой проблемы и являются исследования С. А. Чаплыгина. Эти работы С. А. Чаплыгина оказали существенное влия-

ние на дальнейшее развитие теории неголономных систем [6], [7], [8], [9], [10], [11] и, в первую очередь, на теорию движения технических систем с качением и общую теорию электрических машин [12], [13], [14].

Несмотря на то, что связи качения таких систем, как автомобиль, самолетное шасси, железнодорожный вагон и др., существенно отличаются от идеализированных моделей качения твердого тела, рассматриваемых в классической механике неголономных систем, ее методы все же оказались применимыми и к таким системам.

Деление механических систем на голономные и неголономные оказалось существенным и для электромеханических систем. В этих системах неинтегрируемые кинематические связи могут возникнуть при наличии скользящих контактов. Оказывается, что деление электрических машин на бесколлекторные и коллекторные соответствует их делению на голономные и неголономные. Обнаружение этого факта позволило положить начало общей теории электрических машин, включив ее в динамику неголономных систем. При этом к бесколлекторным электрическим машинам применимы уравнения движения Лагранжа — Гамеля в квазикоординатах, а коллекторные машины принадлежат к неголономным системам типа Чаплыгина.

Наконец, можно отметить, что распространение общей геометрической трактовки на неголономную механику привело к созданию нового раздела дифференциальной геометрии — геометрии неголономных многообразий [15], [16], [17], и что разработка аналитической механики неголономных систем способствовала возникновению более общих представлений о природе уравнений движения динамических систем вообще и управляемых систем с сервосвязями и сплошной среды, в частности.

Ю. И. Неймарк

Н. А. Фуфаев

Литература

1. С. А. Чаплыгин. Исследования по динамике неголономных систем. В серии «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949.
2. Л. Н. Сренский. О работах С. А. Чаплыгина по динамике неголономных систем. Послесловие в книге [1].
3. С. А. Чаплыгин. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. «Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания», т. IX, вып. I, М., 1897.
4. С. А. Чаплыгин. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. «Математический сборник», т. XXVIII, вып. 2, М., 1912.
5. С. А. Чаплыгин. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров. «Математический сборник», т. XX, вып. 1, М., 1897.
6. П. В. Воронев. Об уравнениях движения для неголономных систем. «Математический сборник», т. XXII, вып. 4, 1901.
7. Х. М. Муштари. О катании тяжелого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости. «Математический сборник», т. 39, № 1—2, 1932.
8. G. Hamel. Theoretische Mechanik, Berlin, 1949.
9. В. Д. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. М., ИЛ, 1951.
10. И. С. Аржаных. Поле импульсов. «Наука», Узбекской ССР, Ташкент, 1965.
11. В. В. Доброправов. Основы механики неголономных систем. «Высшая школа». М., 1970.

12. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. М., 1967.
13. А. В. Гапонов. Неголономные системы С. А. Чаплыгина и теория коллекторных электрических машин. ДАН СССР, т. 87, № 3, 1952.
14. G. Kron. Non-Riemannien Dynamics of Rotating Electrical Machinery. J. of Math. and Phys., 13, 1934.
15. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. Вып. 2—3, 1935.
16. В. В. Вагнер. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 5, 1941.
17. Д. Л. Сундж. Тензорные методы в динамике. Изд. иностр. лит., М., 1947

М. В. Келдыш

СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЧАПЛЫГИН

Биографический очерк

Сергей Алексеевич Чаплыгин принадлежит к числу крупнейших ученых в области механики и является одним из основоположников современной аэродинамики.

С. А. Чаплыгин родился 24 марта (5 апреля) 1869 г. в г. Раненбурге (ныне г. Чаплыгин) Рязанской губернии; по окончании Воронежской классической гимназии (1877—1886 гг.) он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Научная деятельность Сергея Алексеевича начинается в 1890 г., со времени окончания им университета. С 1 января 1891 г. он был оставлен при университете, по ходатайству Н. Е. Жуковского, для приготовления к профессорскому званию по кафедре теоретической механики. Будучи молодым ученым, С. А. Чаплыгин входит в круг интересов, занимавших в то время университетских математиков и механиков, и его первые работы относятся к области классической механики. В то время университетская наука была весьма мало связана с техническими приложениями. Интересы механиков были направлены на решение вопросов, связанных с астрономией и физикой, и частично — на развитие течений и решение ряда трудных задач классической механики, возникших значительно раньше и не находивших долгое время решения. Многие из этих задач представляли большой принципиальный интерес, способствуя развитию общих методов механики и математики, и часто давали решение вопросов, существенных для приложений.

В этот первый период своей деятельности С. А. Чаплыгин целиком направляет свои силы на задачи классической механики, в разработке которых в течение XIX столетия принимали участие многие крупнейшие ученые, и добивается блестящих новых результатов в этой области.

С. А. Чаплыгину принадлежит ряд выдающихся исследований в области классической механики. Работы Сергея Алексеевича в области классической механики показали, что он является блестящим ученым, владеющим самыми сложными аналитическими методами науки, извлекающим из них ясные геометрические закономерности движения.

Первые работы С. А. Чаплыгина относятся к изучению движения твердых тел в жидкости. Эта тематика была выбрана им под влиянием Н. Е. Жуковского — великого русского механика и основоположника

авиационной науки, учеником которого являлся С. А. Чаплыгин. Вся научная деятельность С. А. Чаплыгина протекала в тесном контакте с Н. Е. Жуковским, и он является ближайшим соратником Н. Е. Жуковского в создании новых направлений механики и замечательной школы в области аэродинамики, прославившей русскую науку. В своих работах по движению твердого тела в жидкости С. А. Чаплыгин дает ясную геометрическую интерпретацию законов движения твердых тел в жидкости, найденных в аналитической форме в ряде исследований русских и зарубежных ученых. Здесь сказалось влияние его учителя — Н. Е. Жуковского, для которого всегда характерным являлось создание ярких геометрических представлений в области механики. Последняя из работ С. А. Чаплыгина о движении твердых тел в жидкости была представлена им как магистерская диссертация в 1898 г.

В последующие годы С. А. Чаплыгин дает ряд работ по общим уравнениям механики, по вопросам движения тел с неголономными связями и по задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В этих работах С. А. Чаплыгина в полной мере проявляется его замечательный аналитический талант. В связи с задачей о движении по плоскости тел вращения С. А. Чаплыгин дает общие уравнения движения тел с неголономными связями, являющиеся обобщением на этот случай уравнений Лагранжа. Используя эти общие уравнения, С. А. Чаплыгин исследует задачи о качении шаров. Эти работы вносят крупный вклад в развитие общих методов механики. Характерным для творчества С. А. Чаплыгина является то, что, развивая общие методы исследования, он всегда ищет им вполне конкретные приложения. Эта черта проявлялась на протяжении всей его научной деятельности. С. А. Чаплыгин не имел ни одной математической работы, которая не была бы применена к решению конкретных задач механики. Но если у Сергея Алексеевича всегда было стремление применить созданные им общие теории к конкретным задачам, то и наоборот, когда он задавался целью изучить какое-нибудь новое явление в механике, никакие математические трудности его не останавливали. Будучи ученым исключительной силы, он никогда не подходил трафаретным образом к достижению поставленных перед собой целей, а создавал в каждом отдельном случае свои оригинальные методы, дающие наиболее удачный подход к задаче. Этим объясняется то, что многие из работ С. А. Чаплыгина получили широкое применение и явились источником для исследований большого числа ученых.

В работах о движении твердого тела С. А. Чаплыгин находит ряд новых случаев движения твердого тела с неподвижной точкой, для которых могут быть указаны общие интегралы, и дает приложения этих результатов к конкретным задачам. Сюда относится работа «Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке», в которой дается полное решение задачи о движении твердого тела при некоторых предположениях о моментах инерции и о положении центра тяжести, а также при ограничениях, налагаемых на начальные данные, работы

«По поводу локсодромического маятника Гесса» и «О параболическом маятнике», а также ряд других работ.

Эти работы по задачам классической механики относятся к последнему десятилетию прошлого столетия и к первым годам нашего столетия. Ряд работ Сергей Алексеевич в это же время посвящает общим уравнениям классической механики.

Тематика классической механики в то время представляла чрезвычайно большие аналитические трудности, которые блестяще преодолевались С. А. Чаплыгиным. Однако на рубеже XIX и XX столетий в московской школе механиков, наиболее яркими представителями которой являлись Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин, начинаются поиски новой тематики, сулящей более широкий простор деятельности и более широкие перспективы. Н. Е. Жуковский в это время все больше и больше переносит центр тяжести своей деятельности на задачи, связанные с техникой, и прежде всего на вопросы теории полета. В связи с этим все большее внимание уделяется гидродинамике. Одна из попыток разгадать законы летания и исследовать силы, действующие на тело в полете, привела к разработке теории струйных течений. В это время появляется замечательная работа Н. Е. Жуковского, посвященная разработке общих методов решения задач о струйных течениях несжимаемой жидкости: «Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока». Интересы Сергея Алексеевича также обращаются к струйным течениям, и он выступает с рядом исследований по теории струи в несжимаемой жидкости.

Теория струй в то время представлялась средством для изучения вопросов сопротивления движущихся тел и ряда вопросов гидравлики. Эти первые работы в области гидромеханики в конце концов привели Жуковского, Чаплыгина и их учеников и последователей к проблематике, создавшей новую эпоху в механике, создавшей новую науку — современную аэродинамику. Механиков все больше и больше начинают увлекать новые вопросы, представляемые техникой, и московская школа механиков постепенно меняет свое лицо. В центре новой проблематики становятся вопросы теории полета, но интересы распространяются и на задачи баллистики, теории смазки, гидравлики и многие другие вопросы, связанные непосредственно с развитием техники XX столетия. Это новое направление совершенно изменило лицо механики, сделав ее наукой, непосредственно связанной с техникой и решающей вопросы, выдвигаемые техникой. Запросы техники стали столь велики, что для решения выдвигаемых ею задач необходимо привлечение наиболее сложных и точных методов математики и механики. Но вместе с этим сближение механики с техникой изменило и сами методы механики. Если классическая механика пользовалась исключительно методами математики, то технические проблемы потребовали привлечения широкого научного эксперимента, и механика из математической дисциплины превра-

тилась в науку, опирающуюся не только на наиболее современные достижения математики, но и на широкий научный эксперимент. С. А. Чаплыгин является сильнейшим представителем ученых, развивавших математические методы в механике, но наряду с этим он всегда придавал первостепенное значение развитию экспериментальных методов в механике и часто использовал в своих работах гипотезы, возникшие из опыта, а также придавал основное значение экспериментальной проверке своих работ.

В самом начале этой новой эпохи в области механики появляется замечательная работа С. А. Чаплыгина, принадлежащая к числу лучших произведений в гидромеханике. В 1902 г. С. А. Чаплыгин представляет в Московский университет докторскую диссертацию «О газовых струях». В этой работе путем введения новых независимых переменных на плоскости годографа скоростей С. А. Чаплыгин приводит сложные нелинейные уравнения газовой динамики к системе линейных уравнений, решение которых для дозвуковых течений газа может быть получено в виде рядов, коэффициенты которых в случае струйных задач могут быть определены, если известно решение задачи для несжимаемой жидкости. Этот метод Сергей Алексеевич применил к решению частных задач. Выдающийся интерес представляет развитый в той же работе приближенный метод решения задач об адиабатических течениях газа. Оказывается, что если адиабату в окрестности некоторой ее точки заменить касательной к ней прямой, то задача о газовом течении некоторым преобразованием скорости может быть сведена к задаче о течении несжимаемой жидкости, и, следовательно, к ней применимы хорошо развитые методы теории функций комплексного переменного для исследования течений несжимаемой жидкости.

Работу С. А. Чаплыгина «О газовых струях» постигла интересная судьба. В 1903 г. он защитил ее как докторскую диссертацию, однако в то время она осталась почти незамеченной. Ни сам Сергей Алексеевич и никто другой не продолжили развитых в ней идей, и никто не придал работе исключительного значения. В то время исследование газовых течений со скоростями, приближающимися к скорости звука, не было актуально для техники. Аэродинамика долгие годы могла еще удовлетворяться изучением движений газа со сравнительно малыми скоростями, когда сжимаемость воздуха пренебрежимо мала. Только через тридцать лет после появления работы «О газовых струях», в тридцатых годах нашего столетия, когда авиация начала подходить к скоростям полета, близким к звуковым, и вопросы изучения газовых потоков с большими скоростями стали актуальнейшими вопросами, было раскрыто все значение этой работы. Оказалось, что многочисленные попытки изучения газовых потоков, сделанные в это время, были основаны на методах, которые давали значительно меньшие результаты, нежели методы С. А. Чаплыгина, развитые еще в начале столетия. Работа С. А. Чаплыгина стала в центре многочисленных исследований аэродинамиков, она

явилась основой для решения задач о дозвуковых течениях, и развитие созданных в ней методов привело к решению основных вопросов, связанных с работой крыла при больших дозвуковых скоростях, и других вопросов современной аэродинамики.

В работе С. А. Чаплыгина «О газовых струях» в полной мере проявилось его умение найти в каждой задаче новый путь ее решения, наиболее полно соответствующий существу задачи, ее механическому и геометрическому содержанию. Именно это объясняет блестящий успех работы «О газовых струях». Умея найти наиболее удачный подход к каждой конкретной задаче, С. А. Чаплыгин даже не всегда был знаком с общими теориями. Он часто не обращал внимания на то, что те или другие созданные им методы имеют более широкую область применения, чем та задача, которой он занимался, и поэтому изучение его работ может дать много полезного для исследователя. Так же, как работа по газовым струям, многие другие его работы только через некоторое время будут поняты во всей их глубине и будет раскрыто все их значение.

В 1910 г. появляется первая работа С. А. Чаплыгина по теории крыла. С тех пор вопросы аэродинамики становятся центром его научной деятельности. Вместе с Н. Е. Жуковским он является создателем современной теории крыла. В 1906 г. Н. Е. Жуковский установил свою знаменитую теорему о подъемной силе, образующейся при обтекании тела циркуляционным потоком. Однако потребовалось еще много упорного труда, чтобы применить эту теорему к полному объяснению и количественному определению подъемной силы крыла. Интересно отметить, что в своей работе 1906 г. и в ближайшие последующие годы Н. Е. Жуковский указал ряд приложений своей теоремы, однако в то время еще не было понятно, каким образом приложить эту теорему к вычислению подъемной силы крыла. Более того, после установления теоремы Жуковского еще продолжались поиски объяснения подъемной силы и в других направлениях.

В феврале 1910 г. С. А. Чаплыгин выступил с докладом на заседании Московского математического общества, в котором выдвинул положение, позволяющее определить циркуляционное обтекание крылового профиля, и это было тем существенным дополнением к теореме Жуковского, которое утвердило ее как основной принцип, объясняющий подъемную силу крылового профиля. Выдвинутое С. А. Чаплыгиным положение состояло в том, что при обтекании потоком профиля с острой задней кромкой точка схода струй совпадает с острием. Это позволяет вполне однозначно определить циркуляционное течение около крылового профиля. В 1910 г. почти одновременно появились работа С. А. Чаплыгина «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» и работа Н. Е. Жуковского «О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов», в которых впервые даются способы количественного определения подъемной силы крыловых профилей. В своей работе Н. Е. Жуковский пишет: «В этом году С. А. Чаплыгин сообщил в Московском математическом

обществе способ определять невихревые течения в двух измерениях, обтекающие некоторые контуры...». После работы Н. Е. Жуковского 1906 г. «О присоединенных вихрях» работы С. А. Чаплыгина и Н. Е. Жуковского, появившиеся в 1910 г., окончательно утвердили принципы аэродинамики и лежат в основе всего ее дальнейшего развития. В своей работе С. А. Чаплыгин приложил выдвинутый им принцип схода струй с острой кромки крыла к определению течения около ряда конкретных профилей и определил подъемную силу этих профилей. В этой же работе содержатся ставшие общеизвестными формулы определения подъемной силы и момента по характеристической функции течения и впервые даны способы построения течения около крыловых профилей с острой задней и округленной передней кромками; в частности, С. А. Чаплыгин ввел в этой работе знаменитые профили типа инверсии параболы, которые другим путем были найдены в работе Н. Е. Жуковского и часто носят название «профилей Жуковского».

Вскоре после завершения своей первой фундаментальной работы по теории крыла С. А. Чаплыгин выступил с докладом на заседании научно-технического комитета Московского общества воздухоплавания. В этом докладе, озаглавленном «Результаты теоретических исследований о движении аэропланов», С. А. Чаплыгин в весьма ясной и общедоступной форме изложил весь путь, приведший к созданию теории крыла, весьма выпукло очертив руководящие идеи этой новой теории, дал анализ ее отношения к реальным явлениям полета и осветил основные полученные им результаты. Это малоизвестное сочинение и сейчас, через 55 лет после его появления, может быть с увлечением прочитано каждым, интересующимся основами теории полета, и ярко освещает творческий путь, пройденный создателями теории полета.

Интересно отметить, что в каждом из этих двух первых сочинений по теории крыла С. А. Чаплыгин много внимания уделяет анализу тех упрощений, которые пришлось сделать для возможности создания математической теории крыла. Он анализирует возможность пренебрегать сжимаемостью воздуха, вязкостью воздуха и т. д.

В частности, отдельные замечания показывают, что уже тогда С. А. Чаплыгина занимал важный вопрос о влиянии на работу крыла конечности его размаха. Через три года, в 1913 г., Сергей Алексеевич выступил с докладом на заседании Московского математического общества, в котором, основываясь на схеме, близкой к схеме П-образного вихря, дал подход к теории действия крыла конечного размаха и указал на появление индуктивного сопротивления, обусловленного влиянием свободных вихрей. Он не опубликовал этого исследования, так как, по-видимому, не считал его законченным. Следует сказать, что С. А. Чаплыгин всегда был очень требователен к своим работам и считал возможным публиковать только вполне завершённые исследования. Разбор его бумаг показал, что целый ряд предпринимавшихся им исследований не был им обнаружен. Часть его рукописей была опубликована только

в посмертном издании его сочинений, а также были найдены весьма ценные неопубликованные результаты, к которым за это время пришли другие исследователи. В частности, интересно отметить, что уже в самые первые годы текущего столетия С. А. Чаплыгин владел основами применения теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости и дал решение этим методом ряда задач теории упругости. Эти работы Сергея Алексеевича не были опубликованы, а позже основы применения теории функций к плоской задаче теории упругости были независимо разработаны Г. В. Колосовым и получили большое развитие, особенно в работах отечественных ученых.

После появления в 1910 г. работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина начинается эпоха бурного развития теории крыла. Н. Е. Жуковский наряду с продолжением теоретических работ создает большую школу экспериментальной аэродинамики и конструирования самолетов, школу, подготовившую основы для бурного развития авиации в нашей стране после Великой Октябрьской социалистической революции. С. А. Чаплыгин дает ряд новых блестящих фундаментальных теоретических исследований.

В 1922 г. С. А. Чаплыгин публикует работу «К общей теории крыла моноплана», в которой дается чрезвычайно ясная геометрическая картина работы профиля крыла при различных режимах полета. Здесь вводятся понятия фокуса крылового профиля и исследуется парабола устойчивости.

Работы Н. Е. Жуковского «О присоединенных вихрях» и «О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов» и работы С. А. Чаплыгина «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» и «К общей теории крыла моноплана» в сущности содержат все основные сведения о работе профиля крыла в несжимаемом газе.

Мало можно указать исследований, которые привели бы к столь бурному развитию науки и нашли бы столько последователей, как эти работы Жуковского и Чаплыгина, долгие годы бывшие в центре аэродинамики. Все исследования по теории крыла и винта так или иначе связаны с этими работами. В более поздний период, когда авиация начала подходить к звуковым скоростям, на развитие теоретической аэродинамики решающее влияние оказывает работа Чаплыгина «О газовых струях».

Фундаментальную роль играет работа С. А. Чаплыгина, появившаяся в 1914 г., — «Теория решетчатого крыла», в которой заложены основы теории обтекания решеток циркуляционным потоком, являющейся базой для расчета винтов, турбин и других гидравлических машин. Ряд работ Сергей Алексеевич посвящает теории разрезных крыльев, теории предкрылка и закрылка. Следует особенно отметить работу «О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло», в которой С. А. Чаплыгин впервые начал изучение вопросов неустановившегося движения крыла. Эта работа явилась началом большой серии исследований, связанных с весьма важными вопросами авиационной науки. Любопытно отметить, что развитые в работе методы

нашли в дальнейшем приложения в теории кручения стержней и в других разделах механики.

С. А. Чаплыгин виртуозно владел методами теории функций комплексного переменного в гидродинамике и с исключительной проницательностью умел найти аналитический аппарат, соответствующий геометрической картине явления. В частности, когда потребности авиации остро поставили вопрос о необходимости детальных теоретических расчетов течений около профилей и картины распределения давления, Сергей Алексеевич в последние годы своей жизни дал новые серии теоретических профилей, которые фактически включали в себя все применявшиеся тогда серии профилей. Метод Чаплыгина привел к созданию новых серий профилей, обладавших рядом высоких аэродинамических свойств.

Авиация и аэродинамика были центром научной деятельности С. А. Чаплыгина. В этой области им получены самые блестящие научные результаты и положено много сил на создание после Великой Октябрьской социалистической революции ведущего научного института в авиационной промышленности — Центрального аэро-гидродинамического института (ЦАГИ) и его экспериментального оборудования.

С. А. Чаплыгин соприкасался с очень широким кругом ученых и инженеров, и их научные интересы не проходили мимо С. А. Чаплыгина. Всякий неразрешенный вопрос техники возбуждал его творческую активность. Таким образом возникло большое количество работ Сергея Алексеевича в весьма разнообразных направлениях. Необходимо упомянуть работу С. А. Чаплыгина, написанную в 1904 г. совместно с Н. Е. Жуковским, «О трении смазочного слоя между шипом и подшипником», в которой дается точное гидродинамическое решение задачи о движении смазочного слоя. Эта работа явилась завершением теории, основы которой были заложены нашим соотечественником Н. П. Петровым.

С. А. Чаплыгин занимался задачами о снежных заносах, расчетом движения снарядов в канале орудия, расчетом движения поездов и многими другими. Задачи о расчете движения поезда и задачи баллистики привели Сергея Алексеевича к созданию нового весьма интересного метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Как это часто было и в других его работах, С. А. Чаплыгин, чувствуя недостаточность известных методов для решения вставших перед ним технических задач, создает новый метод, давший возможность продвинуть решение этих задач. В основу этого метода положено отыскание двух функций, между которыми заключен искомый интеграл дифференциального уравнения. С. А. Чаплыгин дал ряд теорем, позволяющих находить такого рода приближающие функции для определенных классов дифференциальных уравнений, и применил эти теоремы к нахождению интегралов в интересовавших его конкретных задачах. Новые глубокие принципы, выдвинутые Сергеем Алексеевичем в теории интегрирования дифференциальных уравнений, нашли широкое применение и развитие во многих последующих работах других ученых. Идеи С. А. Чаплыгина

оказались плодотворными не только для решения широких классов дифференциальных уравнений, но и при приближенном решении весьма общих классов функциональных уравнений.

Во многих своих работах С. А. Чаплыгин опережал своих современников. Работы его все больше и больше находят последователей, а время все более рельефно раскрывает значение его творчества. Творческая деятельность Сергея Алексеевича ярко обрисовывает нам его монументальную фигуру самобытного ученого, вписавшего блестящие страницы в книгу достижений механических наук.

На протяжении всей своей жизни Сергей Алексеевич сочетал кипучую научную деятельность с большой организационной и общественной деятельностью. Много сил отдал он педагогической работе. Еще с 1893 г. С. А. Чаплыгин ведет педагогическую работу в женском среднем учебном заведении. В 1895 г. он становится преподавателем механики Московского технического училища, где ведет практические занятия по механике.

В 1903 г., вскоре после защиты докторской диссертации, Сергей Алексеевич был избран профессором Московского университета и читал лекции по механике.

В 1900 г. в Москве группой профессоров были созданы Высшие Женские Курсы, давшие женщинам доступ к высшему образованию. В то время по уставу женщины не допускались к поступлению в университеты. Вскоре после создания Курсов, в 1905 г., С. А. Чаплыгин избирается их директором. Под его руководством Высшие Женские Курсы выросли в крупное высшее учебное заведение, оборудованное большим числом хороших лабораторий, в состав которого входили факультеты по всем основным отраслям знания. К преподаванию были привлечены крупнейшие научные силы.

С. А. Чаплыгин положил много сил на организацию Курсов и оставался их директором до 1918 г., когда Курсы были слиты с Московским университетом.

В 1911 г. С. А. Чаплыгин покинул Московский университет вместе с большой группой прогрессивных профессоров в знак протеста против реакционных действий министра просвещения Кассо. Он вернулся опять в университет только в 1917 г. Памятью о педагогической деятельности С. А. Чаплыгина являются написанные им весьма интересные курсы «Механика системы» и «Пропедевтический курс механики». В его учебниках ясность и сжатость изложения соединяются с большим числом интересных задач, иллюстрирующих общие положения. Курсы С. А. Чаплыгина до сих пор не потеряли своего значения и являются прекрасным учебным пособием. В 1924 г. Сергей Алексеевич покинул университет, отдав себя целиком научной деятельности и работе по руководству ЦАГИ.

Великая Октябрьская социалистическая революция вызвала новый подъем в деятельности С. А. Чаплыгина. Горячий патриот своего отечества, Сергей Алексеевич принадлежал к той передовой интеллигенции, которая сразу и безоговорочно активно включилась в строительство пер-

вого в мире социалистического государства. Если в прежнее время научная деятельность С. А. Чаплыгина носила, главным образом, теоретический характер, то теперь он активнейшим образом включается в практическую деятельность. С 1918 г. С. А. Чаплыгин принимает участие в работе Комиссии особых артиллерийских опытов при Главном артиллерийском управлении и в работе Научно-экспериментального института путей сообщения, а в конце 1918 г. привлекается Н. Е. Жуковским к работе созданного молодым Советским государством крупнейшего в мире Центрального аэро-гидродинамического института.

Практическая деятельность С. А. Чаплыгина еще выше поднимает творческую его активность. В первые же годы после Великой Октябрьской социалистической революции он публикует ряд замечательных работ. К этому времени относится создание им нового метода интегрирования дифференциальных уравнений и приложение этого метода к задачам исследования движения поезда и к задачам внутренней баллистики. В это время появляется несколько новых замечательных работ по теории крыла.

После смерти Н. Е. Жуковского в 1921 г. Сергей Алексеевич становится во главе ЦАГИ. С. А. Чаплыгин занимает должность председателя коллегии ЦАГИ и позже должность начальника ЦАГИ. Под его руководством ЦАГИ вырастает в крупнейший институт, где наряду с развитием авиационной науки и строительством первых советских самолетов создаются крупные научные центры в области моторостроения, промышленной аэродинамики, гидротехники.

Деятельность С. А. Чаплыгина получает громадный размах: начиная с руководящей работы по созданию советской авиации, она простирается до участия в работе по таким сооружениям, как Днепрострой. Под руководством Сергея Алексеевича в ЦАГИ создаются крупнейшие аэродинамические лаборатории, оснащенные по последнему слову техники, и вырастает сильнейший научный коллектив аэро-гидродинамиков.

В 1931 г. С. А. Чаплыгин по состоянию здоровья оставил пост начальника ЦАГИ. Однако, являясь начальником общетеоретической группы и в дальнейшем руководителем одной из крупнейших лабораторий ЦАГИ, Сергей Алексеевич продолжает возглавлять научную жизнь института. Регулярно, каждую неделю Сергей Алексеевич выслушивал доклады по выполненным в ЦАГИ работам, часто сам выступал с научными сообщениями по теории крыла, теории глиссирования и другим вопросам. Ценными и всегда меткими, хотя и лаконичными замечаниями Сергей Алексеевич направлял многие работы и способствовал их выполнению. Идеи и наброски по ряду вопросов способствовали возникновению целого ряда работ сотрудников ЦАГИ. Ясный ум С. А. Чаплыгина, его исключительные волевые качества и горячий патриотизм вызывали к нему всеобщее уважение.

Сергей Алексеевич горячо любил свою Родину и свой народ. Всю свою деятельность он направлял на служение нашей социалистической Родине. Он принадлежал к числу ученых, отдающих все свои силы на строитель-

ство нового общества. Характерно, что даже в те времена, когда многие ученые печатали свои работы в заграничных журналах и на иностранных языках, для научных трудов С. А. Чаплыгина существовал только русский язык.

Общественность Советского Союза и Советское Правительство высоко оценили заслуги Сергея Алексеевича. В 1924 г. Сергей Алексеевич был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1929 г. — ее действительным членом. Он принял активное участие в решении поставленной перед Академией наук задачи приближения науки к запросам строительства социалистического государства.

Деятельность С. А. Чаплыгина неоднократно отмечалась награждением его орденами. В 1941 г. исполнилось пятидесятилетие научной деятельности Сергея Алексеевича. Многочисленные ученые, инженеры, общественные деятели приняли участие в его чествовании. Советское Правительство дало высочайшую оценку деятельности С. А. Чаплыгина, присвоив ему почетное звание Героя Социалистического Труда с вручением ордена Ленина и золотой медали «Серп и Молот».

В дни Великой Отечественной войны, будучи уже в весьма преклонном возрасте, С. А. Чаплыгин продолжал активно участвовать в жизни ЦАГИ. Вместе с рядом лабораторий ЦАГИ Сергей Алексеевич осенью 1941 г. переехал в Новосибирск; до самых последних дней своей жизни он продолжал работу и, будучи председателем Ученого совета Новосибирского филиала ЦАГИ, направлял его научную жизнь.

Горячий патриот своей Родины, С. А. Чаплыгин был твердо уверен, что придет день победы советского народа над фашизмом. Сергей Алексеевич не дождал до этого дня. 8 октября 1942 г. в возрасте 73 лет Сергей Алексеевич Чаплыгин скончался от кровоизлияния в мозг.

Свыше тридцати лет прошло со дня смерти С. А. Чаплыгина. За это время еще ярче обрисовалась его выдающаяся деятельность как крупнейшего ученого, организатора и общественного деятеля.

ДОКУМЕНТАЛЬНАЯ БИОГРАФИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

1869

24 марта

Сергей Алексеевич Чаплыгин родился в Раненбурге Рязанской губернии.

1877

поступил в Воронежскую классическую гимназию.

1886

окончил 8 классов Воронежской гимназии.

Август

принят на первый курс физико-математического факультета Московского университета для слушания лекций по отделу математики.

1890

окончил физико-математический факультет Московского университета с дипломом первой степени.

1891

1 января

оставлен по прошению Н. Е. Жуковского при Университете на два года для приготовления к профессорскому званию по кафедре теоретической механики (пользовался министерской стипендией).

1893

1 января

по ходатайству Н. Е. Жуковского оставление при университете продлено еще на один год.

1 августа

сдал магистерские экзамены.

Утвержден «преподавателем естествоведения в Московском училище ордена св. Екатерины» (Екатерининский женский институт, по 1 апреля 1897 г.).

15 декабря

физико-математический факультет Московского университета присудил С. А. Чаплыгину (согласно отзыву Н. Е. Жуковского) премию имени Н. Д. Брашмана «за представленное С. А. Чаплыгиным сочинение на объявленную факультетом для соискания сей премии тему «О движении твердого тела в несжимаемой жидкости»».

1894

10 января

сделал доклад «К вопросу о движении твердого тела в жидкости» в заседании секции математики, механики и астрономии IX съезда русских естествоиспытателей и врачей, происходившего в Москве в январе 1894 г.

9 марта

принят в число приват-доцентов Московского университета по кафедре прикладной математики (в этом звании оставался до 1 сентября 1896 г.).

13 мая

единогласно избран по предложению Н. Е. Жуковского и П. В. Преображенского в члены Отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии (ОЛЕ).

18 октября

избран по предложению Н. Е. Жуковского и Б. К. Млодзеевского в члены Московского Математического Общества (ММО).

24 ноября

сделал доклад «Один случай движения в жидкости тела вращения» в заседании физико-математической комиссии Отделения физических наук ОЛЕ.

Участвовал в работах Н. Е. Жуковского по составлению рефератов русских опубликованных работ по механике для реферативного журнала «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik».

1895

преподавал высшую математику в Константиновском межевом институте (по 1901 г.).

21 апреля

докладил работу В. А. Стеклова «О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости» в заседании физико-математической комиссии Отделения физических наук ОЛЕ.

2 сентября

назначен преподавателем математики и аналитической механики Московского технического училища (МТУ).

Преподавал механику в МТУ (ассистент Н. Е. Жуковского по 1905 г.).

13 октября

сделал доклад «По поводу статьи Линдлёва о катании тяжелого твердого тела по плоскости» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

1896

13 января

прочел реферат «О движении газа с образованием поверхности раздела» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

20 февраля

сделал доклад «О движении газа с образованием поверхностей разрыва» в заседании ММО. В предисловии к своей докторской диссертации «О газовых струях» (1902 г.) Сергей Алексеевич отмечает, что в этом докладе он вкратце изложил основы излагаемой в диссертации методы с приложением ее к задачам об истечении.

1 сентября

штатный преподаватель Московского Инженерного училища Ведомства путей сообщения по статике и теоретической механике (по 1 января 1901 г.).

29 ноября

сделал доклад «О катании тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости» в заседании физико-математической комиссии Отделения физических наук ОЛЕ.

17 декабря

сделал доклад «О некоторых частных случаях движения твердого тела в жидкости» в заседании ММО.

1897

14 февраля

сделал доклад «Обобщение теоремы площадей с приложением к решению задачи о катании твердых тел» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

18 февраля

сделал доклад «Обобщение интеграла площадей» в заседании ММО.

16 сентября

сделал доклад «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости» в заседании ММО.

21 октября

сделал доклад «Геометрическое истолкование движения в жидкости тела с винтовой симметрией» в заседании ММО.

24 октября

прочел реферат «О моделях, представляющих некоторые случаи движения тела в жидкости» в заседании физико-математической комиссии Отделения физических наук ОЛЕ.

1898

20 января

сделал доклад «К вопросу о струях в несжимаемой жидкости» в заседании ММО.

20 марта

в заседании физико-математического факультета Московского университета состоялась публичная защита магистерской диссертации С. А. Чаплыгина на тему «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости» (оппоненты: Н. Е. Жуковский и Б. К. Млодзеевский).

2 мая

утвержден определением Совета Московского университета в степени магистра прикладной математики.

20 октября

сделал доклад «Основные соображения для нового объяснения вращения солнца» (предварительное сообщение) в заседании ММО.

3 декабря

прочел реферат «Вращательное движение жидкого сфероида» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

30 С. А. Чаплыгин

1899

11 марта

сделал сообщение «О некоторых постоянных при вихревом движении» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

21 октября

прочел реферат «О параболическом маятнике» в физико-математической комиссии Отделения физических наук ОЛЕ.

14 декабря

сделал доклад «Новое частное решение задачи о вращении тяжелого тела около неподвижной точки» в заседании ММО.

1900

10 января

удостоен почетной золотой медали Академии наук.

27 января

прочел реферат «О параболическом маятнике» в заседании Отделения физических наук ОЛЕ.

15 февраля

сделал доклад «Некоторые новые теоремы о последнем множителе» в заседании ММО.

19 декабря

сделал доклад «Характеристическая функция в динамике твердого тела» в заседании ММО.

1901

1 января

экстраординарный профессор Московского инженерного училища Ведомства путей сообщения по кафедре теоретической механики (до 1910 г.).

20 февраля

сделал доклад «О новом случае интегрируемости уравнений движения твердого тела около неподвижной точки» в заседании ММО.

20 марта

сделал доклад (совместно с Е. А. Болотовым) «О начале кратчайшего срока (новый взгляд на начало Гамильтона)» в заседании ММО.

сентябрь

начал читать курс теоретической механики на Московских Высших Женских Курсах (МВЖК).

18 сентября

сделал доклад «О течении жидкости, прегражденной кривыми стенками» в заседании ММО.

20—30 декабря

член XI съезда русских естествоиспытателей и врачей, проходившего в Петербурге.

24 декабря

сделал доклад «О струевых течениях газов» в заседании секции математики и механики XI съезда русских естествоиспытателей и врачей.

1902

23 апреля

сделал доклад «Об одном интегрируемом случае задачи движения твердого тела в жидкости» в заседании ММО.

19 ноября

сделал доклад «По поводу новой методы в вариационном исчислении» в заседании ММО.

15 декабря

выступил на торжественном заседании в МТУ при обсуждении доклада Н. Е. Жуковского о связи науки и техники

17 декабря

сделал доклад «По поводу новой методы в вариационном исчислении» (продолжение) в заседании ММО.

1903

21 января

сделал доклад «По поводу новой методы в вариационном исчислении (продолжение — относительные $\max$ и $\min$ кратных интегралов)» в заседании ММО.

26 февраля

в физико-математическом факультете Московского университета состоялась публичная защита С. А. Чаплыгиным докторской диссертации на тему «О газовых струях». Официальными оппонентами были Н. Е. Жуковский и Б. К. Млодзеевский.

28 марта

утвержден определением Совета Московского университета в степени доктора прикладной математики.

16 сентября

сделал доклад «О катании шара по горизонтальной плоскости» в заседании ММО.

28 октября

сделал доклад «Новые частные решения задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки» в заседании ММО.

3 декабря

единогласно избран экстраординарным профессором теоретической механики Московского университета.

16 декабря

сделал доклад «К задаче о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки» в заседании ММО.

1904

8 апреля

назначен экстраординарным профессором Московского университета по кафедре теоретической и практической механики.

1905

16 марта — 5 июля

в архиве С. А. Чаплыгина сохранилась относящаяся к этим датам переписка с профессором В. П. Ермаковым об использовании для изыскания интегралов дифференциальных уравнений с остаточным членом теоремы, названной С. А. Чаплыгиным «обобщенной теоремой Ролля».

26 апреля

сделал доклад «Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка» в заседании ММО.

6 октября

избран директором Московских Высших Женских Курсов (МВЖК)

19 октября

утвержден в должности директора МВЖК, согласно избранию.

1906

21 марта

сделал доклад «О плоских деформациях упругих пластин» в заседании ММО.

28 ноября

сделал доклад «Приведение некоторых задач о движении системы с неинтегрируемыми связями к каноническим уравнениям» в заседании ММО.

1907

по инициативе преподавателя МВЖК профессора А. Ф. Котса, поддержанной С. А. Чаплыгиным, при Курсах создано уникальное научное учреждение — Государственный Дарвинский музей.

18 декабря

в заседании ММО заслушан отзыв проф. С. А. Чаплыгина о сочинении И. Белянкина «К движению материальной точки по кривой 2-го порядка».

1906—1908

Эти годы заполнены, главным образом, работой по строительству основных зданий МВЖК и организацией преподавания на них, а также непосредственной преподавательской деятельностью в Московском университете, Московском инженерном училище и на МВЖК.

1909

6 апреля

назначен ординарным профессором Московского университета по кафедре теоретической и практической механики.

Лето

командирован на летнее время Московским учебным округом с ученой целью за границу.

15 сентября

сделал доклад «О выражении остаточного члена интеграла дифференциального уравнения» в заседании ММО.

28 декабря 1909 — 6 января 1910

член распорядительного комитета XII съезда русских естествоиспытателей и врачей, проходившего в Москве.

29 декабря

сделал доклад «О приближенном вычислении интегралов дифференциальных уравнений» в заседании секции 1-а математики XII съезда.

1909

вошел в состав редакционной комиссии, выделенной научной общественностью Москвы (ММО, Общество им. Х. С. Леденцова, Политехническое общество, МТУ) для издания на сделанные обществами денежные отчисления Собрания сочинений Н. Е. Жуковского в связи с 40-летием его научной и общественной деятельности.

1910

16 января

уволен, согласно прошению, от должности экстраординарного профессора Московского Инженерного училища.

16 февраля

сделал доклад «Об ударе потока на дугу круга» в заседании ММО. В докладе было впервые изложено содержание работы по теории крыла, опубликованной в том же году в статье «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана)».

16 марта

продолжил доклад «Об ударе потока на дугу круга» в заседании ММО.

25 апреля

избран членом Совета Московского общества воздухоплавания (МОВ) на учредительном собрании Общества.

28 июня

единогласно избран членом Научно-технического комитета МОВ.

Лето

находился во Франции на лечении.

19 октября

сделал доклад «К теории биплана и руля высоты» в заседании ММО.

27 октября

сделал доклад «Результаты теоретических исследований о движении аэроплана» на III заседании Научно-технического комитета МОВ.

21 декабря

сделал доклад «К теории полета птиц и насекомых» в заседании ММО.

1911

16 января

в день празднования юбилея Н. Е. Жуковского юбиляру был вручен первый выпуск I тома Собрания его сочинений, подготовленного редакционной комиссией (С. А. Чаплыгин, Б. К. Млодзеевский, Е. А. Болотов, А. И. Астров).

21 февраля

сделал доклад «К теории поддерживающей силы изогнутых планов» в заседании ММО.

28 февраля

вместе с В. И. Вернадским, П. Н. Лебедевым, К. А. Тимирязевым, Н. А. Умовым и другими профессорами демонстративно вышел в отставку из Московского университета в знак протеста против распоряжений реакционного царского министра Кассо.

12—16 апреля

член I Всероссийского Воздухоплавательного съезда, проходившего в Петербурге.

13 апреля

сделал доклад «К теории поддерживающих планов аэроплана и крыльев птицы» на I Всероссийском Воздухоплавательном съезде.

16 апреля 1911—15 января 1913

секретарь ММО.

1913

15 ноября

сделал доклад «Теорема о приводящем множителе для системы с неинтегрируемыми связями» в заседании ММО.

20 декабря

сделал доклад «О новых видах потока, прегражденного плоской пластинкой» в заседании ММО.

1912

28 марта — 1 апреля

заместитель председателя Оргкомитета и член II Всероссийского Воздухоплавательного съезда, проходившего в Москве.

29 марта

сделал доклад «Новые теоретические соображения о поддерживающих планах» на II Всероссийском Воздухоплавательном съезде.

29 сентября 1912—1 июля 1917

состоит в должности ординарного профессора Московского коммерческого института.

1913

23 апреля

сделал доклад «О давлении потока на решетку» в заседании ММО.

16—24 июня

член XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей, проходившего в Тифлисе.

17, 18 и 21 июня

избирался почетным председателем в заседаниях секций математики—механики и астрономии XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе.

22 октября

сделал доклад «Вихревая теория подъемной силы крыла» в заседании ММО.

1914

8—13 апреля

почетный член III Всероссийского Воздухоплавательного съезда, проходившего в Петербурге.

12 апреля

сделал доклад «Вихревая теория подъемной силы планов конечной длины» на III Всероссийском Воздухоплавательном съезде.

1916

19 февраля

избран почетным членом Московского общества испытателей природы.

1917

Март

возвратился к преподаванию в Московском университете.

1918

С. А. Чаплыгин — заместитель председателя коллегии Кучинского Аэродинамического института, сотрудник Геофизического института и ректор образовавшегося из МВЖК 2-го Московского государственного университета.

1918—1925

профессор механики Лесотехнического института.

1918—1923

участник работ Комиссии особых артиллерийских опытов при ГАУ по изучению вопросов внешней и внутренней баллистики.

1919

30 января

сделал сообщение в ГАУ о методах анализа сопротивления воздуха.

9 марта

сделал сообщение в ГАУ о постановке в аэродинамической лаборатории МВТУ опытов в соответствии с аналитической разработкой вопроса сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда.

14 апреля

сделал доклад в ГАУ о применении предложенного им метода приближенного интегрирования к решению дифференциальных уравнений внешней баллистики.

27 апреля

сделал доклад «О давлении на кривые пластинки плоскопараллельного потока, срывающегося с пластинки», на заседании ММО.

18 мая

доложил «Метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка и уравнения $\Delta\phi - K\phi = 0$ » на заседании ММО.

19 мая

сообщил Комиссии Особых Артиллерийских Опытов, что согласно предложению председателя Комиссии он занимается в настоящее время баллистикой.

18 ноября

на заседании Экспериментального института путей сообщения сделал сообщение «Сближение интегралов при интегрировании дифференциальных уравнений 1-го порядка».

28 ноября

сделал сообщение по вопросу о приближенном интегрировании уравнений на заседании Комиссии Особых Артиллерийских Опытов.

4 декабря

сделал доклад о разработанной им методе приближенного интегрирования на заседании Комиссии Особых Артиллерийских Опытов.

1920

15 февраля

сделал доклад «Об интегрировании системы дифференциальных уравнений» в заседании ММО.

16 мая

сделал доклад «О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений» в заседании ММО.

21 июля

НТО ВСНХ утвердил «Положение» о Кучинском отделении ЦАГИ. С. А. Чаплыгин — член коллегии ЦАГИ — назначен председателем коллегии отделения. Заместитель председателя жилищной секции Центральной комиссии по улучшению быта ученых.

1921

5 апреля

избран после смерти Н. Е. Жуковского Общим собранием научных сотрудников ЦАГИ председателем коллегии Института. Оставался в этой должности все годы коллегиального управления институтом (1921 г. — сентябрь 1930 г.).

1922

18 января

председатель Центрального научно-технического совета НТО ВСНХ (1922—1923 гг.).

30 января

избран председателем комиссии по изданию трудов Н. Е. Жуковского при Комитете по увековечению памяти Н. Е. Жуковского.

1922—1934

председатель Правления Жилищного товарищества научных деятелей.

1923

8 марта

избран в состав руководства Общества друзей воздушного флота.

2 июля

включен в состав коллегии НТО решением Президиума ВСНХ.

28 августа

коллекцией НТО утвержден председателем строительной комиссии ЦАГИ.

1923

под руководством С. А. Чаплыгина ЦАГИ принимает участие в начавшихся предварительных работах по строительству Днепровской и Штеровской электростанций, С. А. Чаплыгин — консультант Днепростроя.

1924

18 января

избран председателем Комитета по увековечению памяти Н. Е. Жуковского.

6 декабря

избран в члены-корреспонденты Академии наук по разряду математических наук.

1925

29 октября

удостоен распоряжением Главнауки премии имени Н. Е. Жуковского за работы по теории аэроплана.]

1926

5 марта

Совет Военной Воздушной Академии имени Н. Е. Жуковского избрал С. А. Чаплыгина почетным членом Академии.

4 июня

выступил с кратким обзором работ ЦАГИ на заседании Коллегии НТО ВСНХ.

17 сентября

приказом по ВСНХ СССР аэродинамической лаборатории ЦАГИ присвоено имя С. А. Чаплыгина.

1927

8 марта

постановлением СНК утвержден состав Технического совета Днепростроя под председательством И. Г. Александрова; С. А. Чаплыгин — член Технического совета.

27 апреля — 4 мая

член проходившего в Москве Всероссийского съезда математиков.

6 июля

принял участие в заседании комиссии по дирижаблестроению.

12 августа

принял посетившего ЦАГИ Т. Кармана.

10 ноября

награжден по постановлению ВЦИК орденом Трудового Красного Знамени РСФСР.

1928

6 ноября

Приказом НТУ ВСНХ председатель коллегии ЦАГИ С. А. Чаплыгин утвержден директором ЦАГИ.

1928—1931

Член Московского городского и Московского губернских советов рабочих и крестьянских депутатов.

1929

12 января

избран действительным членом Академии наук СССР по отделению физико-математических наук.

18 января

постановлением ВЦИК С. А. Чаплыгину присвоено звание заслуженного деятеля науки.

14 сентября

принял Л. Прандтля, приглашенного в ЦАГИ для прочтения докладов: «Образование вихрей», «Турбулентность», «Явления при сверхзвуковых скоростях».

1930

6—7 февраля

проходил Всесоюзный съезд гидравликов. 6 февраля С. А. Чаплыгин открыл заседание и вел его. Избран в состав Президиума учрежденного съездом Постоянного совещания гидравликов.

24—29 июня

делегирован Президиумом АН СССР на I Всесоюзный съезд математиков в Харькове. Избран председателем Совета ассоциации математиков.

1931

11 января

приказом начальника ЦАГИ С. А. Чаплыгина в ЦАГИ организована под его руководством Общетеоретическая группа (ОТГ ЦАГИ).

1931—1941

на семинаре ОТГ ЦАГИ регулярно докладываются новые научные результаты по вопросам теоретической гидро- и аэромеханики, теории упругости, прикладной математики. Постоянные участники семинара С. А. Чаплыгина: П. А. Вальтер, В. С. Ведров, В. П. Ветчинкин, В. В. Голубев, М. В. Келдыш, А. П. Котельников, Н. Е. Кочин, М. А. Лаврентьев, Л. С. Лейбензон, А. Б. Лотов, А. И. Некрасов, Д. Ю. Панов, Г. И. Петров, П. М. Риз, Л. И. Седов, Я. И. Секерж-Зенькович, Л. Н. Сретенский, С. А. Тумаркин, Ф. И. Франкль, С. А. Христианович.

1931

16 февраля

к 40-летию научной деятельности Революционным Военным Советом СССР объявлена благодарность С. А. Чаплыгину «за понесенные им труды по созданию ЦАГИ и опытного самолетостроения», отмечены его революционные заслуги и с сожалением удовлетворена его просьба об освобождении от должности начальника ЦАГИ с оставлением его в ЦАГИ для продолжения исследовательской научной работы.

16 мая

избран в рабочий президиум I пленарного заседания I Всесоюзной конференции по аэродинамике.

2—8 сентября

Как член Научного совета Сейсмологического института АН СССР принимал участие в первой международной сессии Научного совета СИ, проходившей в Ленинграде.

22 сентября

выделен Президиумом АН СССР в Математический комитет при секторе науки НКП РСФСР.

7 октября

выделен Президиумом АН СССР в Физический комитет при секторе науки НКП РСФСР.

1932

8 января

включен в комиссию для проработки плана работ АН СССР в области математики, физики и реорганизации Физико-математического института.

Февраль

включен в состав выборной комиссии по техническим наукам АН СССР.

Февраль

включен Президиумом АН СССР в группу по вопросам об организации работ по составлению плана 2-й пятилетки.

24—29 апреля

делегирован Президиумом АН СССР на первую Всесоюзную конференцию по технике, созываемую сектором науки НКП РСФСР.

7 сентября

принимая во внимание особые заслуги академика С. А. Чаплыгина, имеющие общесоюзное значение, Президиум ЦИК СССР постановил заменить полученный им орден Трудового Красного Знамени РСФСР на орден Трудового Красного Знамени СССР.

15 октября

утвержден Президиумом АН СССР председателем Бюро технической группы Отделения математических, естественных и технических наук АН СССР.

1933

8 января

утвержден Президиумом АН СССР представителем на совещание по аэросъемке, созываемое в Ленинграде.

13 февраля

включен в состав физико-математической группы АН СССР.

7 мая

выделен представителем АН СССР в Оргкомитет II Всесоюзного математического съезда в Ленинграде в июне 1934 г.

2 октября

сделал доклад «К теории продувки двигателей внутреннего сгорания» в заседании Технической группы АН СССР.

4 октября]

утвержден председателем Комиссии технической терминологии АН СССР (оставался председателем ее до начала 1942 г.).

✱

24 ноября

сделал доклад «Научная деятельность академика А. Н. Крылова» на общем собрании АН СССР в день семидесятилетия А. Н. Крылова.

21 декабря

произнес приветствие на открытии и первом объединенном пленарном заседании трех Всесоюзных юбилейных конференций ЦАГИ.

22 декабря

награжден орденом Ленина.

1933—1937

В ЦАГИ проводились под непосредственным руководством С. А. Чаплыгина работы по подготовке издания Полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского. Вышло Полное собрание сочинений Сергея Алексеевича Чаплыгина (тт. I, II, III) в издании Академии наук СССР под редакцией А. Н. Крылова.

1934

29 апреля

включен в состав комиссии АН СССР по реконструкции транспорта.

24—30 июня

член организационного комитета и президиума II Всесоюзного математического съезда в Ленинграде.

30 июня

избран на заключительном заседании II Всесоюзного математического съезда в состав Совета Всесоюзной ассоциации математических учреждений.

30 сентября

включен в состав Комиссии по реорганизации Технической группы АН СССР.

28 октября

назначен председателем квалификационной комиссии АН СССР по техническим дисциплинам.

3 ноября

назначен председателем редакционной ячейки Технической группы Академии наук СССР.

5 ноября

включен в состав Комиссии по изучению стратосферы при АН СССР.

18 декабря

включен в состав Технического совета АН СССР.

Председатель индустриально-технической секции Дома ученых (1934—1938).

1935

8 января

сделал доклад «О силах, действующих на цилиндр, обтекаемый потоком с образованием поверхностей разрыва» в заседании общетеоретической группы ЦАГИ.

13 февраля

вошел в состав созданного при ЦАГИ специального совета для защиты докторских и кандидатских диссертаций.

С 24 марта

возглавлял Техническую группу Отделения математики и естественных наук АН СССР.

27 мая

принял в ЦАГИ Туллио Леви-Чивита.

1 июня

включен в состав Редакционно-издательского совета АН СССР.

5 июля

Президиумом АН СССР поручено С. А. Чаплыгину как члену транспортной комиссии разработать план дальнейших работ АН в области транспорта и организовать транспортную секцию Технического Совета.

16 сентября

включен в Комиссию АН СССР по организации лаборатории ультравысоких давлений.

30 сентября — 6 декабря

на конгрессе Вольта по большим скоростям в авиации в Риме в докладах Л. Прандтля, Т. Кармана, Дж. И. Тэйлора, А. Буземана и других подробно излагалась и обсуждалась работа С. А. Чаплыгина «О газовых струях».

1936

5 марта

включен в Отделение математических и естественных наук (группа географии и геофизики АН СССР).

21—22 мая

избран в президиум конференции по волновому сопротивлению.

Декабрь

На сессии АН СССР обсуждается предложение С. А. Чаплыгина о строительстве Института гидромеханики АН СССР.

1937

С мая

председатель Комиссии по гидромеханике (позднее — аэрогидромеханике) АН СССР.

23 июня

принял в ЦАГИ Теодора Кармана.

4—5 сентября

член комиссии Ученого совета ЦАГИ по просмотру работ, представленных на конкурс молодых научных работников.

С 10 октября

председатель Ученого совета ЦАГИ для заслушивания и оценки научно-исследовательских работ, выполняемых сотрудниками ЦАГИ для представления в ВАК на соискание ученых степеней, и член редакционного совета.

1938

С 20 июля

член НТС ЦАГИ и председатель Ученого совета ЦАГИ.

1939

10 октября

назначен Совнаркомом СССР членом редакционной комиссии для редактирования второго издания научных трудов Н. Е. Жуковского и его биографии.

16 ноября

на базе общетеоретического отдела и аэродинамической лаборатории ЦАГИ — Москва организована лаборатория физической аэродинамики имени С. А. Чаплыгина. Начальник лаборатории С. А. Чаплыгин.

1940

17 сентября

назначен председателем проблемной комиссии НТС ЦАГИ по газовой динамике.

10 октября

назначен Совнаркомом СССР председателем Жюри конкурса им. Н. Е. Жуковского на лучшую работу по аэродинамике.

25 декабря

проводит I Всесоюзный конкурс им. Н. Е. Жуковского.

Руководит как председатель редколлегии работами по подготовке рукописи второго издания Собрания сочинений Н. Е. Жуковского.

1941

1 февраля

Указом Президиума Верховного Совета СССР академику С. А. Чаплыгину «За выдающиеся научные достижения в области аэродинамики, открывшие широкие возможности для серьезного повышения скоростей боевых самолетов...» в день пятидесятилетнего юбилея его научной деятельности» присвоено звание Героя Социалистического Труда с вручением ордена Ленина и золотой медали «Серп и Молот».

3 февраля

состоялось торжественное чествование пятидесятилетия научной деятельности С. А. Чаплыгина в Клубе летчиков.

В годы Великой Отечественной войны Сергей Алексеевич, несмотря на тяжелую болезнь, продолжал участвовать в работе АН СССР и ЦАГИ.

22 октября

на основании решения Государственного комитета обороны СССР вместе с ЦАГИ эвакуирован из Москвы для работы на периферии.

1942

9 января

избран председателем комитета ученых г. Новосибирска; назначен членом редколлегии журнала «Техника Воздушного Флота».

10 февраля

выступил на общегородском собрании ученых.

25 февраля

по новосибирскому радио было передано выступление Сергея Алексеевича о деятельности ученых в эвакуации, об их помощи заводам и фронту.

5 марта

в письме заместителю Народного комиссара авиационной промышленности просит принять меры для ускорения строительства Новосибирских лабораторий, восстановления Московской лаборатории ЦАГИ и форсирования работ ЦАГИ по реактивным двигателям.

19 апреля

по радио прочитано подписанное С. А. Чаплыгиным, Д. Ю. Пановым, Г. М. Мусиянцем, К. А. Ушаковым приветствие ученых Новосибирска угольщикам Кузбасса в связи с высокой наградой, которой отметило Правительство и Партия их самоотверженный труд.

15 мая

назначен председателем Ученого совета Филиала института.

Участвовал в общегородских собраниях партийных, советских и общественных организаций.

25 сентября

в письме заместителю Народного комиссара авиационной промышленности отмечает, что состояние работ по строительству аэродинамической трубы в Новосибирске позволяет обеспечить ее пуск в течение ближайших месяцев; просит помочь завершить строительство для скорейшего ввода трубы в эксплуатацию.

28 сентября

тяжело заболел (инсульт, осложнившийся воспалением легких).

8 октября

скончался в 9 часов вечера в своей квартире в г. Новосибирске.

УВЕКОВЕЧЕНИЕ ПАМЯТИ С. А. ЧАПЛЫГИНА

10 октября 1942 г.

Постановление № 1664 Совета Народных Комиссаров об увековечении памяти и обеспечении семьи скончавшегося крупнейшего русского ученого-аэродинамика Героя Социалистического Труда академика С. А. Чаплыгина.

12 октября 1942 г.

Решение Исполнительного Комитета Новосибирского Областного Совета депутатов трудящихся об увековечении памяти крупнейшего русского ученого Героя Социалистического Труда академика С. А. Чаплыгина.

В Новосибирске состоялись похороны С. А. Чаплыгина. На могиле академика С. А. Чаплыгина состоялся массовый митинг.

31 августа 1948 г.

Указом Президиума Верховного Совета СССР город Раненбург Рязанской области переименован в город Чаплыгин.

4 апреля 1969 г.

В Московском Доме ученых Академия наук СССР, Министерство авиационной промышленности СССР, ЦАГИ имени проф. Н. Е. Жуковского, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВВИА имени Н. Е. Жуковского и Московский физико-технический институт провели заседание, посвященное столетию со дня рождения С. А. Чаплыгина.

30 июля 1970 г.

По ходатайству ученых и конструкторов в области авиации и широкой авиационной общественности МАП СССР и АН СССР постановили организовать Мемориальный музей в квартире С. А. Чаплыгина в целях увековечения памяти крупнейшего русского ученого академика С. А. Чаплыгина.

14 сентября 1970 г.

Решением Исполкома Моссовета ЦАГИ передана квартира № 37 в доме № 1а по улице Чаплыгина для организации в ней музея-квартиры С. А. Чаплыгина.

БИБЛИОГРАФИЯ ПЕЧАТНЫХ ТРУДОВ С. А. ЧАПЛЫГИНА

За основу настоящего библиографического списка принят список 1954 г., опубликованный в однотомнике избранных трудов С. А. Чаплыгина по математике и механике: список пополнен сведениями о публикациях рефератов работ С. А. Чаплыгина в ежегоднике «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» за 1892—1921 гг. Все издания работ и рефераты были заново просмотрены, что позволило уточнить даты первой публикации некоторых работ.

Описания расположены в хронологическом порядке, по годам первой публикации работы; внутри года работы помещены по алфавиту их названий. Отдельные работы, отнесенные к 1948, 1949, 1950 гг., опубликованы посмертно, по черновым рукописям. В случаях, когда рукопись датирована автором, год ее написания поставлен в скобках, после названия работы.

В библиографическое описание работы включены сведения как о первом ее издании, так и обо всех последующих, русских и зарубежных, полностью или в извлечениях и рефератах; даты публичных сообщений работы.

В подготовке библиографии принимали участие И. В. Сюганова и Н. М. Коптелова.

Н. М. Семенова

1894

О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья (первая)¹. Сообщено 10/22 января 1894 г. на заседании секции математики, механики и астрономии IX съезда русских естествоиспытателей и врачей.

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1894, VI, вып. 2, 20—42.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 1—42.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 136—193.

Избранные труды по механике и математике. М. ГТТИ, 1954, 294—331.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über einige Fälle der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Сост. С. А., Чаплыгиным. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. Berlin, 1897, 25, Jg. 1893—1894, 1501—1503.

По поводу локодромического маятника Гесса

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1894, VII, вып. 1, 33—34.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 252—253.

Собрание сочинений. М.—Л., 1948, ГТТИ, I, 133—135.

1897

О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости²

Труды отд. физ. наук Общества любителей

² По заключению Н. Е. Жуковского ра-

¹ Статья вторая под этим же названием была опубликована в 1897 г. Статья первая удостоена премии им. проф. Н. Д. Брамана 15/27 декабря 1893 г., по заключению Н. Е. Жуковского.

лей естествознания, 1897, IX, вып. 1, 10—16.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 159—171.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 57—75.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 413—425.

В кн.: Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 9—27.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über die Bewegung eines schweren Drehungskörpers auf einer horizontalen Fläche. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1896). Berlin, 1899, 27, 624—625.

О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров

Сообщено 18 февраля (2 марта) 1897 г. в Московском математическом обществе.

Математический сборник, 1897, XX, вып. 1, 1—32.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 172—193.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 26—56.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, 434—454.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über eine mögliche Verallgemeinerung der Flächentheoreme mit Anwendung auf das Problem des Rollens der Kugeln. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1896). Berlin, 1899, 27, 625—626.

О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости

Статья вторая.

(Магистерская диссертация, защищена 20 марта (1 апреля) 1898 г.)

Сообщено 17/29 декабря 1896 г. и 16/28 сентября 1897 г. в Московском математическом обществе.

боты «О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости» (1897 г.), «О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров» (1897 г.), «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости» были удостоены в 1899 г. первой почетной Золотой медали Российской академии наук.

Математический сборник, 1897, XX, вып. 1, 115—170; вып. 2, 173—246.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 43—132.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 194—311.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 332—412.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über einige Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit.

Сост. С. А. Чаплыгиным. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1897), Berlin, 1900, 28, 688—690.

1898

Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1898, IX, вып. 2, 17—21.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 235—240.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 110—117.

Реф. на нем. яз. под загл.: Lineare partielle Integrale des Problems über die Bewegung eines starren Körpers, welcher in einem Punkte unterstützt ist. Jahrb. über. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1898). Berlin, 1900, 29, 628—629.

1899

К вопросу о струях в несжимаемой жидкости

Сообщено 20 января (1 февраля) 1898 г. в Московском математическом обществе.

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1899, X, вып. 1, 35—40.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 254—263.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 5—18.

Реф. на нем. яз. под загл.: Zur Frage von der Wasserstrahlen in incompressibler Flüssigkeit. Сост. С. А. Чаплыгиным. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1899). Berlin, 1901, 30, 684.

О параболическом маятнике

Сообщено 27 января (9 февраля) 1900 г. в Отделении физических наук Общества любителей естествознания.

Труды отд. физ. наук Общества любии-

телей естествознания, 1899, X, вып. 1, 32—35.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 194—199.

Собрание сочинений. М.—Л., 1948, ГТТИ, I, 102—109.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über das paraboloidische Pendel. Сост. С. А. Чаплыгин. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1899). Berlin, 1901, 30, 646.

О пульсирующем цилиндрическом вихре
Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1899, X, вып. 1, с. 13—22.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 264—275.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 138—154.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über einen pulsierenden cylindrischen Wirbel. Сост. С. А. Чаплыгин. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1899). Berlin, 1901, 30, 683—684.

1900

О принципе последнего множителя

Сообщено 15(28) февраля 1900 г. в Отделении физических наук Общества любителей естествознания.

Математический сборник, 1900, XXI, вып. 3, 479—489.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 200—206.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 5—14.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über das Princip des letzten Multiplikators. Сост. С. А. Чаплыгин. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1899). Berlin, 1901, 30, 635 (Jg. 1900). Berlin, 1902, 31, 696.

1901

Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1901, X, вып. 2, 32—34.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 240—245.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 118—124.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 472—476.

Реф. на нем. яз. под загл.: Ein neuer Fall der Bewegung eines schweren

starren Körpers mit einem unbeweglichen Stützpunkte. Сост. С. А. Чаплыгин. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1899). Berlin, 1901, 30, 660 (Jg. 1901). Berlin, 1903, 32, 733—734.

1902

Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости

Сообщено 23 апреля (6 мая) 1902 г. в Московском математическом обществе. Отд. оттиск.—«Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания», 1902, XI, 14 с.

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1903, XI, вып. 2, 7—10.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 151—158.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 337—346.

Реф. на нем. яз. под загл.: Ein neuer besonderer Fall der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1903). Berlin, 1906, 34, 809.

О газовых струях

(Докторская диссертация, защищена 26 февраля (11 марта) 1903 г.)

Основы метода были кратко сообщены автором 13/25 января 1896 г. в Отделении физических наук Общества любителей естествознания и 20 февраля (3 марта) 1896 г. в Московском математическом обществе. Более подробно работа была доложена 24 декабря 1901 г. (6 января 1902 г.) в Секции математики и механики XI Съезда русских естествоиспытателей и врачей в Петербурге.

Отд. изд. М., Изд-во Московского университета, 1902, 121.

Ученые записки отделения физико-математич. наук Московского университета, 1904, вып. 21, 1—112.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 3—90.

На англ. яз. под загл.: Gas jets. Washington. Technical Memorandum, N 1063, NASA, August 1944, 112 p, 31 ill.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 19—137.

Отд. изд. серия «Классики естествознания» (Предисловие С. А. Христиановича). М.—Л., ГТТИ, 1949, 17—142.

Избранные труды по механике и мате-

матике. М., ГТТИ, 1954, 9—89.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über Gasstrahlen. Сост. С. А. Чаплыгин. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1902). Berlin, 1905, 33, 789—791.

1903

Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

Сообщено 28 октября (10 ноября) 1903 г. в Московском математическом обществе.

Отд. оттиск «Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания». М., 1903, II с.

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1904, XII, вып. 1, 4—4, разд. паг.

Полное собрание сочинений. Л., 1933, I, 246—251.

Собрание сочинений. М.—Л., 1948, I, 125—132.

Реф. на нем. яз. под загл.: Eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1904). Berlin, 1906, 35, 733—734.

О катании шара по горизонтальной плоскости

Сообщено 16/29 сентября 1903 г. в Московском математическом обществе.

Математический сборник, 1903, XXIV вып. 1, 139—168.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 216—234.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, с. 76—101.

В кн.: Чаплыгин С. А. Исследования по динамике негोलомных систем. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 72—99.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 455—471.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über das Rollen einer Kugel auf einer horizontalen Ebene. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1903). Berlin, 1906, Bd. 34, 782.

Один случай вихревого движения жидкости

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1903, XI, вып. 2, 11—14.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 276—282.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 155—165.

Реф. на нем. яз. под загл.: Ein Fall von Wirbelbewegung einer Flüssigkeit. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1903). Berlin, 1906, 34, 809.

1904

О трении смазочного слоя между шипом и подшипником

Совместно с Н. Е. Жуковским.

Отд. оттиск «Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания». М., 1904, 34 с.

Труды отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1906, XIII, вып. 1, 24—33.

Труды ЦАГИ, 1931, вып. 95, 123—155. В сб.: Гидродинамическая теория смазки. М., 1934, с. 499—522.

Чаплыгин С. А. Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 91—106.

Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1937, IV, 279—319.

В кн.: Петров Н. П. Гидродинамическая теория смазки. М., Изд-во АН СССР, 1948, 483—505.

Жуковский Н. Е. Избранные сочинения. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 282—296.

Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1949, III, 133—151.

Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 7—26.

Чаплыгин С. А. Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, с. 477—489.

Реф. на нем. яз. под загл.: Über die Reibung der Schmierschicht zwischen Zapfen und Zapfenlager. Сост. Н. Е. Жуковским. Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Math. (Jg. 1904). Berlin, 1906, 35, 766—768.

1905

Механика системы

Ч. I. Аналитическая статика. Изд-во О-ва взаимопомощи студ. естеств. при Моск. ун-те, 1905, 84 с.

Издание второе. Студ. межфакультет. изд. комиссия при Моск. ун-те, 1911, 71 с.

Издание третье. М., 1914, 71 с.

Издание четвертое. М.—Пг., Госиздат, 1923, 100 с.
Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1949 IV, 5—102.

1907

Механика системы

Ч. II. Динамика системы. Изд. группы слушателей. Под ред. С. А. Чаплыгина. М., 1907, 180 с.

Издание второе. М., 1913, 175 с.

Издание третье. М., 1913, 111 с.

Издание четвертое. М.—Л., Госиздат, 1924, 208 с.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1949, IV, 103—298.

1910

О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела.

(К теории аэроплана)

Сообщено 16 февраля (1 марта) и 16/29 марта 1910 г. в Московском математическом обществе.

Отд. изд. М., 1910, 49 с.

Математический сборник, 1911, XXVIII, вып. 1, 120—166.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 144—178.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 184—229.

В кн.: Чаплыгин С. А. Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 11—56.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 90—120.

Реф. на нем. яз. под загл.: Von dem Drucke eines planparallelen Stromes auf untergetauchte Körper (zum Theorie der Aeroplane). Сост. Н. Е. Жуковским. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg. 1911). Berlin, 1914, 42, 823—824.

Результаты теоретических исследований о движении аэропланов

Сообщено 27 октября (9 ноября) 1910 г. в Московском обществе воздухоплавания.

Вестник воздухоплавания, 1910, № 22, ноябрь, 17—24.

Бюллетень Московского общества воздухоплавания, 1911, № 3.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 179—190.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 230—245.

В кн.: Чаплыгин С. А. Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, с. 57—72.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, с. 121—130.

Извлечение в пер. на англ. яз. под загл.: S. A. Chaplygin's works on the induced drag theory. Журнал прикладная математика и механика, 1941, V, вып. 2, 149—150.

1911

К теории движения негелеосомных систем. Теорема о приводящем множителе
Содержание § 2 и 3 сообщено 28 ноября (11 декабря) 1906 г. в Московском математическом обществе.

Работа сообщена 15(28) ноября 1911 г. в Московском математическом обществе.

Математический сборник, 1912, XXVIII, вып. 2, 303—314.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 207—215.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 15—25.

В кн.: Чаплыгин С. А. Исследования по динамике негелеосомных систем. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 28—38.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 426—433.

Реф. на нем. яз. под загл.: Zur Theorie der Bewegung von Systemen mit nicht integrierbaren Beziehungen. Das Theorem über den herleitenden Multiplikator. Сост. Н. Е. Жуковским. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. (Jg 1911). Berlin, 1914, 42, 752—754.

1914

Механика

Ч. I. (Элементарная статика). Из. С. Сааковой. М., 1914, 79 с.

Теория решетчатого крыла

Сообщено 23 апреля (6 мая) 1913 г. в Московском математическом обществе.

Математический сборник, 1914, XXIX, вып. 2, 220—233.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 191—204. (Пополнена анализом для случая решетки с криволинейными перьями).

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 414—430.

В кн.: Чаплыгин С. А. Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 211—228.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, 221—232.

1919

К вопросу о вычислении силы сопротивления воздуха полету снарядов с различными очертаниями головной части Сообщено 30 января 1919 г. в «Комиссии особых артиллерийских опытов».

Отд. изд. под загл.: Сообщение проф. С. А. Чаплыгина на заседании 30 января 1919 г.—«Комиссия особых артиллерийских опытов». Пг., ГАУ, 1919, 15 с., 1 с. илл.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 134—143.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, с. 27—40.

Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда

Бюллетень Научно-экспериментального института путей сообщения, 1919, № 9, вып. 1а, 308—334.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Труды ЦАГИ, 1932, вып. 130, 17—31.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 80—96.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 368—390.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1950, 38—63.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 503—518.

Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений

Бюллетень Научно-экспериментального института путей сообщения, 1919, № 13, вып. 1в, 1—16.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Труды ЦАГИ, 1932, вып. 130, 5—17.

Полное собрание сочинений. Л., 1935, III, 65—79.

Собрание сочинений. М.—Л., 1948, I, 348—368.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Серия «Классики естествознания». М.—Л., 1950, 13—37.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, 490—503.

1920

Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления, данном Лоренцом

Сообщено 14 апреля 1919 г. в Комиссии особых артиллерийских опытов.

Отд. изд. «Комиссия особых артиллерийских опытов». Пг., ГАУ, 1920, 13 с.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Труды ЦАГИ, 1932, вып. 130, 31—38.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 96—105.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 390—402.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1950, 64—78.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, ГТТИ, 518—526.

Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

В 1919—1920 гг. сделан ряд сообщений в Комиссии особых артиллерийских опытов.

Отд. изд. «Комиссия особых артиллерийских опытов». Пг., ГАУ, 1920, 20 с., 1 с. илл.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Труды ЦАГИ, 1932, вып. 130, 39—51.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 105—118.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 402—419.

В кн.: *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1950, 79—99.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, ГТТИ, 526—538.

1921

Опыт применения уравнений гидродинамики к вопросу о движении снаряда в канале орудия

Отд. изд. «Комиссия особых артиллерий-

ских опытов». Пг., 1921—1922. Литограф.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 120—164.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 41—97.

Схематическая теория разрезного крыла аэроплана

(Посвящается памяти Н. Е. Жуковского) Научно-технический вестник, 1921, № 4—5, 21—34.

На англ. яз. под загл.: A Theory of Slotted Aeroplane Wing.

В книге: Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute. On the General Theory of a Monoplane Wing. A Theory of Slotted Aeroplane Wing. Paris, Gauthier — Villars, 1929, 43—76.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 246—276.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 204—234 (на англ. яз.).

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 431—471.

В кн. Чаплыгин С. А. Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 229—271.

Избранные труды по механике и математике. М., 1954, ГТТИ, 233—260.

1922

К общей теории крыла моноплана

Отд. изд. «Высший военный редакционный совет». М., 1922, 53 с.

На англ. яз. под загл.: On the General Theory of a Monoplane Wing. В книге: Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute. On the General Theory of a Monoplane Wing. A Theory of Slotted Aeroplane Wing. Paris, Gauthier — Villars, 1929, 1—42.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 205—245.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 165—203 (на англ. яз.).

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 246—299.

В кн.: Чаплыгин С. А. Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 73—125.

Избранные труды по механике и математике. М.—Л., ГТТИ, 1954, 131—164.

Речь С. А. Чаплыгина — от Кучинского аэродинамического института (речь на могиле Н. Е. Жуковского 20 марта 1921 г.)

В кн.: Памяти профессора Н. Е. Жуковского. М., Цектран, 1922: 146—148. Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 335—337.

1923

Пропедевтический курс механики

Изд. второе, ч. I. Элементарная статика. М.—Пг., Госиздат, 1923, 76 с.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1949, IV, 299—377.

1924

Пропедевтический курс механики

Изд. второе, ч. II. Кинематика и динамика. М., Госиздат, 1924, 236 с.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1949, IV, 378—612.

1925

К теории гидрокона

(Статья первая)³.

В кн.: Материалы к проекту проф. И. Г. Александрова. Государственное Днепровское строительство. ВСНХ. М., 1925, вып. I, 269—284.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 107—119.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 98—113.

О траектории аэроплана, охватывающей наибольшую площадь (в обработке Н. Г. Ченцова).

«Вестник воздушного флота». Научное приложение № 1—2. М., УВВС, 1925, с. 146—149.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 469—473.

1926

О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло

Труды ЦАГИ, 1926, вып. 19, 67 с.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 3—64.

³ Статья вторая под тем же названием опубликована в 1927 г.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 300—382.

В кн.: *Чаплицин С. А.* Избранные работы по теории крыла. Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 126—210.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 165—220.

Об одном случае плоского движения нежимаемой жидкости с образованием свободных границ

Совместно с А. Л. Лаврентьевым.

Бюллетени Геофизического института в Кучине, 1926, № 14, 54—67.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 166—183.

1927

К теории гидрокона

(Статья вторая).

В кн.: Материалы к проекту проф. И. Г. Александрова. Государственное Днепровское строительство. ВСНХ. М., 1927, вып. 3, 137—153.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 120—133.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 114—130.

1929

On the General Theory of a Monoplane Wing. A Theory of Slotted Aeroplane Wing. (на англ. яз.).

(К общей теории крыла моноплана. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана). Paris, Gauthier-Villars, 1929, 1—42; 43—76.

1930

Теоретический расчет действия турбины (К теории турбин. Обобщение решения Н. Е. Жуковского).

Совместно с А. П. Минаковым.

Труды ЦАГИ, 1930, вып. 41, 112—128.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 283—299.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 131—150.

Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936, III, 342—364.

1931

К теории открытия и закрылка

Совместно с Н. С. Аржанниковым.

Труды ЦАГИ, 1931, вып. 105, 2—13.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, II, 277—288.

(Переработаны и исправлены таблицы.) Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 472—487.

1932

Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений

Гл. первая под загл.: Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Бюллетень научно-экспериментального института путей сообщения, 1919, № 13, вып. 1в, 1—16.

Гл. вторая под загл.: Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда. Бюллетень научно-экспериментального института путей сообщения, 1919, № 9, вып. 1а, 308—334.

Гл. третья под загл.: Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления, данном Лоренцом. Отд. изд.: «Комиссия особых артиллерийских опытов». Пг., ГАУ, 1920, 13 с.

Гл. четвертая под загл.: Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Отд. изд.: «Комиссия особых артиллерийских опытов». Пг., ГАУ, 1920, 24 с.

Главы первая — четвертая. Труды ЦАГИ, 1932, вып. 130, 49 с.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 65—118.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 347—419.

Отд. изд.: серия «Классики естествознания» (Предисловие М. В. Келдыша и Д. Ю. Панова). М.—Л., ГТТИ 1950, 102 с.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, 490—538.

1933

К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением

Совместно с Н. С. Аржанниковым.

Труды ЦАГИ, 1933, вып. 123, 13—25.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 323—337.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 151—168.

О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости

(Студенческое сочинение 1890 г.).

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1933, I, 132—150.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 342—336.

О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности

Совместно с А. Л. Лаврентьевым.

Труды ЦАГИ, 1933, вып. 123, 3—12.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 309—321.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 396—413.

Полное собрание сочинений С. А. Чаплыгина

В трех томах. Под редакцией А. Н. Крылова (Предисловие: «От отделения математических и естественных наук Академии наук СССР» в т. I). Л., Изд-во АН СССР, 1933—1935.

1934

К теории продувки цилиндров двигателей внутреннего сгорания

Совместно с В. В. Голубевым.

Труды ЦАГИ, 1934, вып. 175, 3—46.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 251—308.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 169—242.

Научная деятельность Алексея Николаевича Крылова

Доклад 24 ноября 1933 г. на Общем собрании АН СССР.

Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова, отд. математический, 1934, V, 5—12.

В кн.: *Крылов А. Н. Мои воспоминания*. М., Изд-во АН СССР, 1945, 532—542.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 350—360.

1935

К теории предкрыла и закрылка

Совместно с В. В. Голубевым.

Труды ЦАГИ, 1935, вып. 171, 39 с.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 586—639.

О силах, действующих на цилиндр, обтекаемый потоком, с образованием вихрей разрыва

Сообщено 8 января 1935 г. на заседании Общетеоретической группы ЦАГИ.

Труды ЦАГИ, 1935, вып. 240, 5—13.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 382—395.

Подъемная сила составного крыла

Работа написана в 1912 г. При публикации частично переписана и дополнена автором.

Полное собрание сочинений. Л., Изд-во АН СССР, 1935, III, 235—250.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 488—507.

1936

К теории триплана

Труды ЦАГИ, 1936, вып. 296, 23 с.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 508—536.

Избранные труды по механике и математике. М., ГТТИ, 1954, с. 274—293.

1937

Задачи и методы по упорядочению технической терминологии

Совместно с Д. С. Лотте.

Изв. АН СССР, Отд. технич. наук, М.—Л., 1937, № 6, 867—883.

1938

Работы по гидромеханике в СССР

Совместно с В. В. Голубевым.

В кн.: *Математика и естествознание в СССР*. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1938, 101—120.

1941

Вихревая теория подъемной силы крыла (Влияние краев пластинки).

Сообщено 22 октября (4 ноября) 1913 г. в Московском математическом обществе.

Сообщено 12(25) апреля 1914 г. на III Всероссийском воздухоплавательном съезде в Петербурге.

На англ. яз. под назв.: *The vortex theory of lift (tip effect of a plate)* (Вихревая теория подъемной силы; влияние краев пластинки). On the lifting planes of an aeroplane; a three-dimensional problem (О поддерживающих планах аэроплана; задача в трех измерениях — по стереограмме В. П. Ветчинкина с собственноручными рисунками С. А. Чаплыгина). Журнал прикладная математика и механика. М.—Л., 1941, V, вып. 2, 151—157.

Изложение доклада. В кн.: *Голубев В. В.* Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ. М.—Л., 1931, вып. 108, 147—150.

Отец русской авиации (Н. Е. Жуковский)

Самолет, 1941, № 3, 5—7.

1942

Новые теоретические профили крыльев и винтов

Совместно с Ю. С. Чаплыгиным.

Техника Воздушного Флота, 1942, № 3, 5—41.

1948—1950

Собрание сочинений, Т. 1—4. М.—Л., Гостехиздат, 1948—1950; Т. 1. Теоретическая механика. Математика, 1948, 482 с.; Т. 2. Гидродинамика. Аэродинамика, 1948, 643 с.; Т. 3. Математика и механика. Речи и доклады. Сергей Алексеевич Чаплыгин (биографический очерк), с. 423—448. Список печатных трудов С. А. Чаплыгина, с. 451—459. Ред. В. В. Голубев, 1950, 465 с. Т. 4. Курсы лекций по теоретической механике. Ред. М. В. Келдыш, 1949, 612 с. Редакционная коллегия: Л. С. Лейбензон, С. А. Христианович, Г. Н. Абрамович, В. В. Голубев, М. В. Келдыш, Л. Н. Сретенский, Н. М. Семенова.

1948

К теории потенциальных функций

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 445—450.

Потенциал эллипсоида

Ред. Л. Н. Сретенский, В. К. Гольцман.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 458—468.

Приближенное интегрирование системы двух дифференциальных уравнений

Ред. Д. Ю. Панов.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 427—444.

Приближенное решение задачи о метании бомбы с аэроплана (1926 г.)

Ред. В. К. Гольцман.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 420—426.

Разложение потенциала тела по сферическим функциям

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, I, 451—457.

1949

Вихревой поток, обтекающий преграду в виде забора (1921 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 546—554.

Избранные работы по теории крыла

Предисловие С. А. Христиановича.

Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 274 с.

Исследования по динамике негидродинамических систем

Послесловие Л. Н. Сретенского.

Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 111 с.

К теории метелей (1921 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 567—575.

О газовых струях

Предисловие С. А. Христиановича.

Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1949, 142 с.

Поток, обтекающий с непрерывными скоростями забор с образованием постоянных вихрей впереди и позади забора (1921 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 555—566.

Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероид (1898 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Сообщено 3(15) декабря 1898 г. под названием «Вращательное движение жидкого сфероид» в физико-математической комиссии Отделения физических наук Общества любителей естествознания.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1948, II, 576—585.

1950

Геометрическая интерпретация движения в жидкости тела винтовой симметрии (1897 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Сообщено 21 октября (2 ноября) 1897 г. в Московском математическом обществе.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 288—291.

Давление жесткого штампа на упругое основание (1900 г.)

Ред. Н. В. Зволинский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 317—323.

Давление на сложный план

Ред. М. И. Гуревич и Л. И. Седов.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 292—301.

Деформация в двух измерениях (1900 г.)

Ред. Н. В. Зволинский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 306—316.

Изыскание интегралов линейных уравнений второго порядка с остаточным членом

Ред. М. В. Келдыш и Д. Ю. Панов.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 243—247.

К теории движения негोलомных систем; примеры применения метода приводящего множителя

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 248—259.

К теории полиплана

Ред. М. И. Гуревич и М. В. Келдыш.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 302—305.

Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений

Предисловие М. В. Келдыша и Д. Ю. Панова.

Серия «Классики естествознания». М.—Л., ГТТИ, 1950, 99 с.

О движении твердого тела, прикасающегося к поверхности с трением

Ред. Л. Н. Сретенский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 283—287.

Работы С. С. Неждановского по планетам, аэропланам, воздушным змеям, фотограмметрии и гребным винтам (1928 г.)

Ред. В. П. Ветчинкин и Л. С. Лейбензон.
Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 346—349.

Растяжение пластинки с двумя равными круглыми отверстиями (1905 г.)

Ред. Н. В. Зволинский.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 324—332.

Речь на юбилее десятилетия ЦАГИ 5 января 1929 г.

(Основатель ЦАГИ — Н. Е. Жуковский).
Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 338—345.

Характеристическая функция в динамике твердого тела (1900 г.)

Ред. Л. Н. Сретенский.

Сообщено 19 декабря 1900 г. (1 января 1901 г.) в Московском математическом обществе.

Собрание сочинений. М.—Л., ГТТИ, 1950, III, 260—282.

1952

Доклад С. А. Чаплыгина о работе ЦАГИ на заседании коллегии НТО ВСНХ 4 июня 1926 г.

Опубликован посмертно по стенограмме.
В кн.: *Чаплыгин С. А.* (К десятилетию со дня смерти). М., ЦАГИ, 1952, 55—62.

Н. Н. Павловский. Некролог (1937 г.)
В кн.: *Чаплыгин С. А.* (К десятилетию со дня смерти). М., ЦАГИ, 1952, 65—66.

1954

Избранные труды по механике и математике

Биографический очерк М. В. Келдыша «С. А. Чаплыгин» и список печатных работ С. А. Чаплыгина (с. 539—558).
М., ГТТИ, 1954, 568 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ *

Абель Н. (Abel N.) 46, 373
Адамс Д. (Adams D.) 308
Адамчик М. Ф. 131
Александров И. Г. 474, 488
Аржанников Н. С. 488
Астров А. И. 470

Белянкин И. 468
Бернулли Д. (Bernoulli D.) 13, 25, 136
Бессель Ф. (Bessel F. W.) 31
Бобылев Д. К. 372, 409
Бойль Р. (Boyle R.) 61
Болотов Е. А. 12, 466, 470
Брашман Н. Д. 463, 481
Буземан А. (Busemann A.) 477

Вальтер П. А. 475
Ведров В. С. 475
Вернадский В. И. 470
Вейерштрасс К. (Weierstrass K.) 375
Ветчинкин В. П. 131, 137, 475
Вольта А. (Volta A.) 477
Воронец П. В. 409

Гамильтон В. (Hamilton W. R.) 379, 466
Гаусс К. (Gauss C. F.) 24
Гельмгольц Г. (Hermann von Helmholtz) 11
Гей-Люссак (Gay-Lussac G.) 61
Гесс В. (Hess W.) 454, 481
Гирн Дж. (Hirn G. A.) 62, 63
Голубев В. В. 475, 489
Готье — Вилляр (Gauthier — Villars) 196, 487, 488
Грин Дж. (Grenn G.) 192, 238, 239, 320
Гюгоньо А. (Югоньо) (Hugoniot H.) 63, 64

Даламбер Ж. (D'Alembert J. le Rond) 363, 385,

Ермаков В. П. 468

Жордан К. (Jordan C.) 45, 50, 77

Жуковский Н. Е. 11, 25, 47, 66, 88, 89, 98, 103, 106, 134, 135, 136, 144, 204, 209, 221, 233, 236, 258, 263, 289, 310, 372, 409, 452, 453, 454, 456, 457, 458, 459, 461, 463, 464, 465, 467, 469, 470, 472, 473, 476, 478, 479, 480, 481, 484, 485, 487, 488, 490, 491, 492

Забудский Н. А. 84
Зоммерфельд А. (Sommerfeld A.) 289, 291, 304

Иконников М. М. 244

Карман Т. (Th. von Karman) 474, 477, 478
Кассо 460, 470
Келдыш М. В. 452, 475, 495
Кирхгофф Г. (Kirchhoff G.) 11, 47, 53, 59, 66, 80, 82, 88, 105, 454
Колосов Г. В. 458
Котельников А. П. 475
Котс А. Ф. 468
Кочин Н. Е. 475
Коши О. (Cauchy A. L.) 100, 101, 235
Крылов А. Н. 476, 489
Кутта В. М. (Kutta W. M.) 106, 134, 136

Лаврентьев А. Л. 488, 489
Лаврентьев М. А. 475
Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 364, 376, 377, 453
Ламб Г. (Lamb H.) 17
Лебедев П. Н. 470
Левн-Чивита Тулио (Levi-Civita Tullio) 477
Лейбензон Л. С. 475
Линделёф Э. (Lindelöf Ernst) 363, 365, 366, 464
Ломоносов М. В. 480
Лоренц Г. (Lorentz H. A.) 339, 486, 488
Лотов А. Б. 475
Лотте Д. С. 489
Лузин Н. Н. 353

* К трудам С. А. Чаплыгина, биографическому очерку и биографической хронике.

- Мариотт Е. 61
Мах Э. 85
Минаков А. П. 488
Млодзеевский Б. К. 464, 465, 467, 470
Моленбрёк П. (Molenbroek P.) 11, 12
Муслиянец Г. М. 479.
- Неждановский С. С. 491
Некрасов А. И. 475
Нейман (Neumann) 289
Ньютон И. (Newton) 354
- Павловский Н. Н. 491
Панов Д. Ю. 475, 479
Паренти (Parenty) 62, 64
Петров Г. И. 475
Петров Н. П. 289, 297, 459
Пикар Э. (Picard H.) 21, 196
Портер Дж. (Porter J.) 31
Прандтль Л. (Prandtl L.) 182, 474, 477
Преображенский П. В. 464
Пуансо Л. (Poinsot L.) 405
- Рейнольдс О. (Reynolds O.) 289
Риз П. М. 475
Риккати Я. (Riccati J.) 356
Риман Г. (Riemann) 65
Ролль М. (Rolle Michel) 468
Рэлей (Рэйли) Дж. (Lord Rayleigh—
Strutt J.) 94, 97, 98, 118
- Седов Л. И. 475
Секерж-Зенькович Я. И. 475
- Сеп-Венан А. (Barré de Saint Venant. Н.) 62, 63
Сретенский Л. Н. 475
Стеклов В. А. 464
- Тибо (Thibaut) 82, 84
Тимирязев К. А. 470
Томсон В. (W. Thomson — Lord Kelvin) 409
Тумаркин С. А. 475
Тэйлор Дж. (Taylor G. L.) 477
- Умов Н. А. 470
Ушаков К. А. 479
- Фарман А. (Farman H.) 138, 141
Франкль Ф. И. 475
Фурье Ж. (Fourier J. B.) 77, 354
- Христианович С. А. 475
- Чаплыгин Ю. С. 490
Чанцов Н. Г. 487
- Штермер К. (Störmer K. F.) 308
- Эйлер Л. (Euler L.) 97, 133, 134, 136, 383, 409, 427
Эмден Р. (Emden R.) 13, 64
- Якоби К. (Jacobi C. G.) 21, 379, 380, 382, 411, 412

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	7
-----------------------	---

I. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

О газовых струях	41
Предисловие	11
Глава I. Общие основания методы исследования	13
Глава II. Некоторые свойства функции $z_n y_n$ и x_n . Доказательство сходимости рядов ψ и ϕ	27
Глава III. Истечение газа из бесконечно широкого сосуда	46
Глава IV. О давлении газового потока на пластинку	66
Глава V. Приближенная метода решения задач о газовых струях	85
О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана)	97
Результаты теоретических исследований о движении аэропланов	131
К общей теории крыла моноплана	142
О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло	182
Теория решетчатого крыла	244
Схематическая теория разрезного крыла аэроплана	258
О трении смазочного слоя между шипом и подшипником (совместно с Н. Е. Жуковским)	289

II. МАТЕМАТИКА

Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений	307
I. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений	307
II. Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда	322
III. Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления, данном Лоренцом	339
IV. Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	347

III. ОБЩАЯ МЕХАНИКА

О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости	363
К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе	376
О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров	385
О катании шара по горизонтальной плоскости	409

ПРИЛОЖЕНИЯ

Примечания и комментарии	431
М. В. Келдыш. Сергей Алексеевич Чаплыгин. Биографический очерк	452
Документальная биографическая хроника	463
Библиография печатных трудов С. А. Чаплыгина	481
Именной указатель	492

Сергей Алексеевич Чаплыгин

Избранные труды

Утверждено к печати

Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редакторы *М. С. Райкова, Л. В. Кудрявцева*

Художественный редактор *Н. Н. Власик*

Технический редактор *Р. Г. Грузинова*

Корректор *И. А. Талалай*

Сдано в набор 4/IX 1975 г.

Подписано к печати 26/III 1976 г.

Формат 70×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1.

Усл. печ. л. 37,0. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 1700.

Тип. зак. 2977. Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Наука»

103717 ГСП, Москва, К-62. Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».

121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

СПИСОК ОПЕЧАТОК И ИСПРАВЛЕНИЙ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
94	14 стр.	[см. стр. 84]	[см. стр. 86]
139	2 стр.	стр. 10	стр. 12
376	3 стр.	стр. 455—471	стр. 409—428
415	3 св.	$\left(\frac{1}{u} \frac{1}{\partial^2} \right)$	$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\partial^2} \right)$
435	9 св.	$\xi \frac{dy}{dt} P(x^2$	$\xi \frac{dy}{dt} = P(x^2$

А. Чаплыгин



Pauling



С. А. ЧАПЛЫГИН

1898 г.



С. А. ЧАПЛЫГИН
1910 г.

С. А. Чаплыгин

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КРЫЛА МОНОПЛАНА

ВЫСШИЙ ВОЕННЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
1922

НКТП СССР
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

ТРУДЫ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

ВЫПУСК 139

Акад. С. А. ЧАПЛЫГИН

НОВЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД



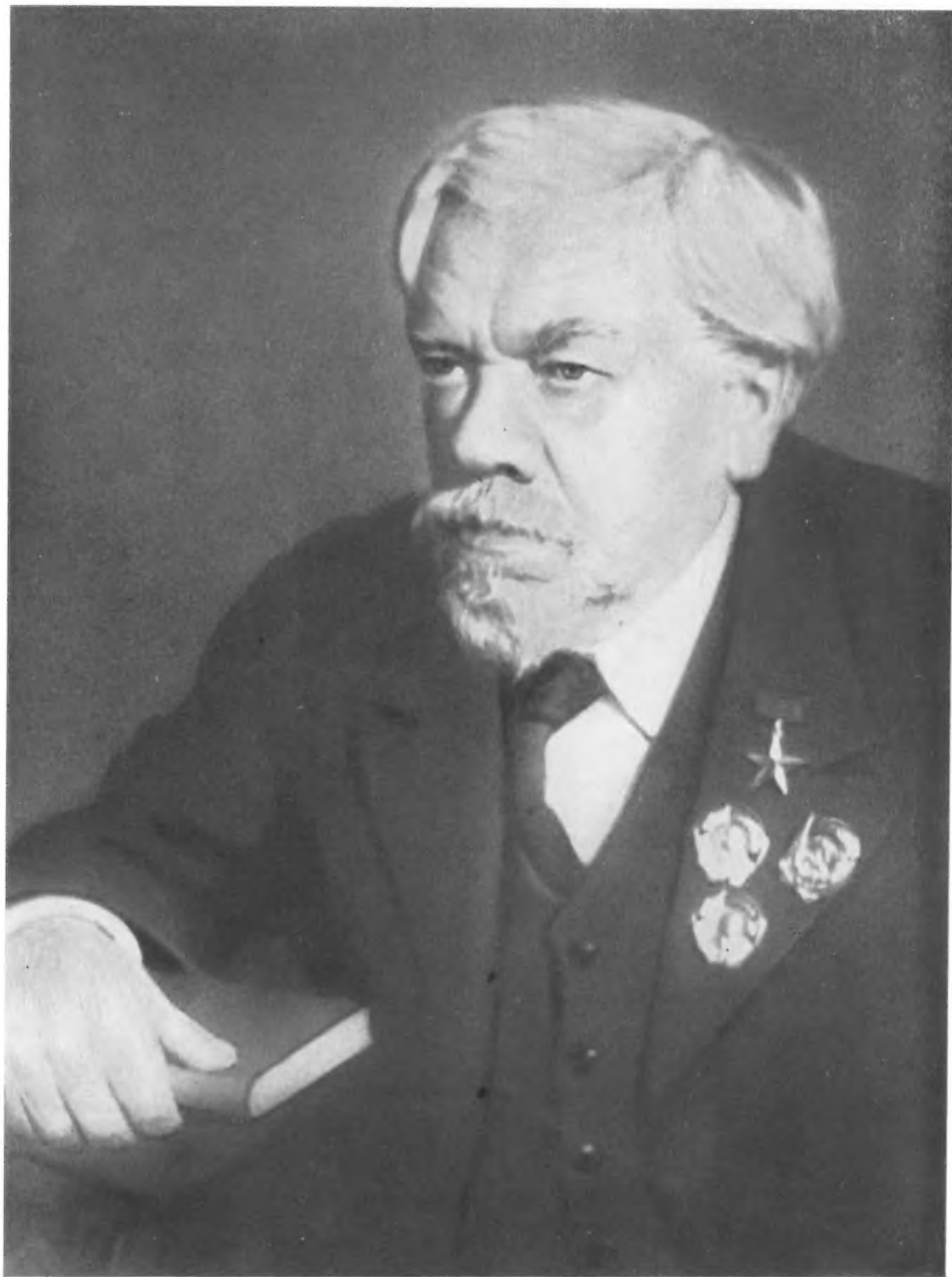
Аэродинамическая лаборатория им. С. А. Чаплыгина



Заседание коллегии ЦАГИ



М. И. Калинин вручает С. А. Чаплыгину орден Ленина
и золотую медаль «Серп и Молот»



С. А. ЧАПЛЫГИН

1941 г.

С.А.
ЧАПАЛГИН

ИЗБРАННЫЕ
ТРУДЫ



